**Слиньков А. С. Гр 2042/2**

**Задание И1. Основное уравнения динамики относительного движения точки. Теорема о движении центра масс системы.**

**Дано:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m (к*г*) | R(м) | 𝛼 (град) | 𝛾 (к*г*/м) | $\dot{φ}$ (c-1) | *x*0 (м) | $\dot{x}\_{0}$ (м/с) | $M\_{z}$ (нм) | $x(t)$ (м/с) |
| 18 | 5 | 45 | 4 | -2 | 3 | 2 | -3t3-3 | 4+4t2 |

**x Фе**

 **y**

Ur

 **Фс**

R

α

x

h

β

P

O

ω

 φ

Z,ϖ

1. Составляем уравнение динамики относительного движения точки

$mw\_{r}=mg+N+Φ\_{е}+Φ\_{с}$(1.1)

Центробежная сила инерции $Φ\_{е}$ всегда направлена от оси вращения тела. Ее модуль равен

$$Ф\_{е}=mw\_{e}=mω^{2}h;$$

Сила Кориолиса $Φ\_{с}=-2ω×V\_{r}$ **Фс=-2ω x Ur m**

Проекция **Фсy**

**Фсy=2m**$\dot{φ}$$\dot{x}$ <0

поскольку $\dot{x}>0$ (точка вылетает), а $\dot{φ}<0$.

 Проектируя уравнение (1.1) на ось *х*, получаем дифференциальное уравнение относительного движения точки

$$m\ddot{x}=Ф\_{е}Cosβ=mω^{2}hCosβ=mω^{2}(x-\left(R-Rcosα\right)=mω^{2}(x-R+Rcosα)$$

$$\ddot{x}=ω^{2}(x-R+Rcosα)$$

$$\ddot{x}-ω^{2}x=RCosα-R или \ddot{x}-4x=5\frac{\sqrt{2}}{2}-5=-1.464 (1.2)$$

1. Положение относительного равновесия находится в точке, где ускорение равно нулю. Это точка Р с координатой

$$x=x^{0}=x-( x-\left(R-Rcosα\right)=R-Rcosα=5-5\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Очевидно, что при $x\_{0}>x^{0}$ и $\dot{x}\_{0}>0$ точка будет удаляться от начала О координаты $x$. При $x\_{0}<x^{0}$ и $\dot{x}\_{0}<0$ точка будет приближаться к началу О координаты х. При заданных начальных условиях точка движется в направлении оси х.

1. Найдем закон относительного движения и скорости точки. Это обратная задача динамики. Решение неоднородного уравнения (1.1) ищем в виде

$$x=x\_{oo}+x\_{ч}$$

Решение однородного уравнения $x\_{oo}$ ищем в виде

$$x\_{oo}=e^{λt}; $$

Подставляя решение в однородное уравнение, приходим к характеристическому уравнению с вещественными корнями

$$ λ^{2}-ω^{2}=0; λ\_{1,2}=\pm ω; $$

Решение принимает вид

$$ x\_{oo}=C\_{1}e^{ωt}+C\_{2}e^{-ωt}$$

Частное решение $x\_{ч}$ ищем в виде правой части, т.е. постоянной

$$-ω^{2}x\_{ч}=ω^{2}\left(R-Rcosα\right); x\_{ч}=\left(R-Rcosα\right) $$

Полное решение уравнения (1.1)

$x=C\_{1}e^{ωt}+C\_{2}e^{-ωt}+ R-Rcosα; \dot{x}=ωC\_{1}e^{ωt}-ωC\_{2}e^{-ωt}$(1.3)

Постоянные $C\_{1} C\_{2}$ в (1.3) находим из начальных условий

$t=0: x\_{0}=3 м; \dot{x}\_{0}=2 м/с $(1.4)

