

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ,  
д.ф. – м.н., чл.-корр. РАН  
\_\_\_\_\_ А. М. Кривцов  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

### **Моделирование изменения рельефа территории посредством эрозии методом SPH**

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

направленность

01.03.03\_03 Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи

Выполнил

студент гр. 5030103/00301

А. Б. Хамхоев

Руководитель

Профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

А. В. Порубов

Консультант

Ассистент ВШТМиМФ СПбПУ

А. Д. Ершов

Санкт-Петербург  
2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**  
**Физико-механический институт**  
**Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Хамхоеву Александру Борисовичу, гр. 5030103/00301

1. Тема работы: Моделирование изменения рельефа территории посредством эрозии методом SPH.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2024
3. Исходные данные по работе: справочная литература, актуальные научные публикации по теме работы.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): физическая постановка задачи, выбор метода решения, проверка корректности модели жидкости на тестах, моделирование наводнения, моделирование гидравлической эрозии ландшафта.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: А. Д. Ершов, ассистент ВШТМиМФ
7. Дата выдачи задания 28.02.2024

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ А. В. Порубов, профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению 28.02.2024

Студент \_\_\_\_\_ А. Б. Хамхоев

## РЕФЕРАТ

На 40 с., 28 рисунков, 6 таблиц, 0 приложений.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ЭРОЗИЯ, ГИДРОДИНАМИКА СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ЛАНДШАФТ, ОПТИМИЗАЦИЯ.

Тема выпускной квалификационной работы: «Моделирование изменения рельефа территории посредством эрозии методом SPH».

В данной работе рассматривается моделирование деформации рельефа в результате эрозии с помощью метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH). Исследование подчеркивает актуальность моделирования реалистичного ландшафта в таких приложениях, как разработка видеоигр и геологические исследования. Метод SPH был выбран за его способность моделировать сложные взаимодействия между жидкостью и твердым телом без фиксированной сетки.

Подробно рассматриваются принципы SPH, включая интерполяцию и расчет плотности, давления и вязкости частиц. Значительное внимание уделено оптимизации вычислительных процессов. Эффективность предложенных алгоритмов была проверена на различных сценариях, таких как взаимодействие жидкости внутри параллелепипеда и наводнение.

В заключительном разделе представлены результаты моделирования эрозии, демонстрирующие, как водный поток может изменять ландшафты, перенося частицы почвы. Полученные результаты имеют практическое применение при создании реалистичных ландшафтов для видеоигр, а также в геологических и инженерных исследованиях.

Будущие исследования могут сосредоточиться на совершенствовании оптимизационных алгоритмов и расширении применения метода SPH для моделирования различных природных и техногенных процессов.

## **ABSTRACT**

40 pages, 28 figures, 6 tables, 0 appendices.

**KEY WORDS:** EROSION, SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS, LANDSCAPE, OPTIMISATION.

The subject of the graduate qualification work is: «Modelling of landform change through erosion by SPH method».

This paper deals with the modelling of terrain deformation by erosion using the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) method. The study highlights the relevance of realistic landscape modelling in applications such as video game development and geological studies. The SPH method was chosen for its ability to model complex fluid-solid interactions without a fixed mesh.

The principles of SPH are discussed in detail, including interpolation and calculation of particle density, pressure and viscosity. Considerable attention is paid to the computational optimisation. The effectiveness of the proposed algorithms has been tested on various scenarios such as fluid interaction inside a parallelepiped and flooding.

In the final section, erosion modelling results are presented, demonstrating how water flow can modify landscapes by transporting soil particles. The results have practical applications in creating realistic landscapes for video games, as well as in geological and engineering studies.

Future research may focus on improving optimisation algorithms and expanding the application of the SPH method for modelling various natural and anthropogenic processes.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Глава 1. Модели и методы, применяемые в работе.....	7
1.1. Уравнения Навье-Стокса.....	7
1.2. Гидродинамика сглаженных частиц .....	8
1.3. Интерполяция .....	11
1.4. Эрозия и перемещение почвы.....	14
Глава 2. Оптимизация вычислений .....	17
2.1. Применение пространственной сетки.....	17
2.2. Применение параллельных вычислений .....	19
2.3. Эффективность оптимизации .....	19
2.4. Итоговый алгоритм.....	20
Глава 3. Результаты моделирования .....	22
3.1. Простой прорыв платины.....	22
3.2. Падение жидкости в куб.....	23
3.3. Моделирование потока.....	25
3.4. Моделирование эрозии .....	32
Заключение .....	37
Список использованной литературы.....	39

## ВВЕДЕНИЕ

На 2024 год популярность разработчиков игр в России возрастает. Появляется множество отечественных студий по разработке, привлекаются средства, проводится множество конференций. В связи с этим наблюдается необходимость в отечественных аналогах игровых движков, ведь бывали случаи, когда зарубежные программы переставали работать, либо из бесплатных переходили в состояние агрессивной подписки.

В данной работе рассматривается метод создания реалистичного ландшафта на основе метода «SPH», он же «Гидродинамика сглаженных частиц». Метод позволяет производить симуляции реалистичной жидкости, сыпучих материалов [2] и взаимодействие жидкости с твердыми и мягкими телами [10], что так-же можно использовать в игровом дизайне. Так, например, в играх «From Dust» или «Sprinters» симуляция жидкости является непосредственным участником игрового процесса.

Качественное моделирование жидкости является важным в инженерных задачах потому, что оно обеспечивает безопасность и надежность конструкций, повышает экономическую эффективность, минимизирует экологические риски, способствует разработке новых технологий и материалов, а также улучшает производительность и эффективность систем. Это позволяет инженерам предсказывать и контролировать поведение жидкостей в различных условиях, приводя к более оптимальным и устойчивым решениям.

По ряду причин процесс моделирования эрозии ландшафта является важным:

- 1) Реалистичность: эрозия — это естественный процесс, который со временем формирует ландшафты. Включение этого процесса в симуляцию помогает создавать более реалистичные и детализированные среды в различных приложениях, таких как видеоигры, фильмы и виртуальная реальность.

2) Научная точность: в научных исследованиях и образовании моделирование эрозии позволяет лучше понять геологические процессы и их долгосрочное влияние на окружающую среду, что способствует развитию знаний в этой области.

3) Инженерное планирование и инфраструктура: становится все более очевидным, что точные модели эрозии имеют решающее значение для проектирования и обслуживания инфраструктуры, такой как дороги, мосты и здания. Прогнозируя и смягчая потенциальный ущерб, связанный с эрозией, эти модели могут помочь обеспечить долговечность и безопасность таких сооружений.

4) Управление окружающей средой: моделирование эрозии может стать ценным инструментом при разработке стратегий по сохранению почв, предотвращению деградации земель, управлению водосборами и смягчению последствий эрозии для экосистем.

5) Оценка рисков и готовность к стихийным бедствиям: предполагается, что понимание того, как эрозия влияет на ландшафты, может помочь в прогнозировании и управлении такими стихийными бедствиями, как оползни и наводнения, что, в свою очередь, повысит готовность и эффективность ответных мер.

6) Улучшение игровых и VR-опытов: в видеоиграх и виртуальной реальности реалистичные ландшафты могут повысить уровень погружения и аутентичности, что, в свою очередь, сделает виртуальные миры более динамичными и увлекательными для пользователей.

## ГЛАВА 1. МОДЕЛИ И МЕТОДЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В РАБОТЕ

В данной главе рассматриваются теоретическая часть, необходимая для реализации симуляции жидкости и эрозии.

### 1.1. Уравнения Навье-Стокса

Уравнения Навье-Стокса являются фундаментальными уравнениями, описывающими движение вязкой жидкости и газа. Они основаны на законах сохранения массы, импульса и энергии. Эти уравнения названы в честь Клода-Луи Навье и Джорджа Габриеля Стокса, которые внесли значительный вклад в их формулировку и анализ.

Уравнения движения для несжимаемой жидкости [9]:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + f, \quad (1.1)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,

$t$  – время,

$p$  – давление,

$\mu$  – динамическая вязкость,

$f$  – внешние силы (например, гравитация),

$\frac{\partial u}{\partial t}$  – изменение скорости жидкости во времени,

$u \cdot \nabla u$  – конвективный член, описывающий перенос импульса,

$-\nabla p$  – градиент давления, вызывающий движение жидкости из областей высокого давления в области низкого давления,

$\mu \nabla^2 u$  – вязкий член, описывающий внутреннее трение жидкости.

Уравнение непрерывности для несжимаемой жидкости:

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (1.2)$$



## 1.2. Гидродинамика сглаженных частиц

Гидродинамика сглаженных частиц – это метод вычислительной гидродинамики, используемый для моделирования течения жидкостей и газов. SPH является Лагранжевым методом, что означает, что частицы перемещаются вместе с потоком, в отличие от эйлеровских методов, где пространство делится на фиксированную сетку.

Основные идеи SPH:

1) Представление жидкости с помощью частиц: в методе SPH жидкость или газ представляется набором частиц. Каждая частица имеет массу, позицию, скорость и другие физические свойства.

2) Функция сглаживания: для расчета физических величин (например, плотности, давления) используется функция сглаживания (ядро сглаживания)  $W$ , распределяющая вклад каждой частицы на её окрестности. Функция сглаживания  $W$  обычно имеет компактную поддержку, что означает, что она равна нулю за пределами некоторого радиуса влияния.

3) Аппроксимация полей: поля физических величин (например, некоторой величины  $A$ ) и их градиенты, лапласианы аппроксимируются с использованием функции сглаживания  $W(r, h)$ :

$$A(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} W(r - r_j, h), \quad (1.3)$$

$$\nabla A(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla W(r - r_j, h), \quad (1.4)$$

$$\nabla^2 A(r) = \sum_j m_j \frac{A_j}{\rho_j} \nabla^2 W(r - r_j, h), \quad (1.5)$$

где  $A$  – некоторая физическая величина,

$r$  – радиус-вектор,

$m_j$  – масса  $j$ -ой частицы,

$\rho_j$  – плотность  $j$ -ой частицы.

