

# «Волны в анизотропных редуцированных средах Коссера специального типа»

студент: Александр Рубцов (гр.5040103/00201),  
руководитель: к.ф-м.н. Елена Фёдоровна Грекова

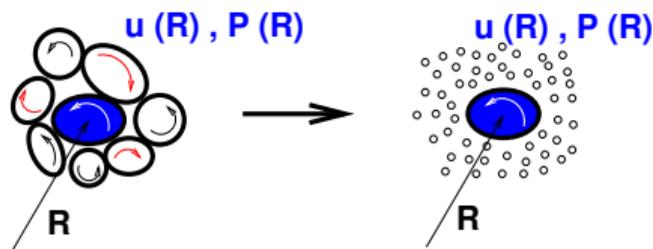
Каф."Теоретическая механика"  
Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

15 июня 2022 г.

- 1 Введение
- 2 Основные понятия
- 3 Редуцированная среда Коссера с анизотропной перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями
- 4 Материал с трансверсально-изотропной перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями
- 5 Особенности порошков стали и магнетита
- 6 Эксперимент (Ruíz Botello, Tournat, Castellanos, 2016, Ultrasonics)
- 7 Результаты эксперимента для магнетита
- 8 Результаты эксперимента для стали
- 9 Плоские волны
- 10 Плоские волны
- 11 Продольная волна. Случай  $n \parallel k$
- 12 Продольная волна. Случай  $n \parallel k, \xi = 1$  (Графики)
- 13 Смешанная волна. Случай  $n \cdot k = 0$
- 14 Смешанная волна. Случай  $n \cdot k = 0$  (Графики)
- 15 Экспериментальные данные
- 16 Возможное применение среды Коссера с анизотропной перевязкой как модели для описания эксперимента

# Введение

**Редуцированная среда Коссера** — среда, чьи тела-точки обладают вращательными степенями свободы



...но усилия в среде не совершают работу на градиенте угловых скоростей.

$$U = U(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}, \mathbf{P}, \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{P})$$

$$U = U(\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}, \mathbf{P})$$

**Моментных напряжений нет**, но тензор силовых напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  асимметричен. При нулевых внешних нагрузках:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\tau}_{\times} = \rho I \ddot{\boldsymbol{\theta}}.$$

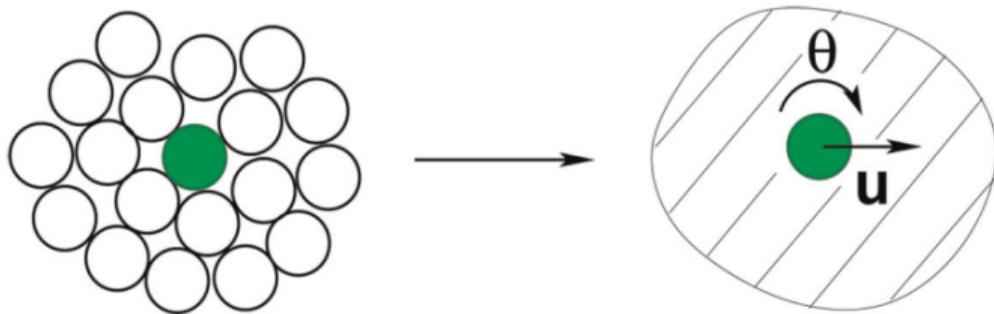
$\mathbf{u}$  — перемещение,  $\boldsymbol{\theta}$  — вектор малого поворота,  $\rho$  — плотность,  $\rho I$  — плотность момента инерции

Эжен и Франсуа Коссера (1909) — полная среда Коссера. Шварц, Джонсон и Фенг (1985) — изотропная упругая линейная редуцированная среда Коссера (грунт, сыпучая среда)

## Основные понятия

**Классическая среда:** континуум, состоящий из массовых точек.

**Среда Коссера:** континуум, состоящий из бесконечно малых твердых тел. В каждой точке есть два поля: смещение  $\mathbf{u}$  и тензор вращения  $\mathbf{P}$ , такой, что  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_k = \mathbf{D}_k$ . Где  $\mathbf{d}_k$  - базисные векторы в отчетной конфигурации, а  $\mathbf{D}_k$  - базисные векторы в актуальной конфигурации. Средами Коссера являются, например, композиты, находящиеся под нагрузкой, которая вызывает вращение достаточно жестких зерен, или гетерогенные материалы с зернистой структурой.

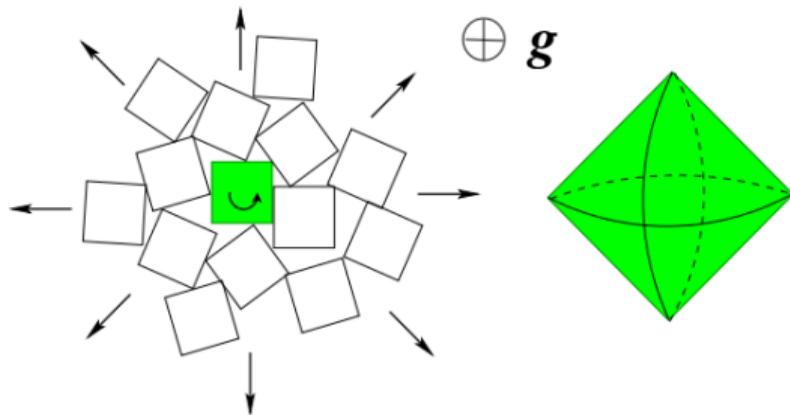


# Редуцированная среда Коссера с анизотропной перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями

Определяющие уравнения

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \cdot \nabla \mathbf{u}^S + \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}) + 2 \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \cdot (\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}) + \nabla \mathbf{u}^S \cdot \cdot \mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \times \mathbf{E} \quad (1)$$

Для анизотропных материалов упругий аксиальный тензор 3 ранга  $\mathbf{S}_k \mathbf{n}^k \neq 0$ . Для изотропных материалов этот член исчезает.