Подставив (1.4) в (1.3), получим:

$$x\_{0}=C\_{1}+C\_{2}+ R-Rcosα; \dot{x}\_{0}=ω(C\_{1}-C\_{2})$$

Иначе

$$\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}+C\_{2}=C\_{1} x\_{0}=\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}+2C\_{2}+R-Rcosα ; $$

$$x\_{0}+\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}+R-Rcosα=2C\_{1} x\_{0}-\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}+R-Rcosα=2C\_{2} ; $$

Решение приобретает вид

$$x=(x\_{0}-\left(R-Rcosα\right))\frac{1}{2}\left(e^{ωt}+e^{-ωt}\right)+\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}\frac{1}{2}\left(e^{ωt}-e^{-ωt}\right)=(x\_{0}-\left(R-Rcosα\right))chωt+\frac{\dot{x}\_{0}}{ω}shωt$$

С учетом начальных условий (1.4)

$$x=(3-\left(5-5\frac{\sqrt{2}}{2}\right)ch\left(2t\right)-sh\left(2t\right)=1,53ch\left(2t\right)-sh\left(2t\right); $$

$ \dot{x}=3sh\left(2t\right)-2ch(2t)$ (1.5)

1. Найдем скорость точки в момент, когда она покидает тело. Можно было бы и закона движения определить соответствующий момент времени и подставить его в закон изменения скорости. Но проще найти зависимость скорости точки от ее перемещения известной заменой

$$\ddot{x}=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

 Которая фактически приводит к теореме об изменении кинетической энергии точки.

Получаем

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}=ω^{2}x-ω^{2}\left(R-Rcosα\right); или \dot{x}d\dot{x}=\left(ω^{2}x-ω^{2}\left(R-Rcosα\right)\right)dx$$

Интегрируя, находим зависимость относительной скорости точки от ее перемещения

$\dot{x}^{2}=ω^{2}x(x-2\left(R-Rcosα\right))+C\_{3}$ (1.6)

Из начальных условий (1.4) находим

$$C\_{3}=\dot{x}\_{0}^{2}+ω^{2}x\_{0}\left(2(R-RCosα)-x\_{0}\right)=4+12\left(2,9-3\right)=5,2 м^{2}/с^{2}$$

Находим скорость при $x\_{1}=2a=4м$

$$\dot{x}\_{1}=\sqrt{12\left(10-2(2,9)\right)+5,2}=7,46 м/с$$

1. Найдем закон изменения реакции тела на точку. Это прямая задача динамики. Проекция уравнения (1.1) на ось z:

$$0=N\_{z}-mg; $$

дает проекцию реакции стержня на ось z

$$ N\_{z}=mg (1.7)$$

Проектируя уравнение (1.1) на ось у, находим:

$$0=N\_{y}+Ф\_{е}Sinβ+Ф\_{сy}; $$

Теперь проекция нормальной реакции стержня на ось у равна

$$ N\_{y}=2m\dot{φ}\dot{x}-m\dot{φ}^{2}hSinβ=m\dot{φ}\left(2\dot{x}-\dot{φ}RSinα\right)=18\*\left(-2\right)\*\left(2\dot{x}+7\right)=-36\left(2\dot{x}+7\right) н (1.8)$$

$N\_{y}$ зависит от найденной относительной скорости точки (1.5).

В момент, когда точка покидает тело

$$N\_{z}=mg=176,4 н; $$

$ N\_{y}=m\dot{φ}\left(2\dot{x}\_{1}-\dot{φ}RSinα\right)|\_{x=x\_{1}}=-36\left(2\*2+7\right)=-396 н$ (1.9)

1. Составляющие реакции шарнира на вылете **R** найдем по известным ускорениям тела и точки из теоремы о движении центра масс

$$R=Mw\_{c}$$

Это прямая задача динамики.