Используя подход Лагранжа, уравнения движения переписываются в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + f. \quad (1.6)$$

В правой части уравнения стоит сумма всех сил. Рассмотрим, как они действуют на некоторую  $i$ -ую частицу:

$$F_i = -\nabla p_i + \mu \nabla^2 u_i + f_i. \quad (1.7)$$

Найти ускорение  $i$ -ой частицы можно следующим образом:

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{F_i}{\rho_i}. \quad (1.8)$$

Плотность рассчитывается по следующей формуле:

$$\rho(r_i) = \sum_j m_j \frac{\rho_j}{\rho_j} W(r_i - r_j, h) = \sum_j m_j W(r_i - r_j, h). \quad (1.9)$$

При этом давление в точке  $r_i$  связано с плотностью в этой-же точке следующим соотношением:

$$p = k(\rho - \rho_0), \quad (1.10)$$

где  $\rho_0$  – плотность, к которой стремится система.

Существенной проблемой выражений (1.3)-(1.4) является несимметричность значений первого и второго члена уравнения (1.7) для гипотетически рассматриваемых двух соседних, влияющих друг на друга частиц. В таком случае необходимо несколько переопределить уравнения для градиента давления и члена вязкости.

Градиент давления:

$$f_i^{pressure} = -\nabla p(r_i) = -\sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W(r - r_j, h). \quad (1.11)$$

Вязкий член:

$$f_i^{viscosity} = \mu \nabla^2 u(r_i) = \mu \sum_j m_j \frac{u_j - u_i}{\rho_j} \nabla^2 W(r_i - r_j, h). \quad (1.12)$$

Типичный вид ядер сглаживания приведен на рисунке 1. Вид ядер может быть разным, но для каждого ядра выполняются следующие условия:

1) Симметричность:

$$W(r, h) = W(-r, h). \quad (1.13)$$

2) В пределе при  $h \rightarrow 0$  ядро сглаживания является дельта-функцией:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(r, h) = \delta(r). \quad (1.14)$$

3) Ядро сглаживания нормировано к единице в пределах радиуса  $h$ :

$$\int_V W(r, h) dr' = 1. \quad (1.15)$$

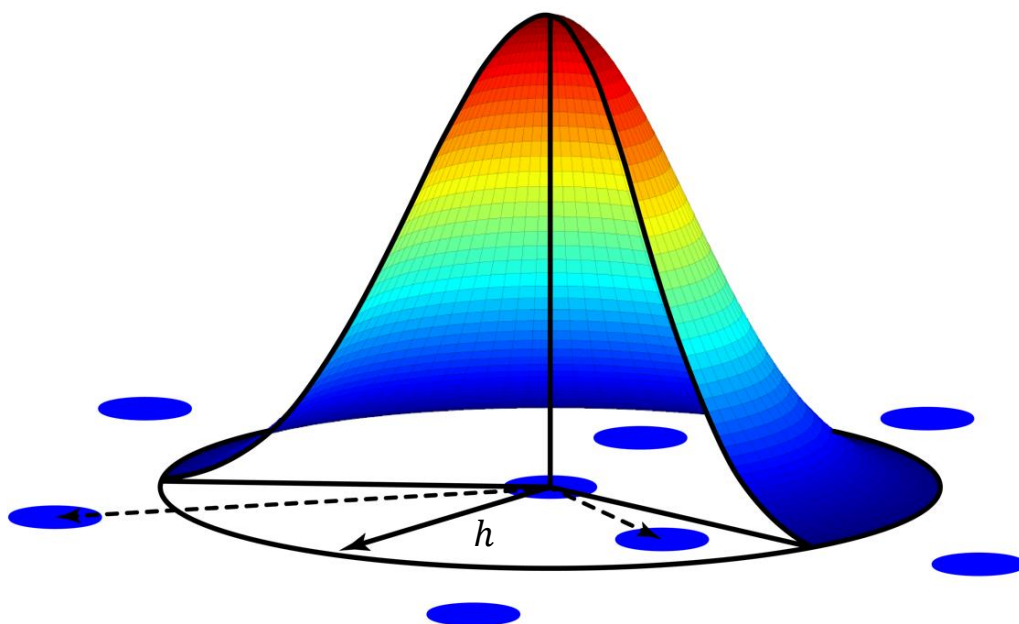


Рисунок 1. Типичный вид ядра сглаживания (2D)

Для расчета плотности, давления и вязкости используются различные ядра [1]:  $W_{poly6}$ ,  $W_{spiky}$  и  $W_{viscosity}$  соответственно:

$$W_{poly6}(r, h) = \frac{315}{64\pi h^9} \begin{cases} (h^2 - \|r\|^2)^3 & 0 \leq \|r\| \leq h \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (1.16)$$

$$W_{spiky}(r, h) = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h - \|r\|)^3 & 0 \leq \|r\| \leq h \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\nabla W_{spiky}(r, h) = -\frac{45}{\pi h^6} \begin{cases} \frac{r}{\|r\|}(h - \|r\|)^2 & 0 \leq \|r\| \leq h \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$W_{viscosity}(r, h) = \frac{15}{2\pi h^3} \begin{cases} -\frac{\|r\|^3}{2h^3} + \frac{\|r\|^2}{h^2} + \frac{h}{2\|r\|} - 1 & 0 \leq \|r\| \leq h \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\nabla^2 W_{viscosity}(r, h) = \frac{45}{\pi h^6} \begin{cases} (h - \|r\|) & 0 \leq \|r\| \leq h \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (1.20)$$

### 1.3. Интерполяция

Для построения ландшафта широко используются карты высот, также известные как цифровые модели высот, представляющие собой цифровые представления рельефа земной поверхности. Они содержат информацию о высоте местности над определённым уровнем, как правило, над уровнем моря.

По сути своей карты высот являются двумерными матрицами. Возникает проблема, что для некоторых областей карты земного шара известные высоты находятся на больших расстояниях друг от друга (порядка 40 метров). Как в таком случае происходит взаимодействие жидкости с рельефом? Ведь необходимо знать высоту ландшафта в любой точке, не только в узлах сетки.

Один из вариантов – интерполяция высоты в пределах области, ограниченной ребрами, соединяющими точки с известными значениями высоты. Для нахождения значения высоты используются функции форм для четырех узлового четырехугольника. Другой вариант – разбиение ландшафта на треугольники и расчет силы, действующей на жидкость [11].

Первое что необходимо – отобразить координаты квадрата, в узлах которого находятся известные нам значения высот в область квадрата со стороной 2. Уже в новых координатах  $(\xi, \eta)$  происходит интерполяция по нижеуказанным формулам [8]. Таким образом возникает возможность в любой точке отображенного квадрата узнать значение высот, что в дальнейшем используется для наложения неподвижных частиц, выступающих в роли поверхности. Узнать положение частиц в оригинальной системе координат можно обратным преобразованием.

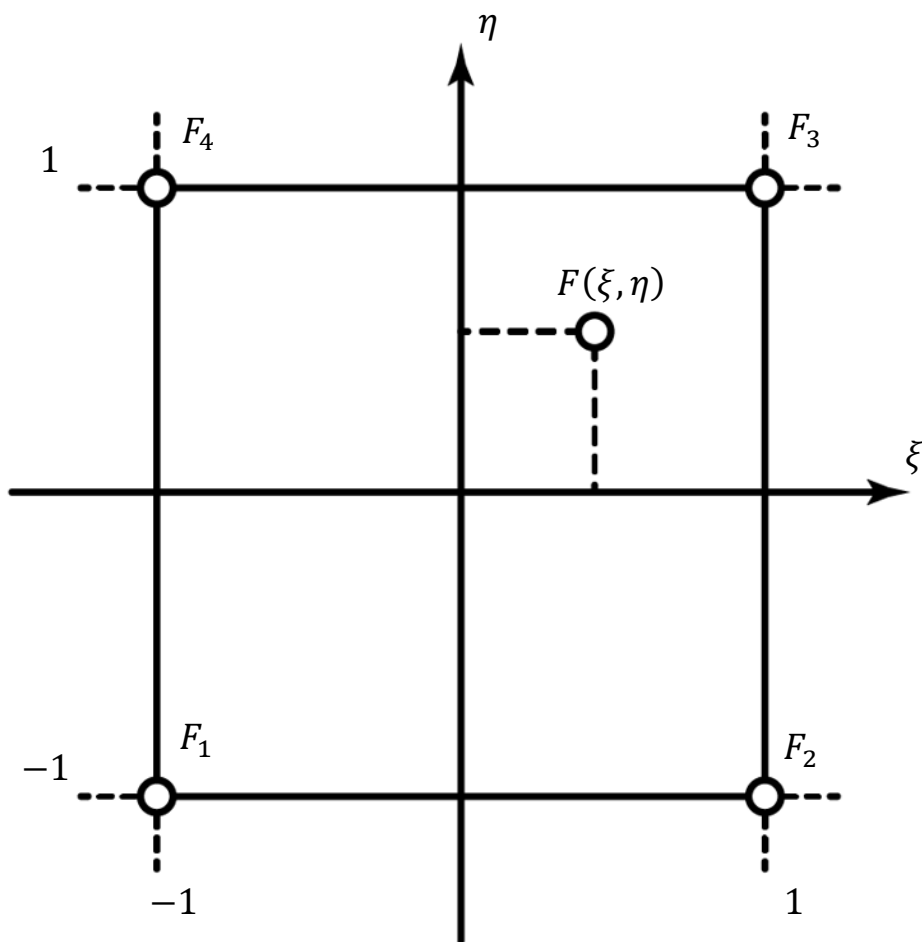


Рисунок 2. Отображенный четырехугольник

Координаты узлов  $C_k(\xi_k, \eta_k)$ :  $C_1(-1, -1)$ ,  $C_2(1, -1)$ ,  $C_3(1, 1)$ ,  $C_4(-1, 1)$ .