Редуцированная среда Коссера с анизотропной перевязкой между поворотными и трансляционными деформациями

## Материал с трансверсально-изотропной перевязкой между трансляционными и поворотными деформациями

При моделировании различных сыпучих и блоковых сред, грунтов с неоднородностями особый интерес представляет теория, в которой тензоры  $\mathbf{C}$  и  $\boldsymbol{\alpha}$  являются изотропными, однако существует анизотропная перевязка между трансляционными и поворотно-вихревыми деформациями, за которую отвечает тензор упругих постоянных  $\mathbf{S}_k \mathbf{n}_k$

Изотропный тензор четвертого ранга

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E} \mathbf{E} + 2\mu (i_m i_n)^S (i^m i^n)^S \quad (2)$$

Изотропный тензор второго ранга

$$\boldsymbol{\alpha} = 4\alpha \mathbf{E} \quad (3)$$

Трансверсально-изотропная перевязка ( $\mathbf{n} = n\hat{\mathbf{n}}$ ,  $|\hat{\mathbf{n}}| = 1$ ):

$$\mathbf{S}_k \mathbf{n}_k = n(\mathbf{E} + \xi \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \quad (4)$$

Перевязка такого вида в этой среде рассматривается впервые. Ранее был рассмотрен случай  $\xi = 0$ .

## Особенности порошков стали и магнетита

Параметры для стальных шариков:

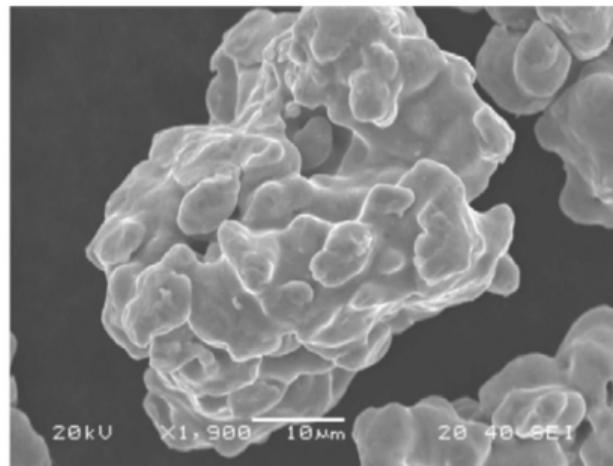
плотность частиц  $\rho_p = 7.92 \text{ гр/см}^3$ , размеры  $d_p = 110, 50, 35 \text{ мкм}$ .

Параметры для шариков магнетита:

плотность частиц  $\rho_p = 5.06 \text{ гр/см}^3$ , размеры  $d_p = 60, 50, 35 \text{ мкм}$ .



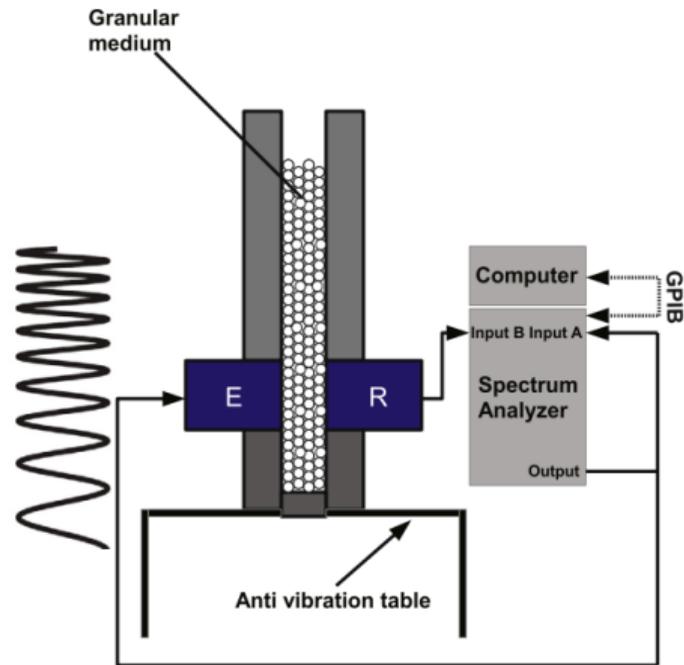
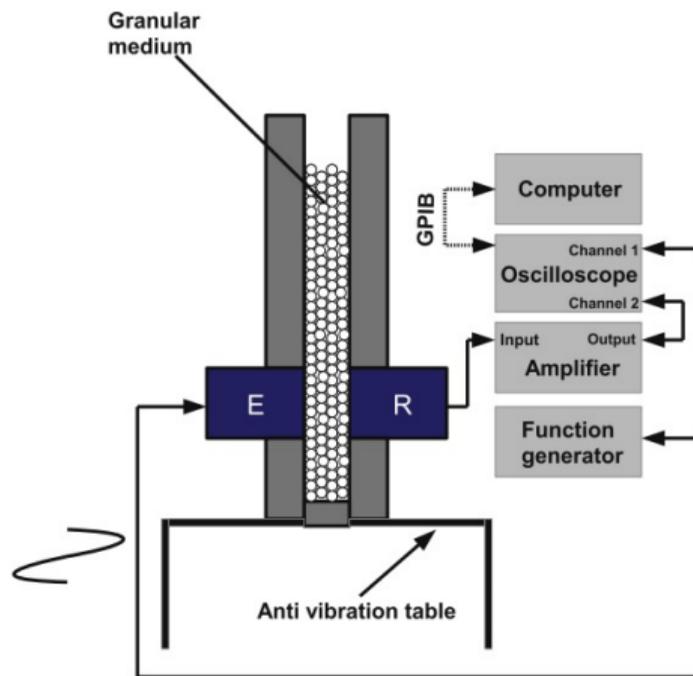
(a)



(b)

*Снимки, полученные с помощью сканирующего электронного микроскопа (SEM):  
частицы магнетита (a) и стали (b) размером порядка 35 мкм.*