x

y

Rc3

Rr3

 a=$\sqrt{R^{2}+R^{2}+2R^{2}cos135^{0}}$

Re3

ax

R2

Z,ϖ

$$ Mw\_{c}=M\_{1}w\_{c1}+M\_{2}w\_{c2}+mw=R\_{2}+R\_{3}$$

где $ R\_{2}$составляющая от ускорения центра тяжести стержня, а $R\_{3} $от ускорения точки. Последнее состоит из относительного, переносного и Кориолисова ускорений:

$$R\_{3}=R\_{3}^{r}+R\_{3}^{e}+R\_{3}^{c}=mw\_{r}+mw\_{e}+mw\_{c}$$

Направления составляющих изобразим на рисунке и вычислим их величину

$R\_{2}=πR^{2}γaω^{2}R$=3,14\*25\*4\*4\*5=6280 н;

$$R\_{3}^{e}=mω^{2}\sqrt{R^{2}+R^{2}+2R^{2}cos135^{0}}=18\*4\*9,2=662,4 $$

$ R\_{3}^{r}=m\ddot{x}=mω^{2}\left(2R-\left(R-RCosα\right)\right)=18\*4\*\left(10-1,5\right)=684$ н

$$R\_{3}^{c}=mw\_{c}=2mωv\_{1}=2\*18\*2\*2=144 (1.10)$$

**Задание И2. Теорема об изменении кинетического момента. Дифференциальное уравнение вращения тела. Условие равномерного вращения.**

**Дано:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m (к*г*) | R(м) | 𝛼 (град) | 𝛾 (к*г*/м) | $\dot{φ}$ (c-1) | *x*0 (м) | $\dot{x}\_{0}$ (м/с) | $M\_{z}$ (нм) | $x(t)$ (м/с) |
| 18 | 5 | 45 | 4 | -2 | 3 | 2 | -3t3-3 | 4+4t2 |

**x Фе**

 **y**

Ur

 **Фс**

α

R

β

x

h

P

O

Ue

ω

 φ

Z,ϖ

1. Найдем закон изменения угловой скорости тела из теоремы об изменении кинетического момента относительно оси вращения тела.

Кинетический момент системы складывается из кинетического момента пластины и зафиксированной на ней в текущий момент точкой М и кинетического момента точки М в относительном движении.

$$K\_{z}= (J\_{окр}+J\_{m} )\dot{φ}+m\dot{x}Rsinα $$

Последнее слагаемое положительно, поскольку при $\dot{x}>0$ момент относительной скорости направлен по стрелке $φ.$

 Моменты инерции пластины вычисляется по формуле Штейнера

$$J\_{окр}=\frac{MR^{2}}{2}+MR^{2}=\frac{3MR^{2}}{2}=\frac{3πR^{2}ΥR^{2}}{2}=\frac{3\*3,14\*25\*4\*25}{2}=11775 кг м2 $$

$$J\_{m}=mh^{2}=m(R^{2}+(R-x)^{2}-2R(R-x)cosα)=18(25-(5-4+4t^{2})^{2}-10(5-4+4t^{2})\frac{\sqrt{2}}{2})=18\left(25-(16-32t^{2}+16t^{4}\right)-5\sqrt{2}(4+4t^{2})=18(16t^{4}-t^{2}\left(20\sqrt{2}-8\right)+41-20\sqrt{2})$$

Интегрируем теорему об изменении кинетического момента

$$\dot{K\_{z}}= M\_{z}=-3t^{3}-3; $$

Получаем

$$ K\_{z}= -3\frac{t^{4}}{4}-3t $$

$$K\_{z}= (J\_{окр}+J\_{m} )\dot{φ}+m\dot{x}Rsinα $$

 $\dot{x}=$8t

$(11775+18(16t^{4}-t^{2}\left(20\sqrt{2}-8\right)+41-20\sqrt{2}))\dot{φ}$*-*20$\sqrt{2}$t$=-3\frac{t^{4}}{4} -3t$

Отсюда находим закон угловой скорости тела

$$\dot{φ}=\frac{-3\frac{t^{4}}{4} -3t+20\sqrt{2}t}{11775+18(16t^{4}-t^{2}\left(20\sqrt{2}-8\right)+41-20\sqrt{2})}$$