Функции форм в координатах  $(\xi, \eta)$  для четырех узловых точек выглядят следующим образом:

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (1.21)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (1.22)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad (1.23)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta). \quad (1.24)$$

Выполняются три необходимых условия:

1) Функция формы равна единице в том узле, к которому она относится:

$$N_i(\xi_i, \eta_i) = 1. \quad (1.25)$$

2) Функция формы равна нулю в тех узлах, к которому она не относится ( $i \neq j$ ):

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = 0. \quad (1.26)$$

3) Сумма функций форм равна единице:

$$\sum_i N_i(\xi, \eta) = 1. \quad (1.27)$$

В каждом узле хранится значение высоты  $F_j$ , тогда непрерывная поверхность в пределах области квадрата описывается следующим образом:

$$F(\xi, \eta) = \sum_j F_j N_j(\xi, \eta). \quad (1.28)$$

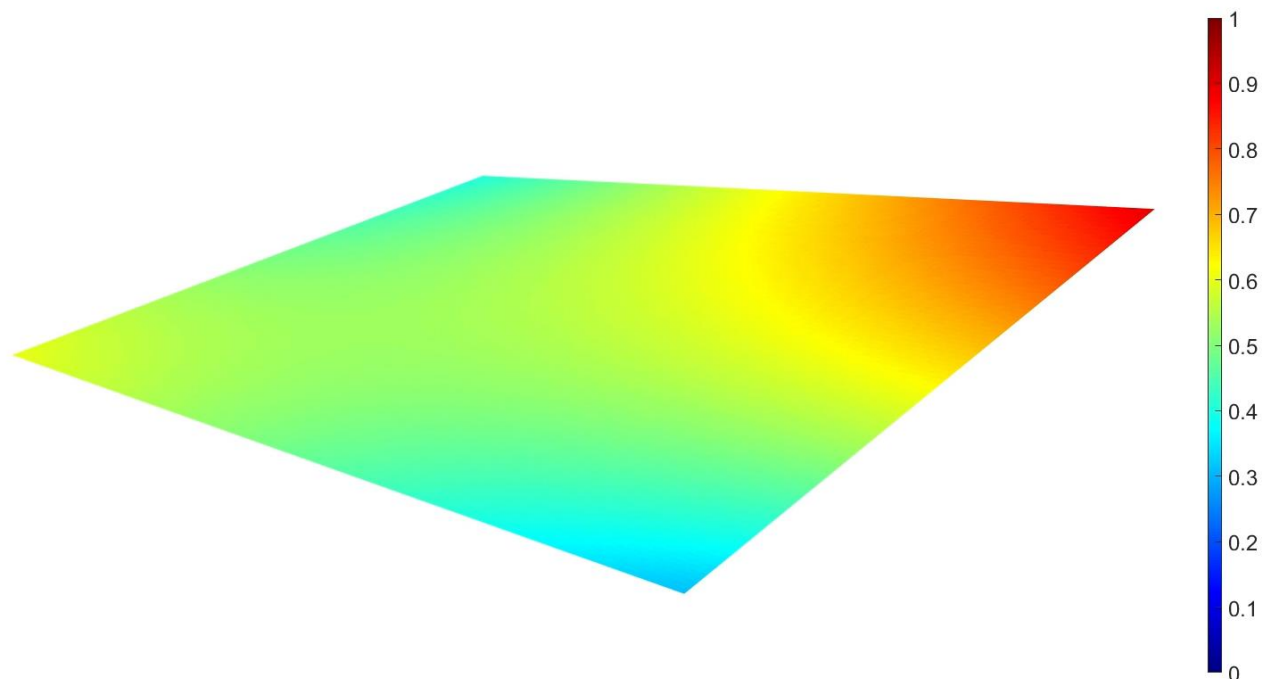


Рисунок. 3. Пример интерполяции

Примечательно, что с помощью функций форм можно также распределить некоторую величину по вершинам квадрата. В данном случае известна некоторая величина  $F$ , находящаяся в координате  $(\xi_0, \eta_0)$ . Необходимо узнать какой вклад она будет иметь каждый из узлов, если эту величину распределить по всем узлам:

$$F_j = F(\xi_0, \eta_0)N_j(\xi_0, \eta_0). \quad (1.29)$$

#### 1.4. Эрозия и перемещение почвы

Когда вода течет по поверхности, часть почвы будет размываться и транспортироваться водой, а часть взвешенного осадка будет оседать на землю. Этот процесс эрозии-осаждения в основном определяется транспортной способностью потока. Это значение ограничено многими факторами, и в науке о почвах было предложено много прогнозных моделей. В данной работе рассматривается метод, предложенный в статьях [6] и [3].

Он основан на том, что помимо карты высот рассматривается также карта взвешенного осадка  $s$ , показывающая в какой точке сколько породы может быть вымыто. Данную модель можно усложнить, добавив несколько типов осадков, как предложено в статье [12].

Транспортная способность осадка в ячейке с координатой  $(x, y)$  рассчитывается по следующей формуле:

$$C(x, y) = K_c \sin \alpha(x, y) \|\langle u(x, y) \rangle\|, \quad (1.30)$$

где  $K_c$  – константа транспортной способности,

$\alpha(x, y)$  – локальный угол наклона,

$\langle u(x, y) \rangle$  – средняя скорость частиц воды в пределах рассматриваемой клетки.

$C(x, y)$  связана с геометрией рельефа и скоростью потока. Необходимо отметить, что для очень плоских рельефов синус угла приближается к нулю, как и  $C$ , что означает, что водный поток поднимет мало почвы с земли и эффект эрозии будет незначителен. Данную проблему можно решить, поставив ограничение на значение угла  $\alpha$ .

В дальнейшем сравнивается транспортная способность осадка с количеством взвешенного осадка в данный момент времени. Если  $C > s_t$ , то часть почвы растворяется в воде и добавляется к взвешенному осадку:

$$b_{t+\Delta t} = b_t - K_s(C - s_t), \quad (1.31)$$

$$s_1 = s_t + K_s(C - s_t), \quad (1.32)$$

где  $b$  – значение карты высот,

$K_s$  – константа растворения.

В ином случае, если  $C \leq s_t$  часть взвешенного осадка осаждается:

$$b_{t+\Delta t} = b_t + K_d(s_t - C), \quad (1.33)$$

$$s_1 = s_t - K_d(s_t - C), \quad (1.34)$$

где  $K_d$  – константа осаждения.



После шага эрозии-осаждения обновленный взвешенный осадок транспортируется с полем скорости потока. Этот процесс можно описать уравнением адвекции:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\langle u \rangle \cdot \nabla s) = 0. \quad (1.35)$$

Для обновления значения взвешенного осадка используется шаг Эйлера назад во времени:

$$s_{t+\Delta t}(x, y) = s_1(x - \langle u \rangle_i \Delta t, y - \langle u \rangle_j \Delta t) \quad (1.36)$$

## ГЛАВА 2. ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В данной главе рассматриваются методы ускорения работы алгоритма и сравниваются результаты ускорения.

### 2.1. Применение пространственной сетки

Для повышения эффективности вычислений в методе SPH используется пространственная сетка, которая разбивает исследуемую область на ячейки [4]. Это позволяет ускорить поиск соседей для каждой частицы, что существенно сокращает время расчётов, так как используемые ядра сглаживания обращаются в ноль за пределами сферы радиуса  $h$ . Таким образом нет необходимости суммировать взаимодействие по всей области симуляции, так как большинство элементов суммы являются нулями. Используя перебор по всей области сложность вычислений составляет  $O(n^2)$ , где  $n$  — число частиц, что является плохим показателем.

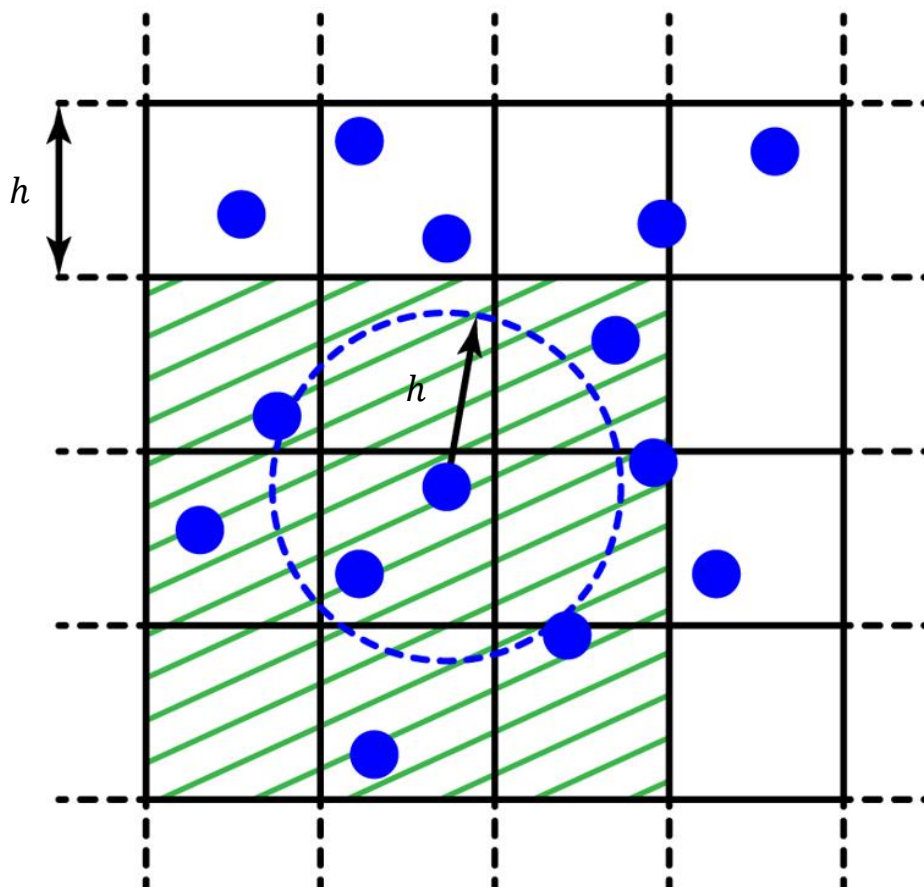


Рисунок 4. Пример сетки

Разбив область симуляции на кубы с ребрами длиной  $h$  мы можем найти к какому кубу принадлежит каждая частица. После этого область возможных взаимодействий для каждой отдельно взятой частицы является кубом со сторонами  $3h$ , состоящих из 27 элементарных кубов, где в центре находится куб, содержащий рассматриваемую частицу. Сложность алгоритма составляет  $O(nk)$ , где  $k$  — некоторая константа, характеризующая максимально возможное количество частиц в кубе стороны  $3h$ . Таким образом ожидается линейная сложность вычислений  $O(n)$ .