# Эксперимент (Ruíz Botello, Tournat, Castellanos, 2016, Ultrasonics)

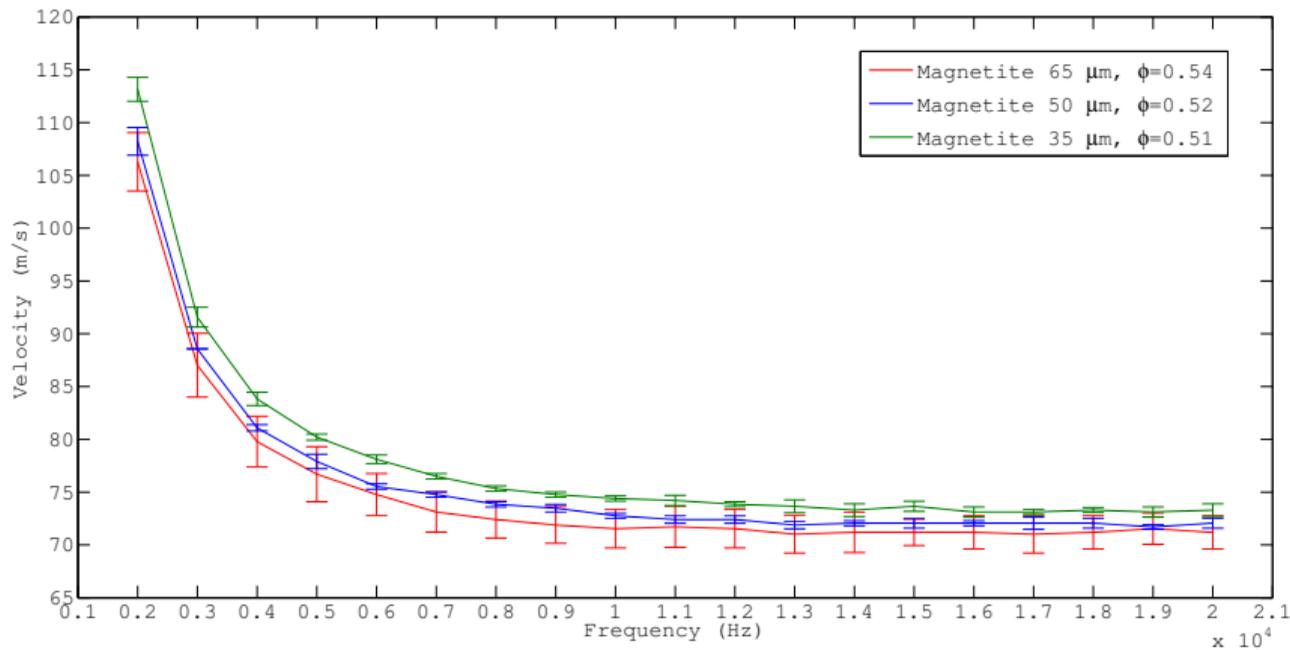


Экспериментальная установка для измерения времени прохождения волны (TOF).

'E' - излучающий преобразователь, а 'R' - принимающий микрофон

# Результаты эксперимента для магнетита

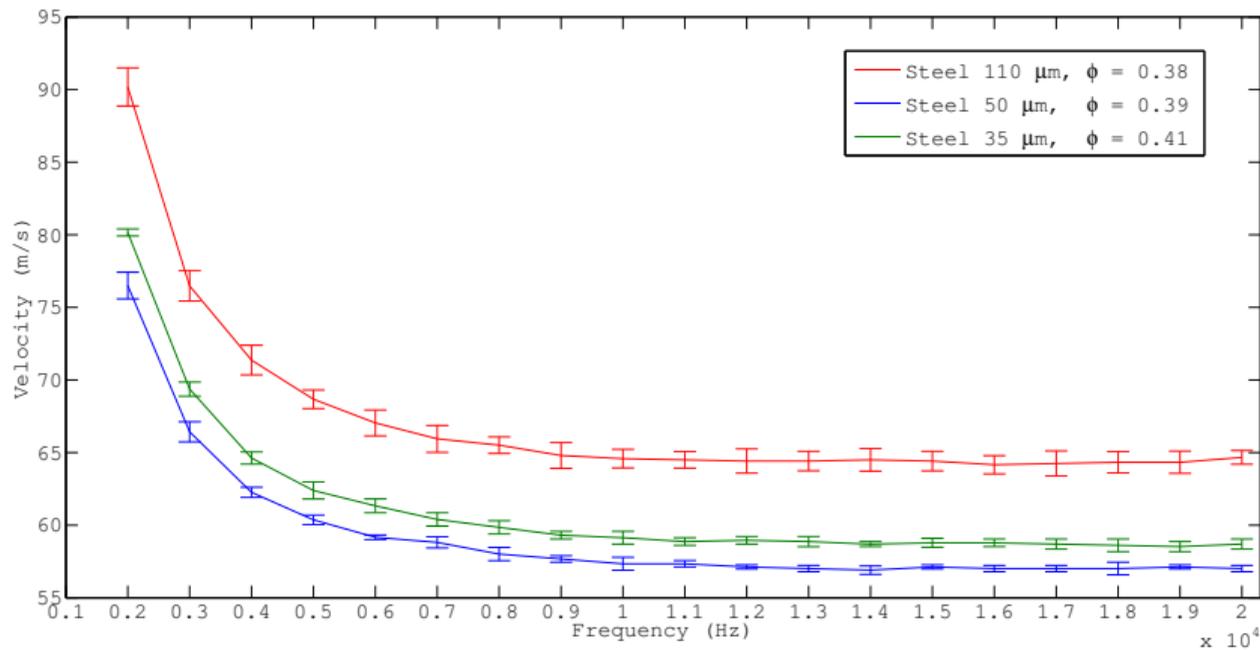
Такая дисперсия не наблюдается в классической среде



*Скорость продольной волны в порошках магнетита как функция центральной частоты импульса (метод TOF).*

## Результаты эксперимента для стали

Такая дисперсия не наблюдается в классической среде



*Скорость продольной волны в порошках стали как функция центральной частоты импульса (метод TOF).*

Уравнения в перемещениях:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - (\mu + \alpha)\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times \boldsymbol{\theta} \\ & - \mathbf{n} \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u} + \xi \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{u}) + 2\nabla(\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \frac{\mathbf{u}}{2})) \\ & + 2\xi \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla(\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \frac{\mathbf{u}}{2}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (5) \end{aligned}$$

$$-4\alpha\boldsymbol{\theta} + 2\alpha\nabla \times \mathbf{u} - 2\mathbf{n}\nabla \cdot \mathbf{u} - 2\xi \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho I_0 \ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  - постоянные Ламе,  $\alpha$  - упругий модуль Коссера (характеризует сопротивление вращению). Внешние нагрузки отсутствуют.

