Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра Теоретической механики

Динамическое исследование аневризмы аорты

А. С. Гнездилова, выпуск 2015 года
научный руководитель
проф. дфмн. А. В. Порубов

- Исследована эволюция нелинейных локализованных волн в аорте;
- Получено модельное уравнение для поперечных волн деформации пульсовой волны в стенке аорты;
- Проведено численное исследование распространения локализованной волны деформации вдоль аорты с неоднородностями;
- Установлены основные качественные и количественные изменения в поведении волны при прохождении неоднородности;
- Исследована возможность использования нелинейных локализованных волн для акустодиагностики неоднородностей в стенке аорты.

Основная система уравнений:

Уравнение движение для жидкости внутри аорты в форме уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Уравнение неразрывности с учетом переменного радиуса для площади поперечного сечения трубки $S(x,t) = \pi\,(R+u)^2$

$$u_t + v(R+u)_x + \frac{1}{2}(R+u)v_x = 0$$

Уравнение движения для сдвиговых волн для описания деформационных процессов в стенке для внешнего радиального напряжения $\sigma_r = E\frac{u}{R}\left(1 + a\frac{u}{R}\right)$

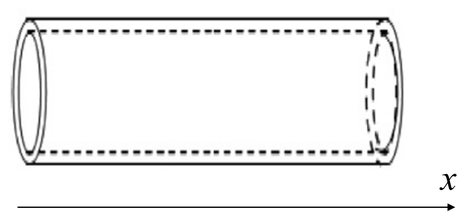
$$\rho_0 H\frac{\partial^2(R+u)}{\partial t^2} = (P - P_0) - \frac{h}{(R+u)}\sigma_r$$

Обозначения:

$V(x,t)$ – скорости потока жидкости вдоль оси трубки, ρ - постоянная плотность жидкости, x – координата вдоль оси трубки, t – время, $p(x,t)$ – давление жидкости, $u(x,t)$ – радиальное упругое смещение стенки трубки, $R=R(x)$ - радиус трубки, E - модуль Юнга, a - параметр, характеризующий нелинейную упругость, P - внешнее давление, P_0 - атмосферное давление, ρ_0- плотность материала стенки, h и H - константы, пропорциональны толщине стенки, учитывающие ее тканевую структуру, a_1 и c_1 комбинации коэффициентов, характеризующие упругие свойства стенки, β - свободный параметр.

Модель:

- Аорта - цилиндрическая упругая тонкостенная трубка;
- Кровь внутри аорты - идеальная несжимаемая жидкость;



- Для простоты рассматривается одномерная постановка задачи на основании ранее разработанной модели (Yomosa, 1987).

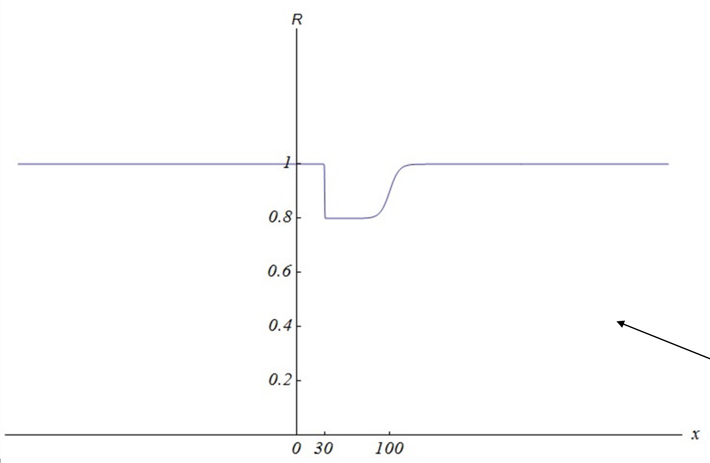
Численное исследование эволюции локализованной в волны в аорте

Начальное условие:

$$u[x] = 6\frac{c_1}{a}\frac{1}{1-4\beta^2 c_1}\beta^2\mathrm{Sech}[\beta x]^2$$

Кусочно-непрерывная функция для задания неоднородностей стенки:

$$R[x] = c_{11} + (c_{21} - c_{11})(Tanh[k_m(x - x_{11})] - Tanh[k_n(x - x_{12})])$$



где c_{11}, c_{21} – размеры изменения глубины неоднородности, x_{11}, x_{12} – размеры изменения длины неоднородности, k_n, k_m – крутизна заднего и переднего фронта неоднородности соответственно.

Пример профиля неоднородности в трубке

Модельное уравнение в виде модифицированного уравнения Буссинеска с переменными коэффициентами:

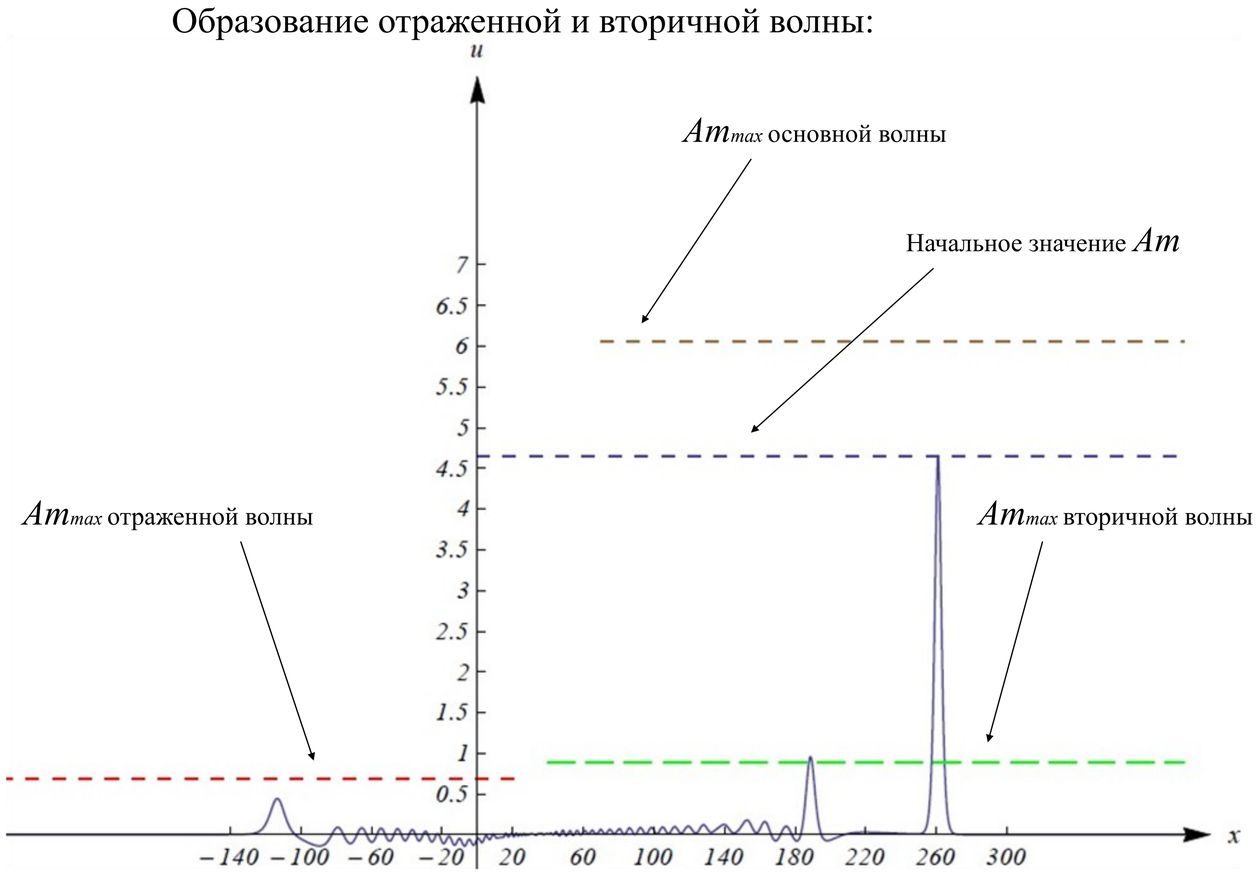
$$u_{tt} - \frac{Eh_0}{2\rho_0 R}u_{xx} - \frac{1}{4}\frac{Eh_0}{\rho_0 R^2}(2a-3)(u^2)_{xx} - \frac{H_0 R}{2}u_{xxtt} = 0$$

Точное решение в виде бегущей уединенной волны:

$$u[x,t] = 6\frac{c_1}{a_1}\frac{1}{1-4\beta^2 c_1}\beta^2\mathrm{Sech}\left[\beta\left(x - \sqrt{\frac{1}{1-4\beta^2 c_1}}\,t\right)\right]^2$$

Поведение локализованной уединенной волны в трубке с наличием неоднородности

Образование отраженной и вторичной волны:



Поведение волны деформации при $t = 150$

Основные элементы частного точного решения:

Амплитуда

$$\mathrm{Am} = \frac{6c_1\beta^2}{a_1(1-4c_1\beta^2)}$$

Скорость

$$v = \sqrt{\frac{1}{1-4\beta^2 c_1}}$$

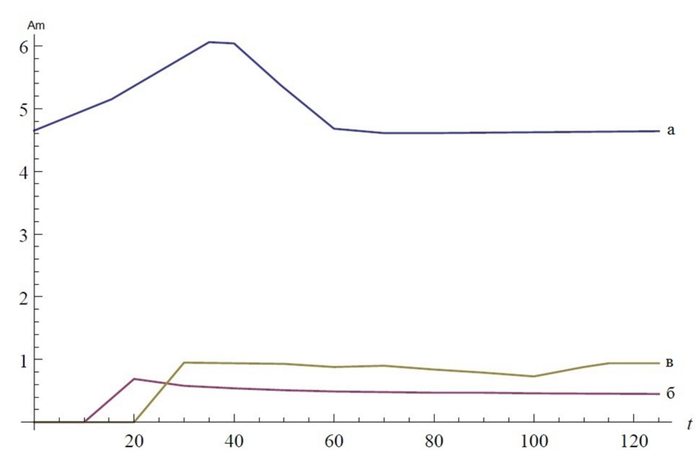


График зависимости амплитуды от времени при моделировании волны деформации в трубке с наличием неоднородности:
а – для основной волны, б – для отраженной волны, в – для вторичной волны.