Работает алгоритм следующим образом:

$$c = (i, j, k) = \left( \left\lfloor \frac{x}{h} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{y}{h} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{z}{h} \right\rfloor \right), \quad (2.1)$$

где  $c$  — характеристика координаты куба, к которому относится частица с координатами  $(x, y, z)$ .

$$\text{hash}(c) = (p_1 i \text{ XOR } p_2 j \text{ XOR } p_3 k) \bmod m, \quad (2.2)$$

где  $\text{hash}$  — номер куба, к которому относится частица,

$p_1, p_2, p_3$  — большие простые числа, 73856093, 19349663 и 83492791 соответственно,

$m$  — число, больше числа кубов.

Необходимо отметить, что возможны «наложения» одного куба на другой в том смысле, что они будут иметь одинаковое число  $\text{hash}$ . Это означает, что суммирование сил, действующих на некоторую частицу в общем случае будет идти не только в кубе, в котором она находится, 26 соседних, но и некотором кубе, находящимся за пределами возможных пересечений областей ядра сглаживания. В статье отмечается, что такие случаи единичны, но возможны, именно поэтому число  $m$  берется заведомо больше, чем число кубов, на которые поделена область симуляции.

## 2.2. Применение параллельных вычислений

Параллельные вычисления играют важную роль в ускорении моделирования гидродинамических процессов. Использование многоядерных процессоров и графических процессоров позволяет одновременно обрабатывать данные для множества частиц, значительно сокращая время выполнения программы. В нашем случае параллельные вычисления хорошо накладываются на построенную сетку, рассмотренную в предыдущей главе.

## 2.3. Эффективность оптимизации

Как видно из рисунка 5, использование сетки ускоряет алгоритм на пару порядков, при этом использование параллельных вычислений дает выигрыш еще примерно на порядок. Таким образом использование оптимизации является крайне продуктивным. Обезразмеривание проводилось путем деления всех значений времени работы одной итерации алгоритма на самое малое время обновления, а именно время при количестве частиц равном 1000 и при использовании сетки с распараллеливанием.

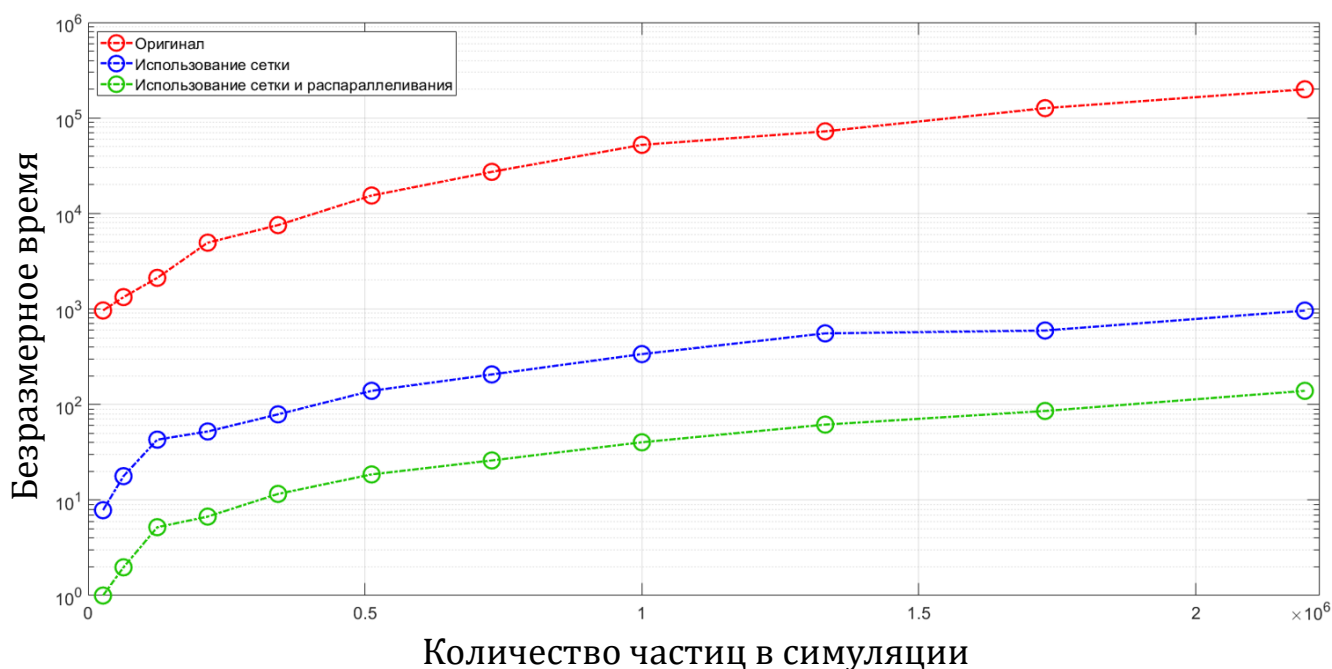


Рисунок 5. Безразмерные время работы одной итерации

## 2.4. Итоговый алгоритм

Для каждой частицы  $i$  находятся частицы, которые имеют ненулевой вклад в силы, на нее действующие.

Обновление плотностей и давлений:

$$\rho(r_i) = \sum_j m_j W_{poly6}(r_i - r_j, h), \quad (2.3)$$

$$p_i = p(r_i) = k(\rho(r_i) - \rho_0). \quad (2.4)$$

Расчет сил давлений и вязкости:

$$f_i^{pressure} = - \sum_j m_j \frac{p_i + p_j}{2\rho_j} \nabla W_{spiky}(r - r_j, h), \quad (2.5)$$

$$f_i^{viscosity} = \mu \sum_j m_j \frac{u_j - u_i}{\rho_j} \nabla^2 W_{viscosity}(r_i - r_j, h). \quad (2.6)$$

Добавление внешних сил (гравитации):

$$F_i = f_i^{pressure} + f_i^{viscosity} + f_i^{external}. \quad (2.7)$$

Для интегрирования используется алгоритм leapfrog [15], который является симплектическим методом интегрирования.

Временной шаг можно динамически изменять, используя критерий Куранта [7], но в данной работе шаг выбран фиксированным, однако критерий Куранта выполнен:

$$\Delta t \leq \alpha \frac{h}{\|u_{\max}\|}, \quad (2.8)$$

где  $u_{\max}$  — максимальная скорость по всем частицам,

$\alpha$  — некоторый положительный коэффициент, меньший единицы.

Во время первой итерации необходимо найти скорости на половинном шаге по времени, для этого применяется обратный шаг по Эйлера для скоростей:

$$u_{0-\frac{1}{2}\Delta t} = u_0 - \frac{1}{2}a_0\Delta t. \quad (2.9)$$

Нахождение ускорений:

$$a_i = \frac{F_i}{\rho_i}. \quad (2.10)$$

Обновление скоростей и координат:

$$u_{t+\frac{1}{2}\Delta t} = u_{t-\frac{1}{2}\Delta t} + a_i\Delta t, \quad (2.11)$$

$$r_{t+\Delta t} = r_t + u_{t+\frac{1}{2}\Delta t}\Delta t. \quad (2.12)$$

Аппроксимация скоростей на целом шаге интегрирования для дальнейшего применения эрозии:

$$u_t = \frac{u_{t+\frac{1}{2}\Delta t} + u_{t-\frac{1}{2}\Delta t}}{2}. \quad (2.13)$$

Расчет транспортной способности в координате  $(x, y)$ :

$$C(x, y) = K_c \sin \alpha(x, y) \|\langle u(x, y) \rangle\|. \quad (2.14)$$

Если  $C > s_t$ :

$$b_{t+\Delta t} = b_t - K_s(C - s_t), \quad (2.15)$$

$$s_1 = s_t + K_s(C - s_t), \quad (2.16)$$

Если  $C \leq s_t$ :

$$b_{t+\Delta t} = b_t + K_d(s_t - C), \quad (2.17)$$

$$s_1 = s_t - K_d(s_t - C), \quad (2.18)$$

Обновление значений взвешенного осадка:

$$s_{t+\Delta t}(x, y) = s_1(x - \langle u \rangle_i \Delta t, y - \langle u \rangle_j \Delta t) \quad (2.19)$$

### ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной главе рассматриваются различные сценарии при симуляции жидкости.

#### 3.1. Простой прорыв плотины

На рисунках 6-9 показан процесс симуляции жидкости, находящейся в параллелепипеде, при этом начальное положение частиц является кубом. Количество частиц в симуляции – 343000. Параметры жидкости указаны в таблице 1. Поскольку область симуляции является простой, то отталкивание от границ симуляции реализовано путем отражения соответствующих скоростей от плоскости границ.