## Общая спектральная задача

$$\begin{aligned}
 & -(\lambda + 2\mu)k^2 \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} + (\mu + \alpha)k^2 \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}) + 2ik\alpha \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\theta} \\
 & \quad + k^2 \mathbf{n} \times \hat{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} + \xi \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \mathbf{u}) + 2ik \hat{\mathbf{k}} (\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\theta} - ik \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\mathbf{u}}{2})) \\
 & \quad \quad \quad + 2ik \xi \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}} (\boldsymbol{\theta} - ik \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\mathbf{u}}{2}) = -\omega^2 \rho \mathbf{u} \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$-4\alpha \boldsymbol{\theta} + 2ik\alpha \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} - 2ikn \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u} - 2ik\xi \hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{k}} \mathbf{u} = -\omega^2 \rho I_0 \boldsymbol{\theta} \quad (8)$$

Рассматривается два случая распространения волны: вдоль оси симметрии и перпендикулярно ей.

## Продольная волна. Случай $n \parallel k$

### Дисперсионные соотношения

Волна сдвига  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$

$$c_{s\alpha}^2 k^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (9)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{\alpha}{\mu + \alpha} \quad (10)$$

Продольная волна  $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \hat{\mathbf{k}}$

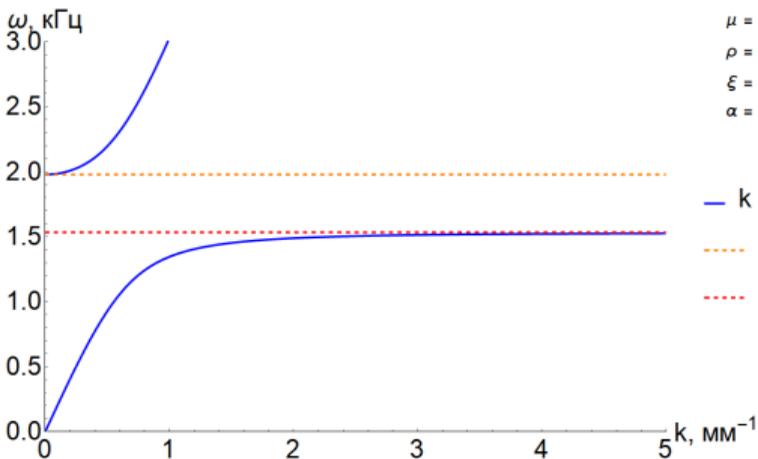
$$c_p^2 k^2 = \omega^2 \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_{1p}^2} \quad (11)$$

$$\omega_{1p}^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{(1 + \xi)^2 n^2}{4\alpha(\lambda + 2\mu)} \right) \quad (12)$$

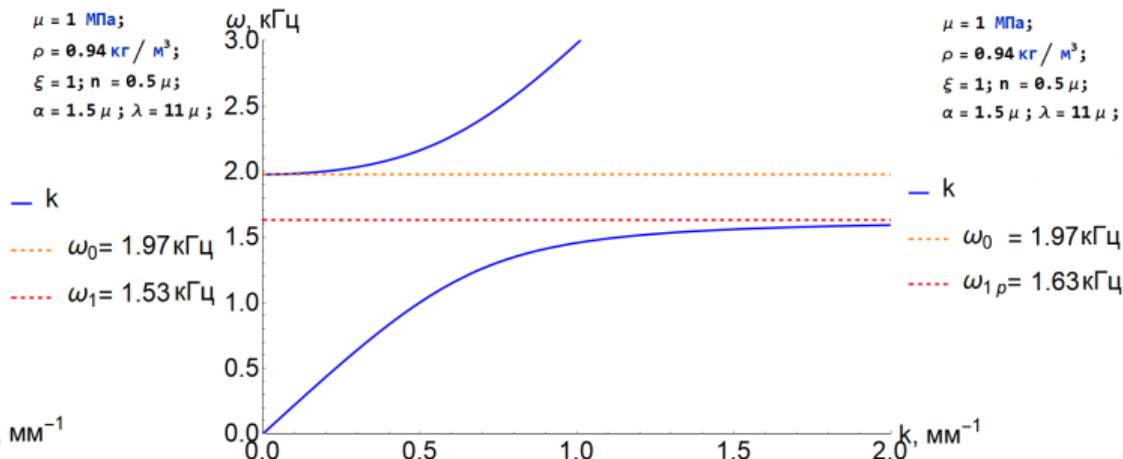
где  $c_{s\alpha}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}$ ,  $c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$

# Продольная волна. Случай $n \parallel k$ , $\xi = 1$ (Графики)

## Дисперсионные кривые



Волна сдвига  $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ .



Продольная волна  $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \hat{\mathbf{k}}$