В момент, когда точка покидает тело.

$$x\_{1}=4+4t\_{1}^{2}=2R; t\_{1}^{2}=\frac{10-4}{4}=1,5 c, t\_{1}=1,225$$

$$ \dot{φ}\_{1}=\frac{-3\frac{t^{4}}{4} -3t+20\sqrt{2}t}{11775+18(16t^{4}-t^{2}\left(32-20\sqrt{2}\right)+41-20\sqrt{2})}=\frac{29,3}{12550,8}=-0,002 с^{-1} $$

1. Найдем закон изменения движущей силы сцепления $F\_{сц}$, которая создается мотором экипажа и обеспечивает заданное движение точки по телу. С учетом силы $F\_{сц} $ дифференциальное уравнение относительного движения точки приобретает вид

$$m\ddot{x}=mω^{2}(x-\left(R-Rcosα\right))+F\_{cц} $$

Отсюда находим закон изменения силы

$$F\_{cц}\left(t\right)=m\ddot{x}+mω^{2}\left((R-RCosα)-x\right)=144+18\*\left[\frac{-\frac{3t^{4}}{4}-723t}{12713-3024t^{2}-288t^{4}}\right]^{2} $$

1. Силу реакции $ N\_{y}$ точки на тело найдем из дифференциального уравнения вращения тела.

 $J\_{окр}\ddot{φ}=M\_{z}+N\_{y}\left(x-\left(R-Rcosα\right)\right)$

Или

$$J\_{окр}\ddot{φ}=-3t^{3}-3+N\_{y}\left(x-\left(R-Rcosα\right)\right) $$

Отсюда

$$N\_{y}=\frac{J\_{окр}\ddot{φ}+3t^{3}+3}{\left(x-\left(R-Rcosα\right)\right)} $$

Дифференцируя закон угловой скорости $\dot{φ}$, получаем:

$$\ddot{φ}=\frac{\left(-12t^{3}-2892\right)\*(12713-3024t^{2}-288t^{4})-(6048t-1152t^{3})\*(-3t^{4}-2892t)}{4(12713-3024t^{2}-288t^{4})^{2}}$$

На вылете t=1,225

$\ddot{φ}=\frac{\left(-12\*1,838-2892\right)\*\left(12713-3024\*1,5-288\*2,25\right)-\left(6048\*1,225-1152\*1,838\right)\*\left(-3\*2,25-2892\*1,225\right)}{4\left(12713-3024\*1,5-288\*2,25\right)^{2}}=1350,8 c^{-2}$

$$N\_{y}=\frac{11775\*1350,8+3\*1,8375+3}{(4+4\*2,25-\left(5-5\frac{\sqrt{2}}{2}\right))}= 33114,1 н $$

1. **В задаче А** тело вращается равномерно, значит сумма моментов всех сил, действующих на тело, равна нулю. На тело, кроме момента $M\_{z},$ действует сила давления, обратная по направлению силе $N\_{y}$, найденной в задаче А

$$N\_{y}=m\dot{φ}\left(2\dot{x}-\dot{φ}RSinα\right)$$

Ее момент относительно оси z равен

$$N\_{y}=\left(x-\left(R-Rcosα\right)\right)$$

Приравнивая сумму моментов нулю

$$M\_{z}+N\_{y}\left(x-\left(R-Rcosα\right)\right)=0 (2.16)$$

находим закон изменения вращательного момента, поддерживающий постоянную угловую скорость тела

$$M\_{z}=-N\_{y}\left(x-\left(R-Rcosα\right)\right)=m\dot{φ}\left(2\dot{x}-\dot{φ}RSinα\right)\left(x-\left(R-Rcosα\right)\right)=\left(2\dot{x}+7\right)\left(x-1,465\right) $$

где законы относительного движения $x$ и скорости точки $\dot{x} $являются известными функциями времени

**Задание И3. Уравнения Лагранжа. Теорема об изменении кинетической энергии.**

1. Методом Лагранжа получить дифференциальное уравнение относительного движения точки, найденное в И1.
2. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии найти реакцию тела на точку, и сравнить ее с результатом в И1.