Таблица 1. Параметры жидкости

Параметр	Значение
$h$	0.2
$m$	30
$\rho_0$	1000
$\mu$	0.01
$g$	10
$\Delta t$	0.1

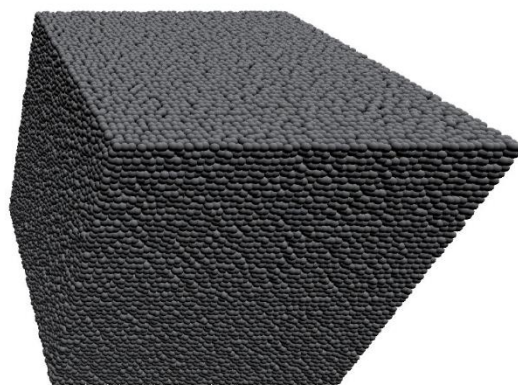


Рисунок 6. Простой прорыв плотины, начальная конфигурация



Рисунок 7. Простой прорыв плотины, смещение жидкости в сторону

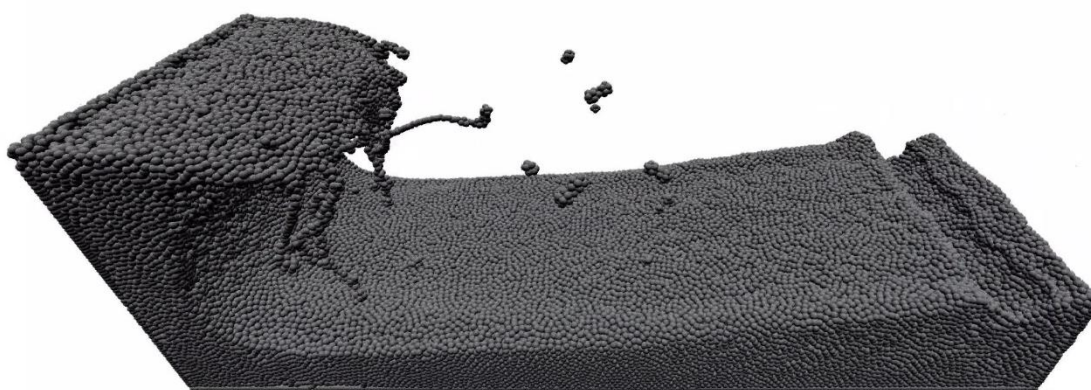


Рисунок 8. Простой прорыв плотины, столкновение жидкости с левой стенкой



Рисунок 9. Простой прорыв плотины, возвращение жидкости

### 3.2. Падение жидкости в куб

На рисунках 10-13 показано развитие системы с учетом того, что жидкость падает в куб. Количество частиц в симуляции – 343000. На рисунке 11 отчетливо видно, что объем жидкости приобретает форму сферы, что является самой



низкоэнергетической из возможных. Параметры жидкости и условие отталкивания от границ аналогичны пункту 3.1.

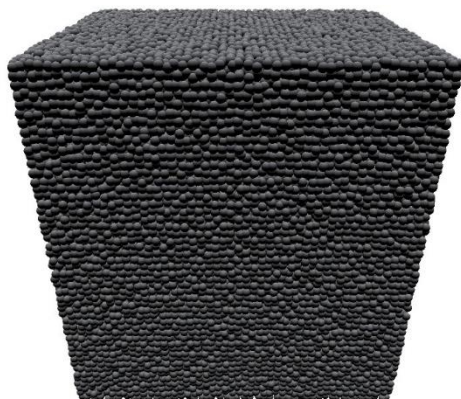


Рисунок 10. Падение жидкости в куб, начальная конфигурация



Рисунок 11. Падение жидкости в куб, формирование сферической формы



Рисунок 12. Падение жидкости в куб, столкновение с полом

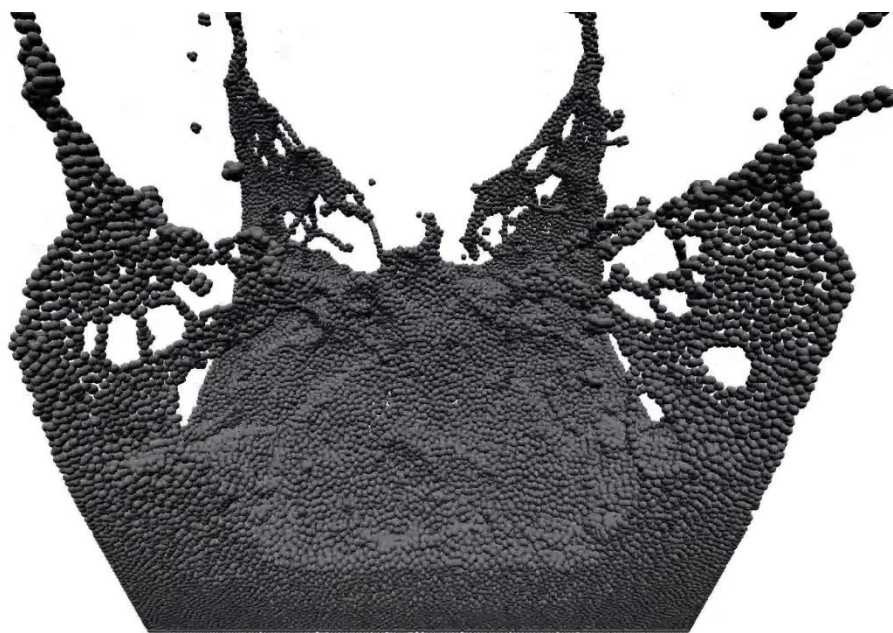


Рисунок 13. Падение жидкости в куб, всплеск

### 3.3. Моделирование потока

Для проверки поведения жидкости на ландшафте производится сравнение результатов статьи [13], в которой рассматривается моделирование нескольких сценариев разрушение плотины Калникой на Кипре в северной части Никосии, и собственных результатов моделирования.

Плотины являются гидротехническими сооружениями, предназначенными для удержания воды с целью регулирования и контроля стока. Основными задачами плотин является производство гидроэлектроэнергии, смягчение последствий наводнений и хранения воды. Ввиду того, что разрушение плотины может привести к катастрофическим наводнениям, которые наносят значительный ущерб инфраструктуре и могут приводить к человеческим жертвам, моделирование различных сценариев их разрушения является актуальной темой исследования.

Основными причинами разрушения плотин являются:

1. Переполнение, перелив и структурные проблемы.
2. Землетрясения, нарушение устойчивости склонов и человеческий фактор.
3. Прорывы, вызванные эрозией и другими природными процессами.

Классификация опасности наводнений [14], основанная на скорости и высоте воды, является важным аспектом понимания и управления рисками наводнений. Эта классификация помогает определить потенциальное воздействие на жизнь людей, инфраструктуру и окружающую среду.

Таблица 2. Уровни опасности и их описание

Опасность	Описание	Граница	Граница воды	Граница скорости
Н1	В целом безопасен для транспортных средств, людей и зданий	$VH \leq 0.3$	0.3 м	2.0 м/с
Н2	Небезопасно для небольших автомобилей	$VH \leq 0.6$	0.5 м	2.0 м/с
Н3	Небезопасно для транспортных средств, детей и пожилых людей	$VH \leq 0.6$	1.2 м	2.0 м/с
Н4	Небезопасно для транспортных средств и людей	$VH \leq 1.0$	2.0 м	2.0 м/с
Н5	Небезопасно для транспорта и людей. Все типы зданий подвержены структурным повреждения. Некоторые менее прочные здания уязвимы к разрушению	$VH \leq 4.0$	4.0 м	4.0 м/с
Н6	Небезопасно для транспорта и людей. Все типы зданий считаются уязвимыми к разрушению	$VH > 4.0$	—	—

Графически опасности наводнений изображены на рисунке 14. Он указан для удобства сравнения симуляции наводнения, проведенной в данной работе и результатов оригинальной статьи.

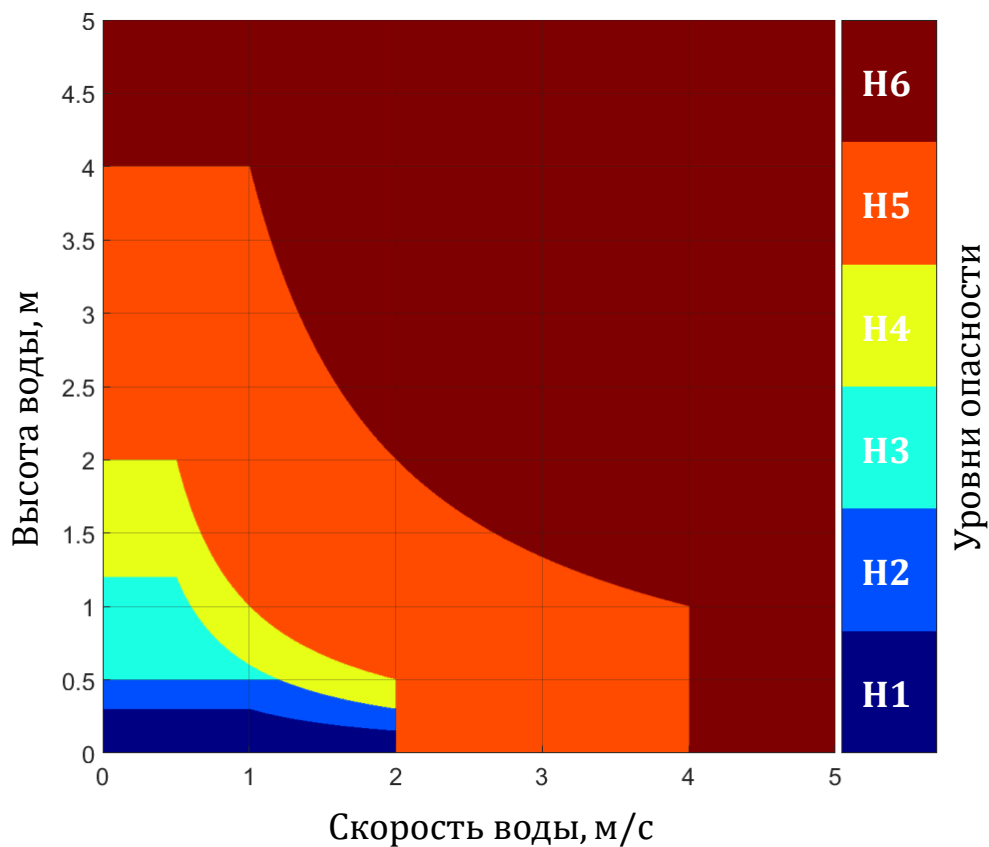


Рисунок 14. Графическое изображение классификации наводнений

На рисунке 15 представлена область симуляции, плотина Калникой расположена слева сверху.