## Смешанная волна. Случай $n \cdot k = 0$

### Дисперсионные соотношения

Смешанная волна

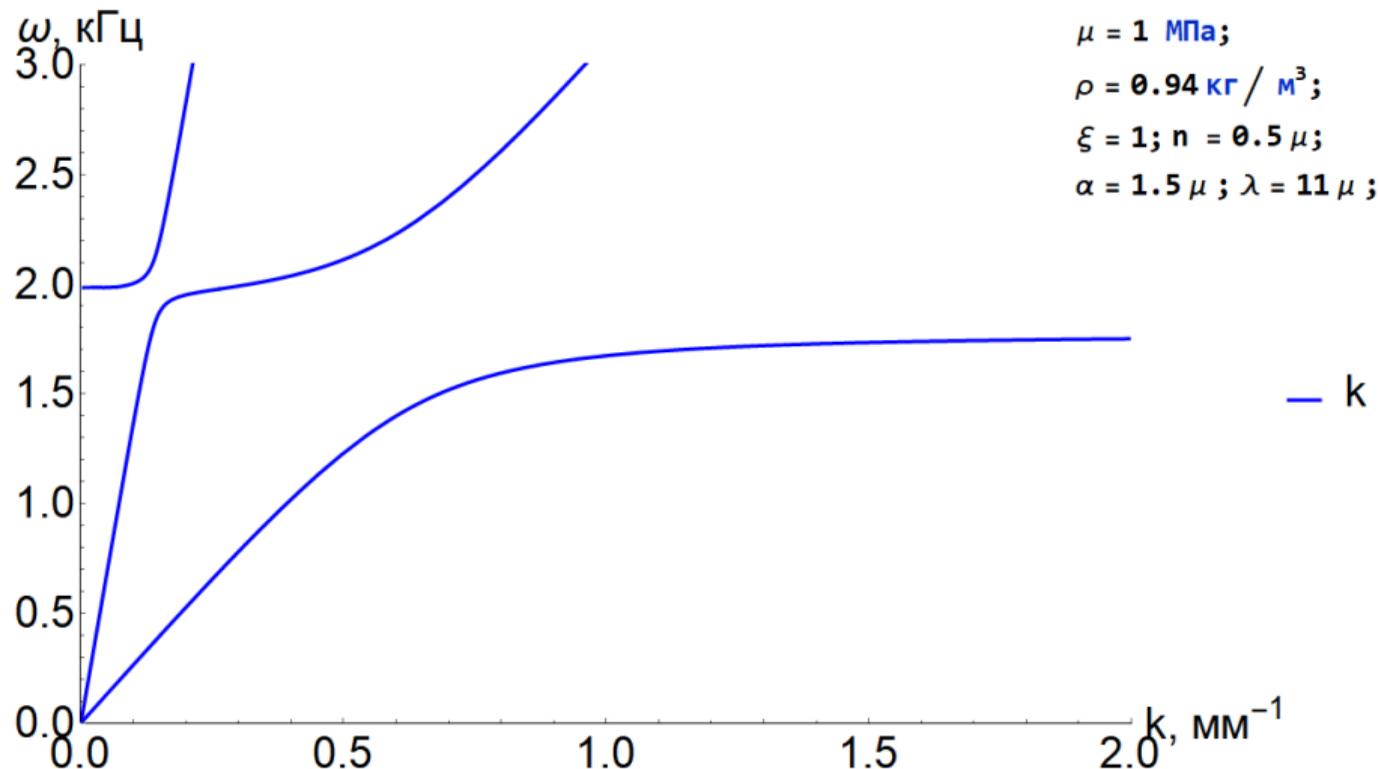
$$\mathbf{k}_{\pm}^2 = \frac{\omega^2/2}{c_l^2 c_s^2 + \left(\frac{c_l^2 \alpha}{\rho} + \frac{c_s^2 n^2}{\alpha \rho}\right) \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}} \left( c_s^2 + c_l^2 + \frac{\alpha^2 + n^2}{\alpha \rho} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \pm \sqrt{\left( c_l^2 - c_s^2 + \frac{n^2 - \alpha^2}{\alpha \rho} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2 + 4 \frac{n^2}{\rho^2} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (13)$$

где  $c_l^2/c_p^2 = 1 - n^2/(\alpha(\lambda + 2\mu))$

Дисперсионное соотношение не зависит от  $\xi$ . Случай  $\xi = 0$  рассмотрен в Grekova, 2016, Mathematics and Mechanics of Solids.

# Смешанная волна. Случай $n \cdot k = 0$ (Графики)

## Дисперсионные кривые

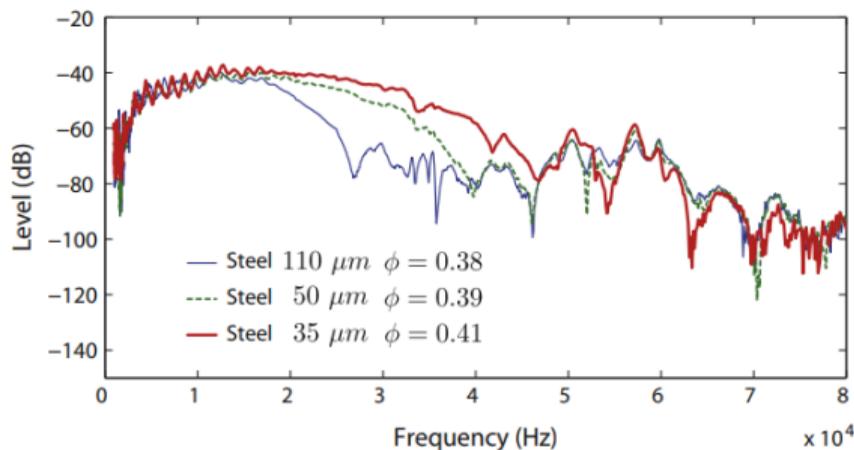


Дисперсионная кривая для случая смешанной волны,  $n \cdot k = 0$

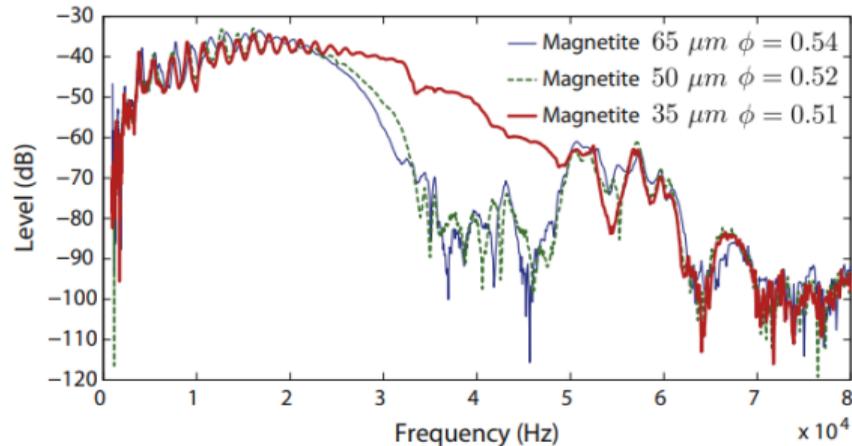
## Экспериментальные данные

Для более когезивного порошка волна лучше проходит на высоких частотах.

Гипотеза: в эксперименте измеряется продольная компонента смешанной волны, оптическая ветвь  $\omega > \omega_0$ . Передаточная функция аппарата не приведена в статье.



