

Распространение тепла в одномерных кристаллических структурах

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. проф. Кривцов Антон Мирославович

Соколов Алексей

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого



Введение

- Z. Rieder, J.L. Lebowitz, E. Lieb 1967. Properties of a Harmonic Crystal in a Stationary Nonequilibrium State
- Нарушение закона Фурье в идеальных кристаллических структурах
- C.W. Chang, D. Okawa Breakdown of Fourier Law in Nanotube Thermal Conductors. Нарушение закона Фурье, экспериментальное подтверждение, зависимость от длины.

Уравнения движения:

$$\ddot{u}_k = \omega_0^2 (u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}), \quad \omega_0 = \sqrt{C/m},$$

u_k — перемещение частицы, m — масса частицы, C — жесткость связи.



Начальные условия:

$$u_k|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_k|_{t=0} = \sigma(x)\rho_k,$$

случайная величина

Рис. 1

Прямоугольный импульс

Рассмотрим начальное распределение температуры по закону:

$$T_0(x) = A(H(x + l) - H(x - l)), \quad (1)$$

где H - функция Хевисайда.

Вид функции приведен на рис.2

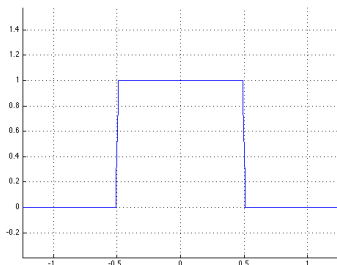


Рис. 2 : Единичный прямоугольный импульс

Уравнение, описывающее распространение тепла, зависимость $T(x, t)$ приведено в работе [1]:

$$T(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-t}^t \frac{T_0(x - c\tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau. \quad (2)$$

Подставляя функцию начального распределения в (2):

$$\begin{aligned} T(t, x) &= \frac{A}{\pi} \int_{-t}^t \frac{H(x + l) - H(x - l)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau = \\ &= \frac{A}{\pi} \int_{-t}^t \frac{H(x + l)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau - \frac{A}{\pi} \int_{-t}^t \frac{H(x - l)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Нахождение интеграла:

$$\frac{A}{\pi} \int_{-t}^t \frac{H(x)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau \quad (4)$$

приведено в работе [1]. Решение записывается в виде:

$$\zeta(t, x) = \begin{cases} 0, & x < -ct; \\ A \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{x}{ct}\right), & x < |ct|; \\ A, & x > ct. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом решение исходной задачи:

$$T(x, t) = \zeta(x + l) + \zeta(x - l). \quad (6)$$

Рассмотрим подробнее функцию (6) на временных интервалах $t < \frac{l}{c}$ и $t > \frac{l}{c}$:

$$t < \frac{l}{c} : T(x, t) = \begin{cases} 0, x < -l - ct; \\ A \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{x+l}{ct}\right)\right), -l - ct < x < -l + ct; \\ A, -l + ct < x < l - ct; \\ \frac{A}{\pi} \arccos\left(\frac{x-l}{ct}\right), l - ct < x < l + ct; \\ 0, x > l + ct; \end{cases} \quad (7)$$

$$t > \frac{l}{c} : T(x, t) = \begin{cases} 0, x < -l - ct; \\ A \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{x+l}{ct}\right)\right), -l - ct < x < l - ct; \\ \frac{A}{\pi} \left(\arccos \frac{x-l}{ct} - \arccos\left(\frac{x+l}{ct}\right)\right), l - ct < x < -l + ct; \\ \frac{A}{\pi} \arccos\left(\frac{x-l}{ct}\right), -l + ct < x < l + ct; \\ 0, x > l + ct; \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим закон затухания функции T_0 при $t > \frac{l}{c}$ в точках $x = 0$, $x = l - ct$ и $x = -l + ct$.

$$T(t, -l + ct) = T(t, l - ct) = \frac{A}{\pi} \left(\pi - \arccos \left(\frac{2l}{ct} - 1 \right) \right) \quad (9)$$

$$T(t, 0) = \frac{A}{\pi} \left(\pi - 2 \arccos \left(\frac{l}{ct} \right) \right) \quad (10)$$

Обозначим $\varepsilon = \frac{l}{ct}$.

$$T(t, 0) = 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{3\varepsilon^5}{20} + O(\varepsilon^7) \quad (11)$$

$$T(t, -l + ct) = T(t, l - ct) = 2\sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3\varepsilon^{\frac{5}{2}}}{20} + O\left(\varepsilon^{\frac{7}{2}}\right) \quad (12)$$

Таким образом:

$$T(t, -l + ct) = T(t, l - ct) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{\varepsilon} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad T(t, 0) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} 2\varepsilon \sim \frac{1}{t} \quad (13)$$

Получим огибающие кривые для точек $x = l - ct$ и $x = -l + ct$, рис.3:

$$T\left(\frac{x+l}{c}, x\right) = \frac{A}{\pi} \left(\pi - \arccos\left(\frac{2l}{x+l} - 1\right) \right) \quad (14)$$

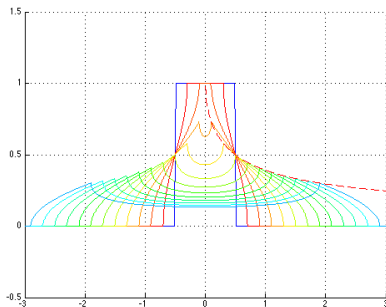


Рис. 3 : Распространение тепла для начальных условий описанных в (1) и огибающие кривые.