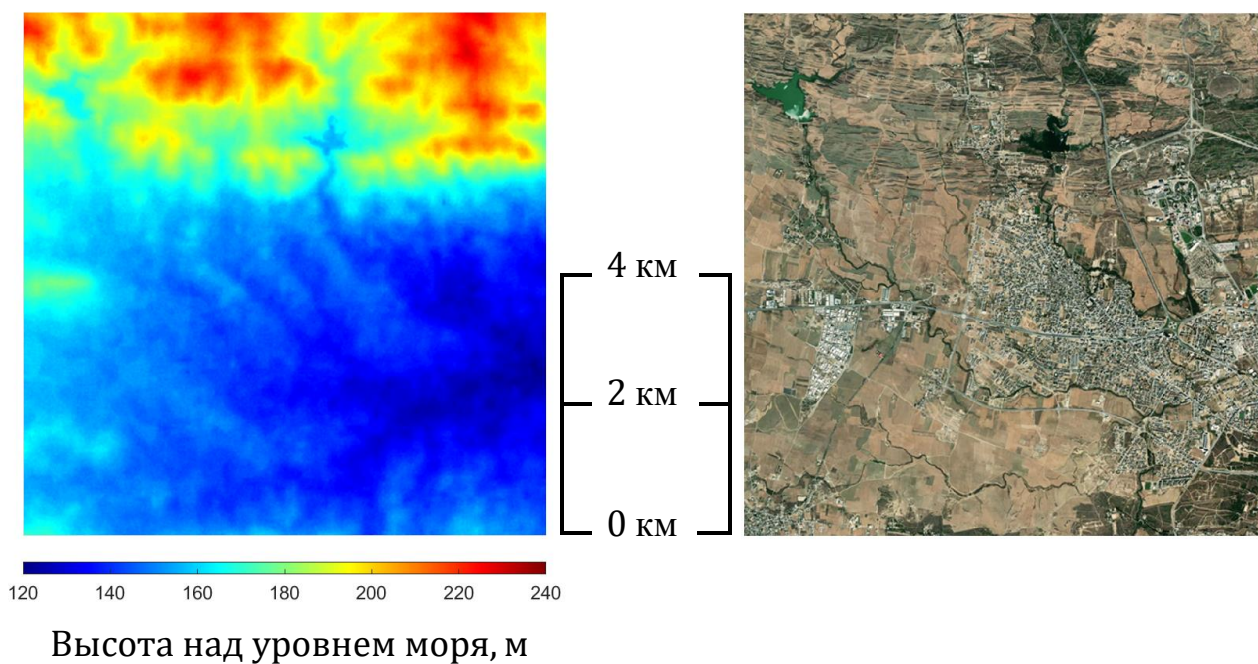


Рисунок 15. Карта высот (слева) и спутниковая карта (справа)

На рисунке 16 представлено как выглядит область симуляции при наложении на карту высот спутниковой карты. Масштабы по высоте не совпадают с масштабом поверхности специально, для наглядного отображения.



Рисунок 16. Область симуляции

Параметры симуляции указаны в таблице 3. Разрушение дамбы производилось путем создания на карте высот окна шириной в 40 метров, через которую может течь жидкость. Результаты моделирования показаны на рисунках 17-19.

Таблица 3. Параметры симуляции

Объем жидкости в резервуаре, м <sup>3</sup>	1 100 000
Радиус сглаживания, $h$ , м	0.31
Масса частицы, $m$ , кг	125
Число частиц в симуляции	~12 000 000
Шаг интегрирования, $\Delta t$ , с	0.1
Время симуляции, ч	4.5
Время для симуляции, ч	16.8

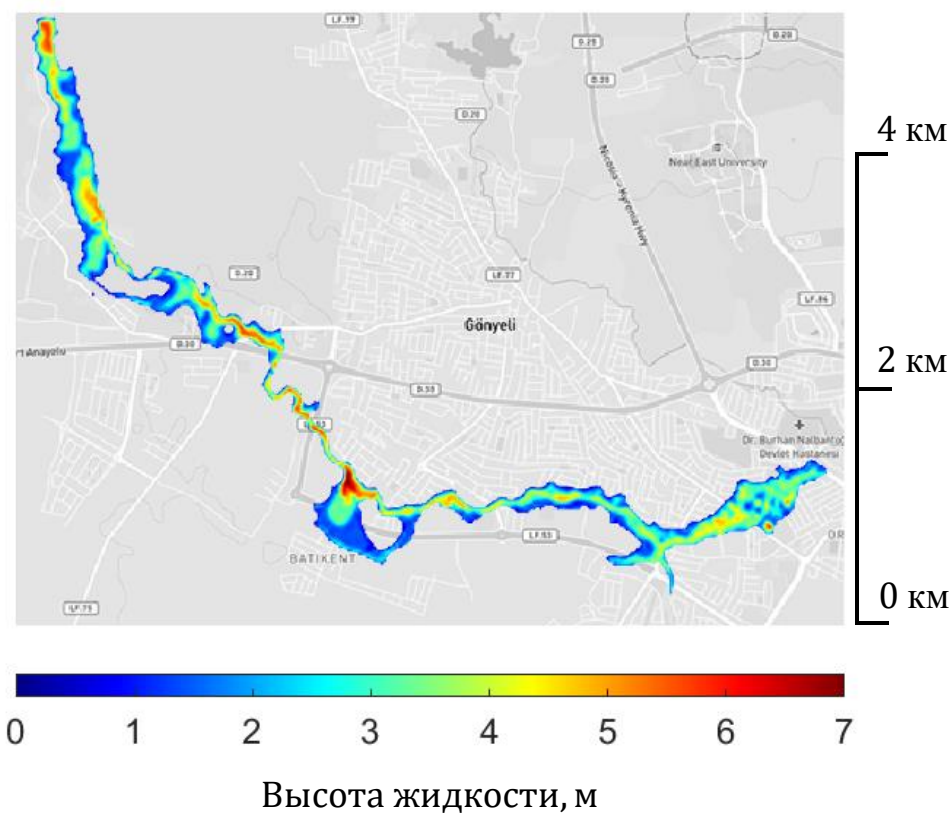


Рисунок 17. Максимальная высота жидкости во время симуляции

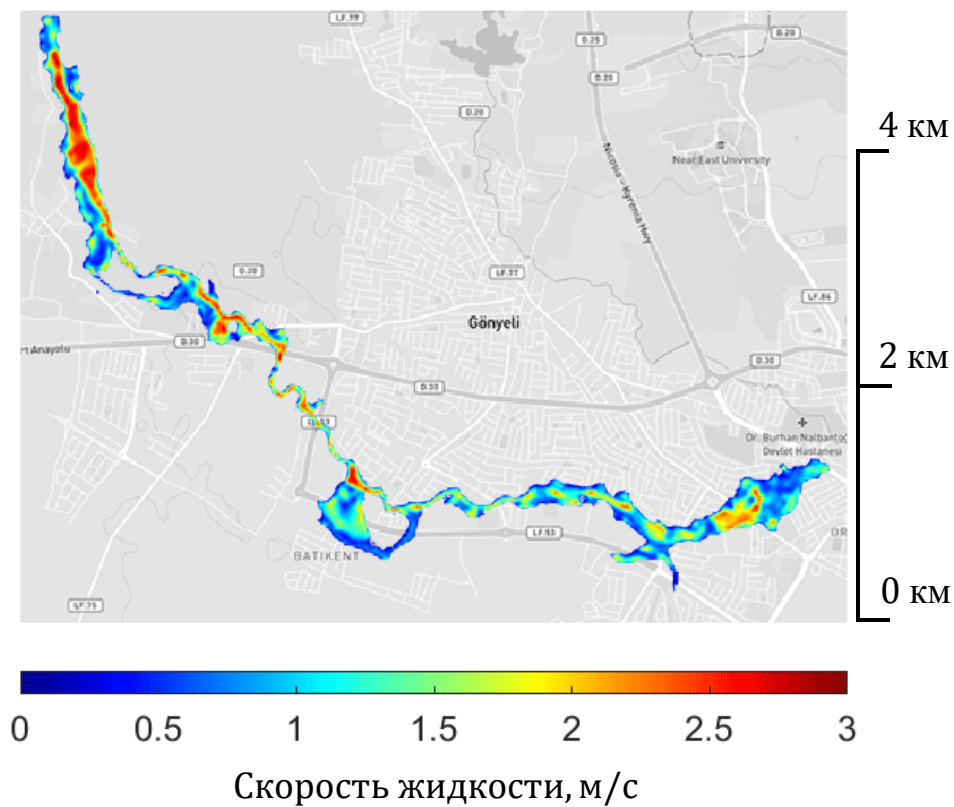
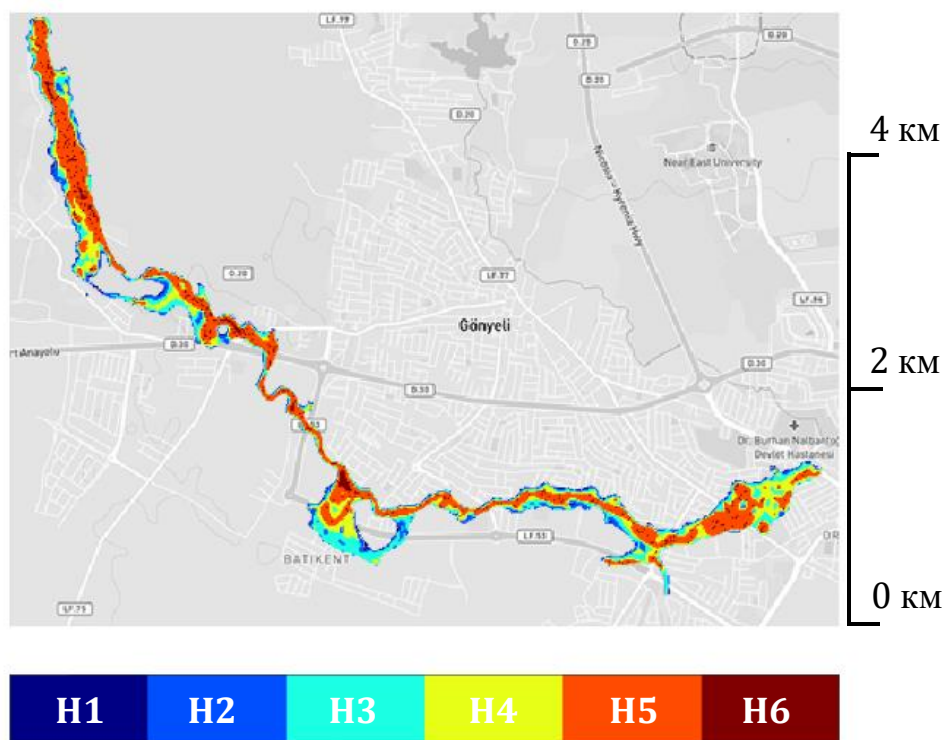


Рисунок 18. Максимальная скорость жидкости во время симуляции



### Уровень опасности

Рисунок 19. Уровень опасности

В таблице 4 приведено сравнение результатов симуляции и результатов, полученных в статье по параметру общей затопленной зоны.