Функция частотной характеристики  
стальных порошковых образцов толщиной 2 см



Функция частотной характеристики  
магнитных порошковых образцов толщиной 2 см

## Возможное применение среды Коссера с анизотропной перевязкой как модели для описания эксперимента

При  $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$  измеряемая передаточная функция для продольной компоненты приходящего первым на малых временах сигнала будет вычисляться по формуле

$$20 \lg \left| \sin\left(\frac{1}{2} \arctan \frac{2\omega^2 n}{(\lambda + \mu - \alpha)\omega^2 - (\lambda + \mu - n^2/\alpha)\omega_0^2}\right) \right| \quad (14)$$

Оценка для момента инерции

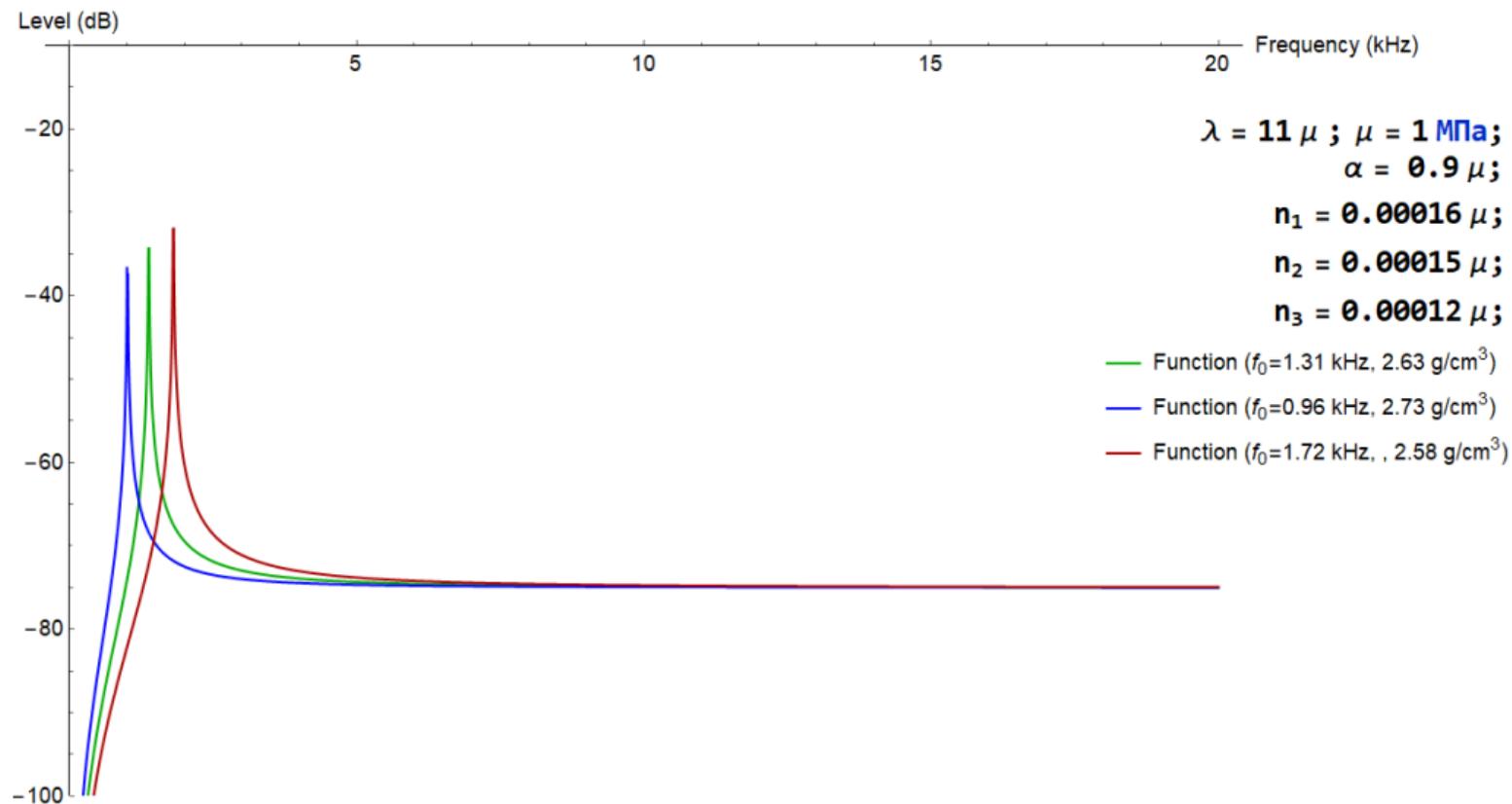
$$I > 4 \frac{\alpha}{\mu} \frac{c_s^2}{(2f_0\pi)^2} \quad (15)$$

Для порошков магнетита:  $f_0 = 1.31$  кГц,  $f_0 = 0.96$  кГц,  $f_0 = 1.72$  кГц,  
 $\sqrt{I} = 0.47$  мм,  $\sqrt{I} = 0.63$  мм,  $\sqrt{I} = 0.36$  мм соответственно.

Для порошков стали:  $f_0 = 1.44$  кГц,  $f_0 = 1.29$  кГц,  $f_0 = 1.91$  кГц,  
 $\sqrt{I} = 0.38$  мм,  $\sqrt{I} = 0.44$  мм,  $\sqrt{I} = 0.31$  мм соответственно.