**Дано:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m (к*г*) | R(м) | 𝛼 (град) | 𝛾 (к*г*/м) | $\dot{φ}$ (c-1) | *x*0 (м) | $\dot{x}\_{0}$ (м/с) | $M\_{z}$ (нм) | $x(t)$ (м/с) |
| 18 | 5 | 45 | 4 | -2 | 3 | 2 | -3t3-3 | 4+4t2 |

**x Фе**

 **y**

Ur

 **Фс**

α

β

R

x

h

P

O

Ue

ω

 φ

Z,ϖ

**Решение**

1. Найдем дифференциальное уравнение относительного движения точки из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}-\frac{∂T}{∂x}=Q\_{x}, (3.1) T=\frac{m}{2}V^{2}$$

Абсолютная скорость V точки складывается из переносной и относительной скоростей

$$V^{2}=\dot{x}^{2}+v\_{e}^{2}+2\dot{x}v\_{e}Sinβ, v\_{e}=ωh,$$

*h=*$\sqrt{R^{2}+(R-x)^{2}-2R(R-x)\cos(α)}$*, hsinβ=Rsinα*

Таким образом, кинетическая энергия приобретает выражение

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^{2}+ω^{2}\left(R^{2}+\left(R-x\right)^{2}-2R\left(R-x\right)\cos(α)\right)+2\dot{x}ωRSinα\right)$$

Находим производные:

$$\frac{∂T}{∂\dot{x}}=m\left(\dot{x}+ωRSinα\right); \frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}=m\ddot{x}; \frac{∂T}{∂x}=mω^{2}\left(\left(-R+x\right)+RCosα\right); $$

Обобщенная сила $ Q\_{x}=0$ поскольку сила тяжести перпендикулярна скорости точки и не имеет мощности.

Подставив производные в уравнение Лагранжа приходим к ***дифференциальному уравнению, найденному в И1***

$$\ddot{x}-ω^{2}\left(x-R+Rcosα\right)=0$$

1. Реакцию $N\_{y} $тела на точку найдем из теоремы об изменении кинетической энергии точки.

$$\dot{T}=N$$

где N- мощность физических сил, приложенных к точке, в переносном и в относительном движениях точки.

$$N=N\_{φ}+N\_{x}$$

Физических сил, имеющих проекцию на ось $x$ нет, поэтому

$$N\_{x}=Q\_{x}\dot{x}=0$$

Во вращательном переносном движении точки мощность реакции вычисляем через момент

$$N\_{φ}=m\_{z}\left(N\_{y}\right)\dot{φ};$$

По рисунку:

$$\dot{T}=\frac{∂T}{∂\dot{x}}\ddot{x}+\frac{∂T}{∂x}\dot{x}=m\left(\dot{x}+ωRSinα\right)\ddot{x}+mω^{2}\left(\left(-R+x\right)+RCosα\right)\dot{x}=N\_{y}ω\left((x-\left(R-Rcosα\right)\right)$$

Из дифференциального уравнения

$$\ddot{x}=ω^{2}\left(x-R+Rcosα\right)$$

Таким образом, после сокращения на $ω\left(x-R+RCosα\right)$ находим ***тот же результат, что и в И1***

$$N\_{y}=mω\left(2\dot{x}-ωRSinα\right)$$

**Задание И4. Уравнения Лагранжа.**

**Дано:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m (к*г*) | R(м) | 𝛼 (град) | 𝛾 (к*г*/м) | $\dot{φ}$ (c-1) | *x*0 (м) | $\dot{x}\_{0}$ (м/с) | $M\_{z}$ (нм) | $x(t)$ (м/с) |
| 18 | 5 | 45 | 4 | -2 | 3 | 2 | -3t3-3 | 4+4t2 |