Таблица 4. Сравнение суммарной площадь затопленной зоны, метры квадратные

Результаты статьи		Симуляция
Сценарий 1	Сценарий 2	
1 770 000	2 229 791	2 038 725

В таблице 5 приведено сравнение относительного участия уровней опасности в затопленной зоне. Для уровней опасности H1-H3 результаты симуляции попадают в диапазон результатов статьи, уровни H4 и H6 незначительно отличается, тогда как H5 имеет наибольшее отличие.



Таблица 5. Сравнение площадей, соответствующих уровням опасности, относительно общей затопленной зоны

Опасность	Результаты статьи		Симуляция
	Сценарий 1	Сценарий 2	
H1	15.9	13.2	14.6
H2	13.9	12.2	12.6
H3	22.6	19.2	19.6
H4	13.8	14.2	14.5
H5	23.3	25.5	30.6
H6	10.6	14.8	8.1

### 3.4. Моделирование эрозии

На рисунке 20 показана карта высот и карта осадков. Карта осадков показывает, в какой точке имеется шанс появления частицы жидкости. Параметры коэффициентов эрозии указаны в таблице 6.

Таблица 6. Значения коэффициентов

Коэффициент	Значение
$K_c$	0.16
$K_s$	0.025
$K_d$	0.05

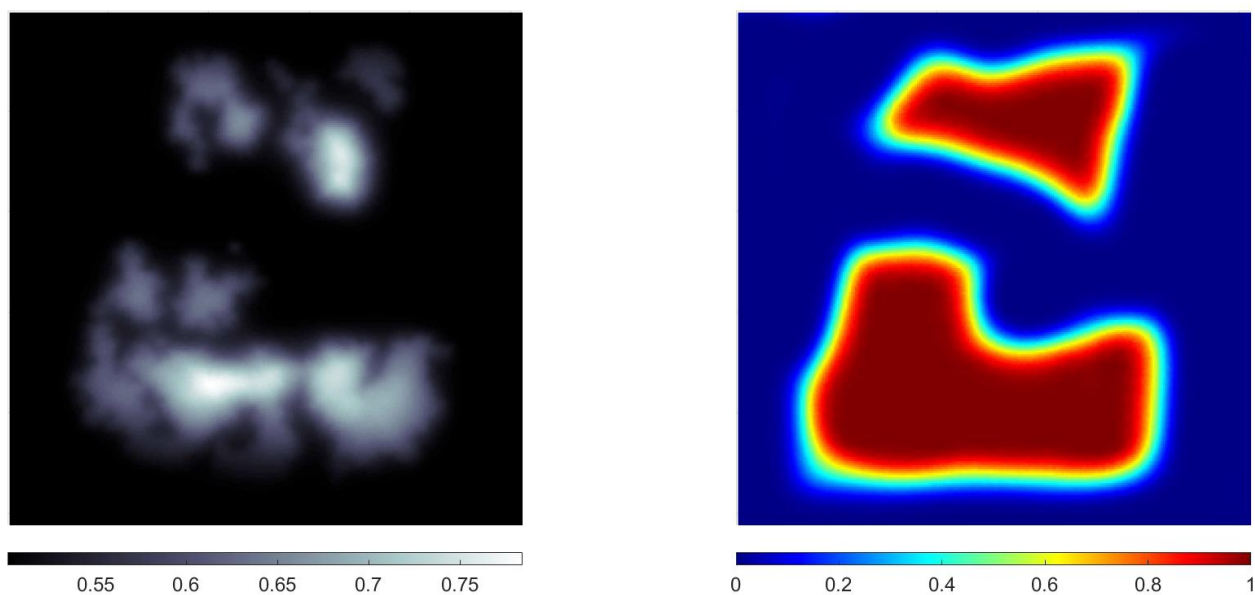


Рисунок 20. Карта высот (слева) и карта осадков (справа)

На рисунках 21-24 показан процесс эрозии. Начиная с рисунка 22 видно в каких местах относительно начальных высот порода вымывается, также видно формирование ручьев. На рисунке 23 отчетливо видно озеро, из которого на рисунке 24 начинает вытекать вода.

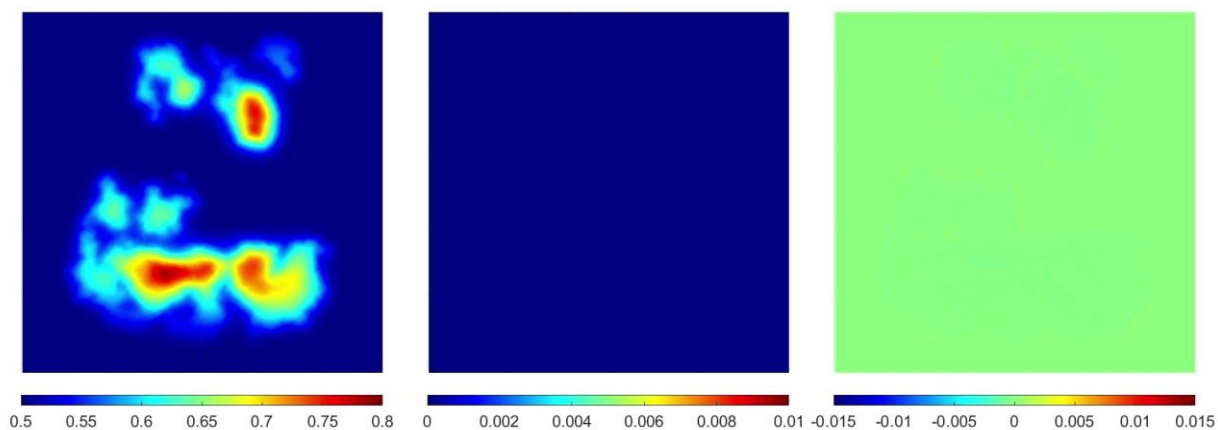


Рисунок 21. Карта высот, карта уровней воды над поверхностью и разница между нынешней картой высот и изначальной, кадр 1/4.

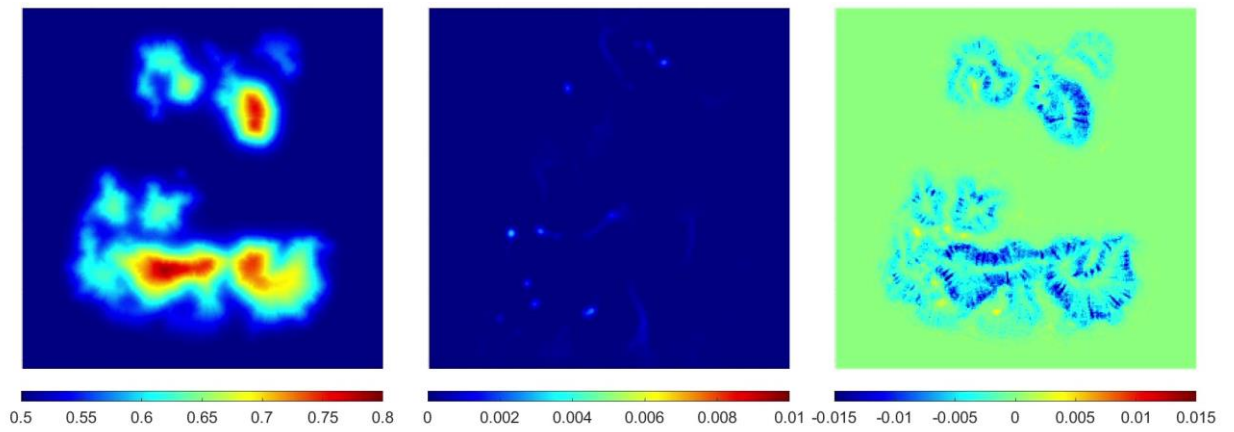


Рисунок 22. Карта высот, карта уровней воды над поверхностью и разница между нынешней картой высот и изначальной, кадр 2/4.

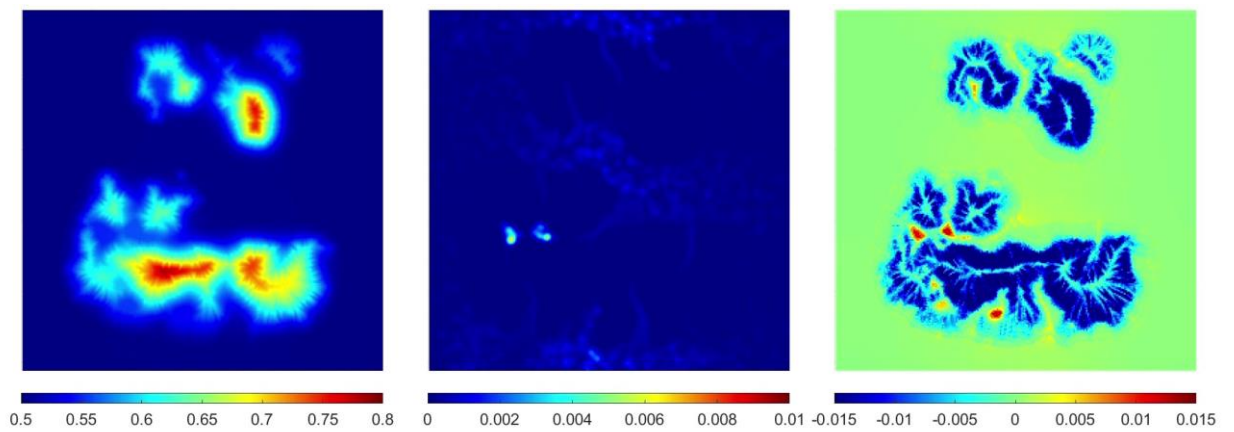


Рис. 23. Карта высот, карта уровней воды над поверхностью и разница между нынешней картой высот и изначальной, кадр 3/4.