Треугольный импульс

Рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Ax, & x \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Найдем распространения температуры для начального распределения $f(x)$:

$$T(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-t}^t \frac{f(x - c\tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau. \quad (16)$$

Решение

Используется метод, описанный в [1]. Т.к. распространения возмущения происходит со скоростью c , рассматриваем x на промежутках:

$$x \in [-\infty; -ct] : x - ct < 0, f = 0; \quad (17)$$

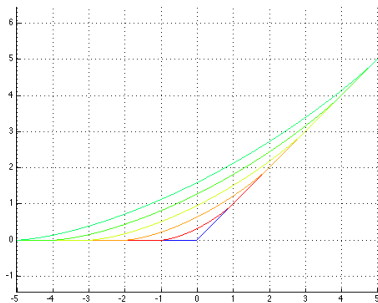
$$x \in [-ct; ct] : x - ct <> 0, f = \begin{cases} 0, \tau < \frac{x}{c}; \\ Ax, \tau > \frac{x}{c}; \end{cases} \quad (18)$$

$$x \in [ct; \infty] : x - ct > 0, f = Ax. \quad (19)$$

Можно записать:

$$T(t, x) = \xi(t, x) = \begin{cases} 0, x < -ct; \\ Ax \left(\frac{1}{\pi} \arcsin x + \frac{1}{2} \right) + \frac{A}{\pi} \sqrt{t^2 c^2 - x^2}, x < |ct|; \\ Ax, x > ct. \end{cases} \quad (20)$$

На рис.4 приведено распространения тепла заданного начальным распределением (15)



Решение для треугольного импульса

Решение для треугольного импульса представляется через функцию (15) следующим образом:

$$T_0 = f(x + l) - f(x) - (f(x) - f(x - l)). \quad (21)$$

На основании (2), решение записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 T(t, x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-t}^t \frac{f(x + 2) - f(x) - (f(x) - f(x - 2))}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau \quad (22) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-t}^t \frac{f(x + 2)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-t}^t \frac{f(x - 2)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau - \frac{2}{\pi} \int_{-t}^t \frac{f(x)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Используя (20), решение запишется в виде:

$$T(t, x) = \xi(t, x - l) - \xi(t, x) + \xi(t, x + l). \quad (24)$$

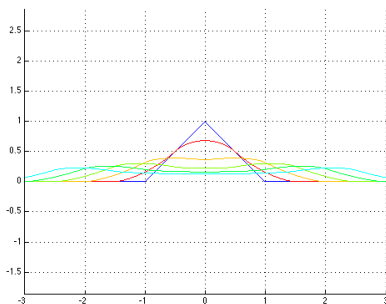


Рис. 5 : Решение для начального возмущения вида (15)

Затухание произвольного ограниченного импульса

Рассмотрим произвольный ограниченный симметричный импульс следующего вида:

$$T_0 = \begin{cases} 0, & x < -a; \\ \Phi(x), & -a < x < a; \\ 0, & x > a. \end{cases} \quad (25)$$

Рассматриваются большие значения t . $\Phi(x)$ — ограничена, четная. Рассмотрим $x \ll ct$. Тогда $T_0(x - c\tau) \sim T_0(-c\tau)$. $a \ll ct$. Тогда уравнение (2) запишется в следующем виде:

$$T(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-t}^t \frac{T_0(x - c\tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau \sim \frac{1}{\pi} \int_{-t}^t \frac{T_0(-c\tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau. \quad (26)$$

При $t \gg 1$ и $\tau \ll 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} \sim \frac{1}{t} \quad (27)$$

Тогда уравнение (26) запишется:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-t}^t \frac{T_0(-c\tau)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau \sim \frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \int_0^t T_0(-c\tau) d\tau. \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t T_0(-c\tau) d\tau &= \int_0^{\frac{a}{c}} T_0(-c\tau) d\tau + \int_{\frac{a}{c}}^t T_0(-c\tau) d\tau = \int_0^{\frac{a}{c}} T_0(-c\tau) d\tau = \\ &= c \int_0^a T_0(-c\tau) d(-c\tau) \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом $\int_0^t T_0(-c\tau) d\tau$ не зависит от t .

$$\int_0^t T_0(-c\tau) d\tau = c \int_0^a T_0(\xi) d(\xi). \quad (30)$$

Таким образом:

$$T(t, x) \sim \frac{1}{t} \quad (31)$$



А.М. Кривцов.

Стохастические уравнения неоднородной динамики
одномерного кристалла [Неопубликовано].

2015.