**x Фе**

 **y**

Ur

 **Фс**

α

R

x

h

P

O

Ue

ω

 φ

Z,ϖ

1. Найдем закон изменения угловой скорости из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}-\frac{∂T}{∂φ}=Q\_{φ}$$

Кинетическая энергия системы складывается из энергии тела и точки

$$T=T\_{окр}+T\_{M}=\frac{J\_{окр}}{2}\dot{φ}^{2}+\frac{m}{2}v^{2}$$

$$J\_{окр}=\frac{MR^{2}}{2}+MR^{2}=\frac{3MR^{2}}{2}=\frac{3πR^{2}ΥR^{2}}{2}=\frac{3\*3,14\*25\*4\*25}{2}=11775 кгм2 $$

$$T=5887,5\dot{φ}^{2}+\frac{18}{2}\left[8t^{2}+\dot{φ}^{2}(R^{2}+(R-x)^{2}-2R(R-x)cosα)-2\dot{x}\dot{φ}RSinα\right]$$

h=$\sqrt{R^{2}+(R-x)^{2}-2R(R-x)cosα}$

Ve=$\dot{φ}\sqrt{R^{2}+(R-x)^{2}-2R(R-x)cosα}$

Подставив данные задачи, находим

$T=5887,5\dot{φ}^{2}+9\left[8t^{2}+\dot{φ}^{2}\left(25+(5-4+4t^{2})^{2}-2\*5(5-4+4t^{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2})-2\*8t\*5\dot{φ}\dot{\*\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$ =$5887,5\dot{φ}^{2}+9\left[8t^{2}+\dot{φ}^{2}\left(25+1+8t^{2}+16t^{4}-5\sqrt{2}-20\sqrt{2}t^{2}\right)-40\sqrt{2}t\dot{φ}\right]$=

$$=5887,5\dot{φ}^{2}+9\left[8t^{2}+\dot{φ}^{2}\left(16t^{4}+t^{2}(8-20\sqrt{2})+26-5\sqrt{2}\right)-40\sqrt{2}t\dot{φ}\right]$$

Обобщенная$ сила Q\_{φ}=M\_{z}=-3t^{3}-3$

$$\frac{∂T}{∂φ}=0, $$

$$ \frac{∂T}{∂\dot{φ}}=11775\dot{φ}+18\dot{φ}\left(16t^{4}+t^{2}(8-20\sqrt{2})+26-5\sqrt{2}\right)-360\sqrt{2}t$$

$$=-\frac{3t^{4}}{4}-3t$$

На вылете t=1,225

$$\dot{φ}=\frac{-\frac{3t^{4}}{4}-3t+360\sqrt{2}t}{11775+18\left(16t^{4}+t^{2}(8-20\sqrt{2})+26-5\sqrt{2}\right)}; $$

$$ \dot{φ}\_{1}=\frac{618,3}{12471}=0,005 с^{-1} $$

Видим, что в данном примере кинетический момент системы связан с кинетической энергией формулой

$$\frac{∂T}{∂\dot{φ}}=K\_{z}$$

**Задание И5. Уравнений Лагранжа. Теорема об изменении кинетической энергии в переносном движении**

**Дано:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m (к*г*) | R(м) | 𝛼 (град) | 𝛾 (к*г*/м) | $\dot{φ}$ (c-1) | *x*0 (м) | $\dot{x}\_{0}$ (м/с) | $M\_{z}$ (нм) | $x(t)$ (м/с) |
| 18 | 5 | 45 | 4 | -2 | 3 | 2 | -3t3-3 | 4+4t2 |

**x Фе**

 **y**

Ur

 **Фс**

α

β

R

x

h

P

O

Ue

А

ω

 φ

Z,ϖ

1. Дифференциальные уравнения движения системы найдем из уравнений Лагранжа. За обобщенные координаты выберем x и φ.

Запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}-\frac{∂T}{∂x}=Q\_{x}; \frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}-\frac{∂T}{∂φ}=Q\_{φ} (5.1)$$

Выражение кинетической энергии системы (4.2) позаимствуем из задания И4

$$T=T\_{окр}+T\_{M}=\frac{J\_{окр}}{2}\dot{φ}^{2}+ \frac{m}{2}v^{2}=$$

$=5887,5\dot{φ}^{2}+\frac{m}{2}\left[\dot{x}^{2}+\dot{φ}^{2}(R^{2}+(R-x)^{2}-2R(R-x)cosα)+2\dot{x}\dot{φ}RSinα\right]$=

$=5887,5\dot{φ}^{2}+\frac{18}{2}\left[\dot{x}^{2}+\dot{φ}^{2}\left(50-10x+x^{2}-5\sqrt{2}\left(5-x\right)\right)+5\sqrt{2}\dot{φ}\dot{x}\right]$ (5.2)

Производные по $x$:

$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}=18\left(\ddot{x}+\frac{5\sqrt{2}}{2}\dot{φ}\right); \frac{∂T}{∂x}=9\left(-10+2x+5\sqrt{2}\right)\dot{φ}^{2};$ (5.3)

Обобщенная сила

$$Q\_{x}=0 (5.4)$$

равна нулю, поскольку нет сил, имеющих составляющие вдоль $x$

Подставив (5.3) и (5.4) в (5.1) получаем дифференциальное уравнение по $x$:

$$9\left(2\ddot{x}+5\sqrt{2}\dot{φ}\right)=9\left(-10+2x+5\sqrt{2}\right)\dot{φ}^{2} (5.5)$$

Поскольку.

$$\frac{∂T}{∂φ}=0; Q\_{φ}=0 (5.6) $$

то $φ$ является циклической координатой, и ей соответствует циклический интеграл дифференциального уравнения по $φ:$

$$\frac{∂T}{∂\dot{φ}}=11775\dot{φ}+18\dot{φ}\left(50-10x+5\sqrt{2}(5-x)+x^{2}\right)+45\sqrt{2}\dot{x}=Const (5.7)$$

Покажем, что циклический интеграл $(5.7)$ выражает факт сохранение кинетического момента системы относительно оси z. Согласно формуле (2.1) задания И2

$$K\_{z}= (J\_{окр}+J\_{m} )\dot{φ}+m\dot{x}Rsinα= =11775\dot{φ}+18\dot{φ}(R^{2}+(R-x)^{2}-2R(R-x)cosα)+m\dot{x}Rsinα $$

Подстановка данных задачи дает

$$K\_{z}=11775\dot{φ}+18\dot{φ}\left(50-10x+5\sqrt{2}(5-x)+x^{2}\right)+45\sqrt{2}\dot{x} (5.8)$$

что в точности совпадает с выражением (5.7).

Значит (5.7) действительно выражает факт сохранение кинетического момента системы относительно оси z. Ввиду начального покоя системы

$$K\_{z}=Const=0 (5.9)$$

Производная от (5.7) приводит к дифференциальному уравнению по $φ$

$$18\ddot{φ}\left(694-10x+5\sqrt{2}(5-x)+x^{2}\right)-2\dot{φ}\dot{x}+45\sqrt{2}\ddot{x} =0 (5.10)$$

1. Проверим уравнение относительного движения точки (1.2) в условиях задачи А.