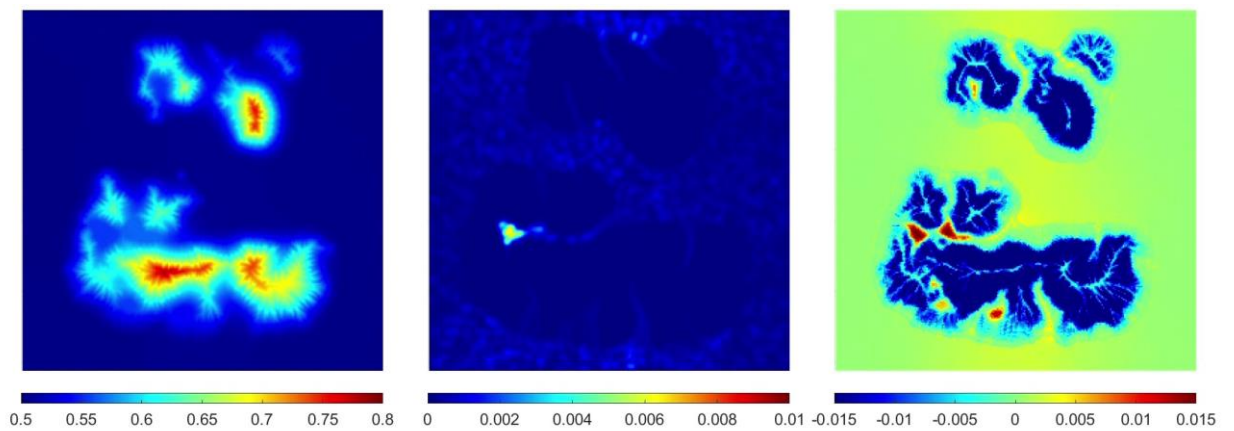


Рисунок 24. Карта высот, карта уровней воды над поверхностью и разница между нынешней картой высот и изначальной, кадр 4/4.

На рисунках 25 и 26 показан ландшафт до эрозии и после эрозии соответственно. Результат сравним с результатами статьи [5].

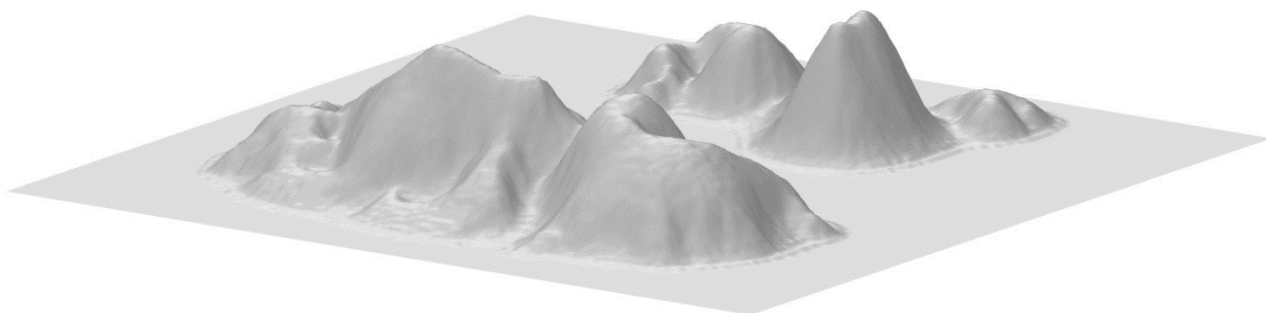


Рисунок 25. Ландшафт до эрозии

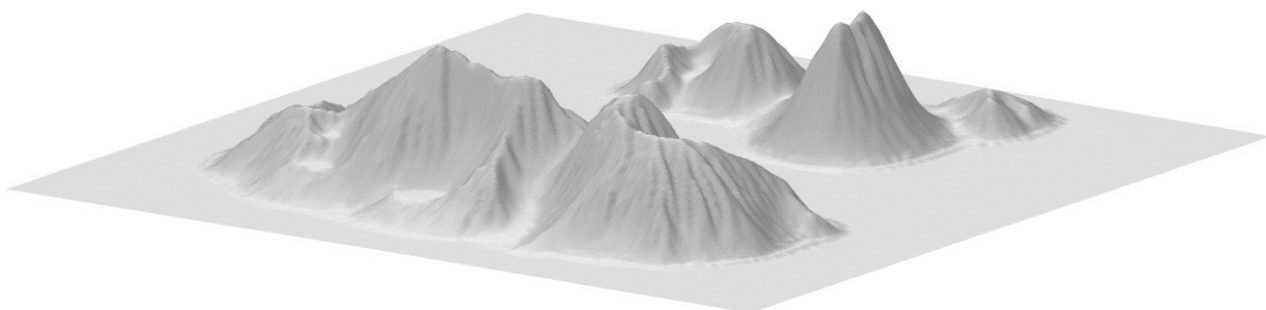


Рисунок 26. Ландшафт после эрозии

Немаловажным фактором является схожесть результатов симуляций и реальных ландшафтов. Так, например, на рисунках 27 и 28 приводится сравнение сгенерированного и реального рельефов. Реальный рельеф рисунка 27 можно найти по координатам (68.244682, - 146.602107), рисунка 28 по координатам (67.562387, - 161.537900).



Рисунок 27. Ландшафт смоделированный (слева) и реальный (справа)



Рисунок 28. Ландшафт смоделированный (слева) и реальный (справа)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена проблема моделирования изменения рельефа территории посредством эрозии с использованием метода гидродинамики сглаженных частиц (SPH). Основная цель исследования заключалась в создании реалистичной симуляции процесса эрозии, что имеет широкий спектр применений, включая разработку компьютерных игр, геологическое моделирование и проектирование гидротехнических сооружений.

Были изучены фундаментальные уравнения гидродинамики, включая уравнения Навье-Стокса, описывающие движение вязкой жидкости.

Метод гидродинамики сглаженных частиц был выбран для моделирования жидкости благодаря его способности эффективно обрабатывать сложные взаимодействия между жидкостями и твердыми телами без необходимости использования фиксированной сетки.

Применение пространственной сетки и параллельных вычислений значительно ускорило процесс моделирования, позволяя достичь более быстрых результатов.

Были успешно смоделированы различные сценарии, включая наводнение и движение жидкости внутри параллелепипеда.

Результаты работы могут быть использованы для создания реалистичных ландшафтов в компьютерных играх, что улучшит погружение и визуальную привлекательность игровых миров. Методы, разработанные в ходе исследования, могут применяться в геологии для предсказания изменений рельефа местности под воздействием природных факторов. В инженерной практике, моделирование эрозии поможет в проектировании устойчивых гидротехнических сооружений, таких как плотины и каналы.

Работа показала, что метод гидродинамики сглаженных частиц является мощным инструментом для моделирования сложных процессов, таких как

эрозия. Он позволяет получить высокоточные и реалистичные результаты, которые могут быть применены в различных областях. Дальнейшие исследования могут быть направлены на улучшение алгоритмов оптимизации и расширение области применения метода SPH для моделирования других природных и техногенных процессов.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hendra, A. (2015) Examensarbete 30 hp Accelerating Fluids Simulation Using SPH and Implementation on GPU.
2. Hudák, M. and Ďurikovič, R. (2011) “Terrain models for mass movement erosion,” in Theory and Practice of Computer Graphics 2011, TPCG 2011 - Eurographics UK Chapter Proceedings, pp. 9–16.
3. Jákó, B. (no date) Fast Hydraulic and Thermal Erosion on the GPU.
4. Jakob, / W et al. Smoothed Particle Hydrodynamics Techniques for the Physics Based Simulation of Fluids and Solids.
5. Lim, F.Y., Tan, Y.W. and Bhojan, A. (2022) “Visually Improved Erosion Algorithm for the Procedural Generation of Tile-based Terrain.”
6. Mei, X., Decaudin, P. and Hu, B.-G. (2007) “Fast Hydraulic Erosion Simulation and Visualization on GPU,” pp. 47–56.
7. Onderik, J. (2007) Efficient Neighbor Search for Particle-based Fluids, Journal of the Applied Mathematics.
8. Seshu, P. (2003) Textbook of finite element analysis. Prentice Hall.
9. Sigalotti, L.D.G. et al. (2023) “SPH simulations and experimental investigation of water flow through a Venturi meter of rectangular cross-section,” Scientific Reports, 13(1).
10. Simon Schirm Matthias Teschner Bruno Heidelberger Markus Gross ETH Zürich, uller Interaction of Fluids with Deformable Solids.
11. Skorkovská, V., Kolingerová, I. and Benes, B. (2015) “Hydraulic erosion modeling on a triangular mesh,” in Lecture Notes in Geoinformation and Cartography. Kluwer Academic Publishers, pp. 237–247.
12. Št’ava, O. et al. Interactive Terrain Modeling Using Hydraulic Erosion.



13. Turkel, A.O., Zaifoglu, H. and Yanmaz, A.M. (2024) “Probabilistic modeling of dam failure scenarios: a case study of Kanlikoy Dam in Cyprus,” Natural Hazards [Preprint].
14. Department of Planning and Environment Flood Hazard Flood Risk Management Guide FB03 (2022).
15. Young, P. Physics 115/242 The leapfrog method and other “symplectic” algorithms for integrating Newton’s laws of motion.