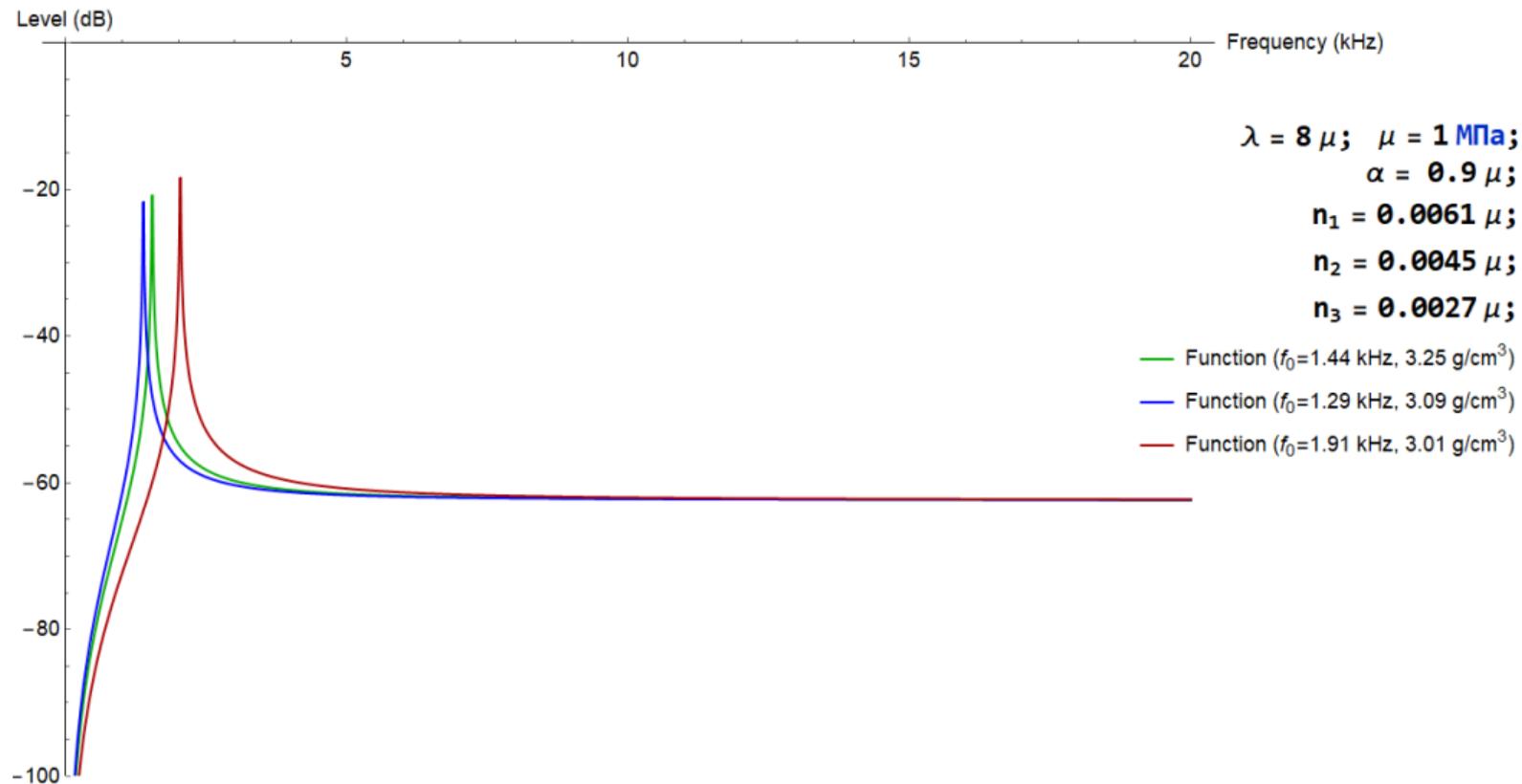
Получены хорошо описывающие эксперимент результаты с параметрами, которые дают оценку характерного радиуса агрегатов  $\sqrt{I} \sim 1$  мм.

## Сравнение с экспериментальными данными для магнетита



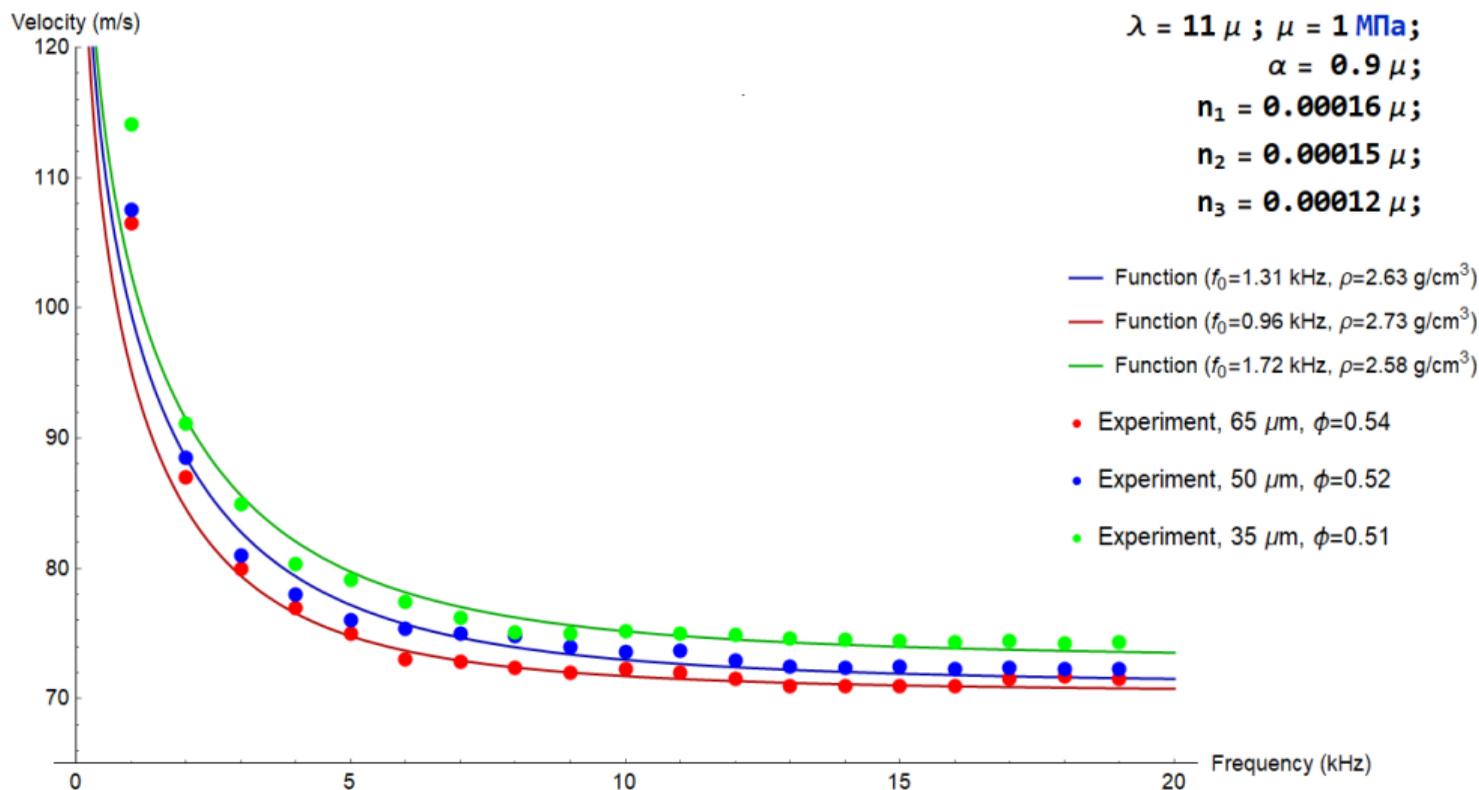
*Передаточная функция продольной компоненты для порошков магнетита*