При подстановке условий задачи А: $\dot{φ}=-2=Const$ в (5.5) ***получаем точно такое же уравнение, как в задаче А***

$$9\left(2\ddot{x}-10\sqrt{2}\right)=36\left(-10+2x+5\sqrt{2}\right)$$

$$ 2\ddot{x}-10\sqrt{2}=-40+8x+20\sqrt{2} $$

$$\ddot{x}-4x=-30+5\sqrt{2} (5.11)$$

1. Проверим закон угловой скорости тела, найденный в условиях задачи Б

При подстановке условий задачи Б при отсутствии момента $M\_{z}$: $x=-3t^{3}-3$ в (5.7) получаем тот же закон угловой скорости

$$11775\dot{φ}+18\dot{φ}\left(50-10\left(-3t^{3}-3\right)+5\sqrt{2}\left(5-x\right)+\left(-3t^{3}-3 \right)^{2}\right)+45\sqrt{2}\left(-9t^{2}\right)=K\_{z}=0 или $$

$$ \dot{φ}=\frac{45\sqrt{2}t^{2}}{\left(50-10\left(-3t^{3}-3\right)+5\sqrt{2}\left(5-x\right)+\left(-3t^{3}-3 \right)^{2}\right)-11775} (5.12) $$

что и в задании И2 при отсутствии момента.

1. Общее выражение зависимости реакции $N\_{y} $тела на точку найдем из теоремы об изменении кинетической энергии точки в переносном движении

$$\dot{T}\_{1}+2\dot{T}\_{0}-\frac{∂T}{∂t}=N\_{y}∙v\_{e} (5.13)$$

Здесь использовано разложение выражения кинетической энергии точки Т на слагаемые по степеням относительной скорости. Справа стоит мощность внешних сил (они здесь состоят из одной реакции $N\_{y})$на переносном движении точки.

$$T\_{M}=\frac{1}{2}(\dot{x}^{2}+\dot{φ}^{2}\left(50-10x+x^{2}-5\sqrt{2}\left(5-x\right)\right)+5\sqrt{2}\dot{φ}\dot{x})=T\_{2}+T\_{1}+T\_{0} (5.14)$$

Кинетическая энергия Т не содержит времени t, поэтому

$$\frac{∂T}{∂t}=0 (5.15)$$

Энергия $T\_{1}$ , содержащая $\dot{x}$ в первой степени и ее производная

$$T\_{1}=5\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{x}\dot{φ} \dot{T}\_{1}=5\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ddot{x}\dot{φ}+\dot{x}\ddot{φ}\right) (5.16)$$

Энергия $T\_{0},$ содержащая $\dot{x}$ в нулевой степени и ее производная

$$T\_{0}=\frac{\dot{φ}^{2}}{2}\left(50-10x+x^{2}-5\sqrt{2}\left(5-x\right)\right) 2\dot{T}\_{0}=2\dot{φ}^{2}\dot{x}\left(x-10+5\sqrt{2}\right) (5.17)$$

Мощность реакции в переносном движении точки

$$N\_{y}∙v\_{e}=N\_{y}\dot{φ}\left(x-10+5\sqrt{2}\right) (5.18)$$

После подстановки в теорему (5.13) получаем

$$N\_{y}\dot{φ}\left(x-10+5\sqrt{2}\right)=5\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ddot{x}\dot{φ}+\dot{x}\ddot{φ}\right)+2\dot{φ}^{2}\dot{x}\left(x-10+5\sqrt{2}\right)$$

$$N\_{y}=2\dot{x}\dot{φ}+\frac{5\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ddot{x}\dot{φ}+\dot{x}\ddot{φ}\right)}{\dot{φ}\left(x-10+5\sqrt{2}\right)} (5.19)$$

Проверим выражение (для реакции$ N\_{y} $в условиях задачи А, где**:**  $\dot{φ}=-2=Const, \ddot{φ}=0 $

Подставив эти условия в (5.19), получаем

$$N\_{y}=-4\dot{x}-\frac{-5\frac{\sqrt{2}}{2}\ddot{x}}{x-10+5\sqrt{2}} $$

В силу дифференциального уравнения движения точки

$$\ddot{x}-4x=-30+5\sqrt{2}$$

получаем то же выражение (1.8)

$$N\_{y}=- 4\dot{x}-\frac{-5\frac{\sqrt{2}}{2}-30+5\sqrt{2}+4x}{x-1} $$

что и в задании И1.