# Сравнение с экспериментальными данными для стали



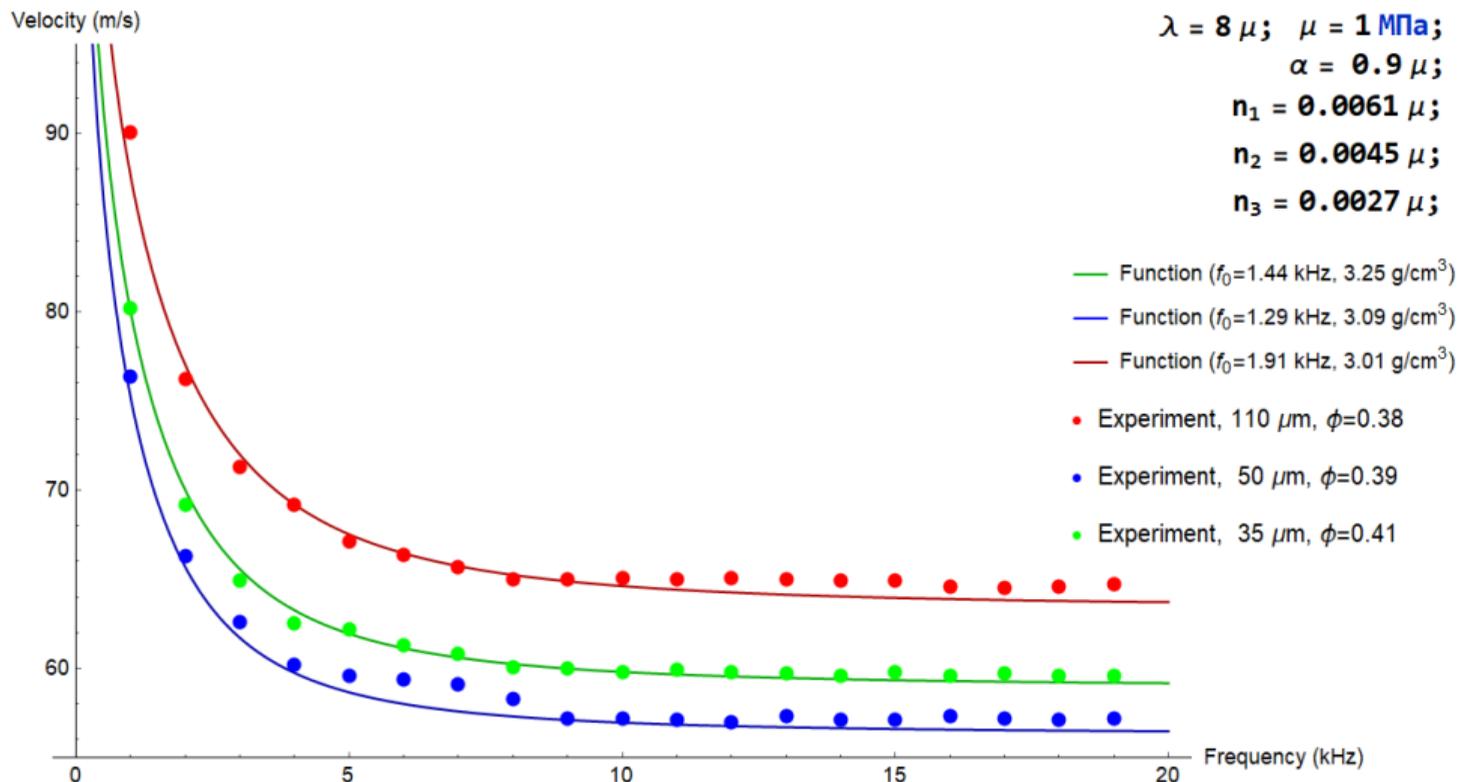
*Передаточная функция продольной компоненты для порошков стали*

# Сравнение с экспериментальными данными для магнетита



Скорость продольной компоненты волны в порошках магнетита как функция центральной частоты импульса (метод TOF).

# Сравнение с экспериментальными данными для стали



Скорость продольной компоненты волны в порошках стали как функция центральной частоты импульса (метод TOF).

## Заключение

### В результате выполнения работы

- Получены аналитически дисперсионные соотношения для продольной волны в среде с трансверсально-изотропной перевязкой в случае, когда волна распространяется вдоль оси симметрии. Эта волна обладает дисперсией и имеет запрещенную зону, подобно волне сдвига в изотропной редуцированной среде Коссера и продольной волне в среде с трансверсально-изотропной перевязкой более частного вида;
- Получены аналитически дисперсионные соотношения для смешанной волны в случае, когда волна распространяется ортогонально оси симметрии. В данном случае соотношение совпадает со случаем  $\xi = 0$ , то есть перевязка сдвиговой деформации и ротационной не играет роли;
- Для эксперимента особый интерес представляет случай смешанной волны при  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ , так как симметрия связана с наличием силы тяжести. Если предположить, что в эксперименте измеряется продольная компонента перемещения смешанной волны в порошках, которые можно моделировать редуцированной упругой линейной средой Коссера с трансверсально-изотропной перевязкой, удастся подобрать параметры, хорошо описывающие зависимость фазовой скорости от частоты и качественно — характер передаточной функции.