

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А.М. Кривцов
«__» _____ 2023г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ОДНОМЕРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ ПРОСТОЙ СТРУКТУРЫ

по направлению подготовки

01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

Направленность

01.04.03_01 «Механика деформируемого твердого тела»

Выполнил
студент гр.5040103/10101

Ю.В. Ермолаева

Руководитель
д.ф.-м.н., проф. ВШТМиМФ

В.А. Кузькин

Консультант
по нормоконтролю

Е.А. Хайбулова

Санкт-Петербург – 2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

«__» 2023 г.

ЗАДАНИЕ

**на выполнение выпускной квалификационной
работы**

студентке Ермолаевой Юлии Владимировне, гр.5040103/10101

1. Тема работы: Исследование динамики одномерных и двумерных гармонических кристаллов простой структуры
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 26.05.2023
3. Исходные данные по работе: отсутствуют.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): найти приближённое выражение для поля перемещений в бесконечной цепочке Гука на упругом основании при локальном периодическом силовом нагружении; найти приближённые выражения для полей перемещений и скоростей в квадратной решетке при мгновенном точечном возмущении.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): отсутствует.
6. Консультанты по работе: отсутствуют.
7. Дата выдачи задания 27.02.2023

Руководитель ВКР _____ В.А. Кузькин, профессор ВШТМиМФ
д.ф.-м.н. инициалы, фамилия
(подпись)

Задание принял к исполнению 27.02.2023
(дата)

Студент _____ Ю.В Ермолаева
(подпись) инициалы, фамилия

РЕФЕРАТ

На 50 с., 16 рисунков

БЕСКОНЕЧНАЯ ЦЕПОЧКА ГУКА, КВАДРАТНАЯ РЕШЕТКА, АСИМПТОТИКА НА ПОДВИЖНОМ ФРОНТЕ, МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ.

Тема выпускной квалификационной работы: «Исследование динамики одномерных и двумерных гармонических кристаллов простой структуры».

Рассматривается динамика бесконечной цепочки Гука на упругом основании, подверженной локальному силовому нагружению. Построены приближённые решения для перемещений частиц при разных частотах нагружения. Исследован характер распространения или локализации возмущений в зависимости от частоты нагружения.

Обобщён подход, заключающийся в построении асимптотики решения динамической задачи (на подвижных фронтах) на квадратную решётку, совершающую поперечные колебания. Построено приближённое решение для поля скоростей частиц. Ожидается, что результаты исследования могут быть применены к упрощению методов решения нестационарных задач баллистической теплопроводности.

ABSTRACT

50 pages, 16 figures

KEYWORDS: INFINITE HOOKE CHAIN, SQUARE LATTICE, ASYMPTOTICS ON A MOVING FRONT, STATIONARY PHASE METHOD.

The dynamics of an infinite chain is under consideration. Approximate solutions for particle displacements at different frequencies of force loading are obtained. The nature of propagation or localization of perturbations depending on the loading frequency is investigated.

An approach of asymptotics of the solution of the dynamical problem (at moving fronts) is proposed for a square lattice, performing transversal oscillations. An approximate solution for the particle velocity field is constructed. The results of the study are expected to be applied for the simplification of methods in unsteady problems of ballistic heat transfer.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПочки ГУКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ	8
1.1. Постановка задачи	8
1.2. Точное решение	9
1.3. Приближённое решение	10
1.3.1. Вклад, соответствующий собственным возмущениям	11
1.3.2. Вклад, соответствующий вынужденным колебаниям	17
1.3.3. Итоговое приближённое решение	22
1.4. Заключение к главе 1	30
ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЁТКИ ПРИ МГНОВЕННОМ ВОЗМУЩЕНИИ	32
2.1. Постановка задачи	32
2.2. Поле скоростей частиц. Точное решение	33
2.3. Приближённое решение	34
2.4. Заключение к главе 2	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	45
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	46

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и теоретическая значимость

Одной из важнейших проблем, которая всегда являлась и остаётся актуальной в инженерном деле — это отклик какой-либо конструкции или системы на внешнее воздействие. Те же линии электропередач [34] или подвесные мосты появились благодаря специалистам, которые углублялись в эту проблему. В настоящее время проблема отклика системы на внешнее воздействие сместилась из макроуровня на микро- и наноуровень [21, 5]. В частности, появились работы, связанные с проведением экспериментов по охлаждению [20] и лазерному нагреву кристаллов [38].

Однако проведение таких экспериментов требует располагать знаниями о механических и тепловых свойствах наноматериалов. Механические свойства наноматериалов определяются различными способами от теоретического до молекулярно-динамического моделирования [6]. Что касается тепловых свойств, проблема их изучения сопряжена с задачами теплопроводности на наноуровне. Исследованию последнего посвящено множество работ, из которых, с одной стороны — обзорные [9, 8, 27, 33], с другой стороны — теоретические. Последние выявили широкий круг явлений, такие как тепловые волны [40], анизотропия температурного поля [25], различные температуры [29], отражение тепловых волн от свободной границы [28] и т.д. Однако вышеперечисленные работы посвящены исследованию процессов теплопроводности в однородных кристаллах, нагретых мгновенно.

Что касается теплопроводности в пространственно неоднородных кристаллах, хотя подходы к её исследованию для некоторых систем разрабатываются [17, 37], в целом, задачи, связанные с ними, весьма громоздки в плане построения аналитической математической модели. Следовательно, возникает

необходимость поиска приближённых решений задач динамики методом динамики решётки. Также стоит отметить сложность и громоздкость построения решений задач, связанных с подводом тепловой энергии в кристалл. Например, ранее полученные результаты для вышеуказанных квадратной [14] и графеновой решёток [15] свидетельствуют о сингулярности континуального решения для кинетической температуры во множестве точек, из чего можно сделать вывод о необходимости уточнения континуальной модели с учётом дискретности структуры. Для того чтобы разработать подход к качественному описанию отклика широкого круга кристаллических решёток на тепловой подвод (а он соответствует стохастическому силовому нагружению), необходимо знание об их реакции на детерминированный подвод, например, происходящий по синусоидальному закону.

С целью продвинуться в разрешении проблем, описанных выше, в настоящей работе предлагаются подход к приближённому решению задачи динамики бесконечной цепочки Гука¹ на упругом основании, подверженной локальному силовому нагружению и подход, связанный с нахождением асимптотики поля скоростей в квадратной решётки на подвижном фронте. Предполагается, что результаты, полученные по сформулированным выше задачам, могут быть вспомогательными для исследования динамических, а с ними — и нестационарных тепловых задач для более сложных структур.

Практическая значимость

Задачи, предлагаемые к рассмотрению, имеют прямую связь с нестационарными задачами теплопроводности на наноуровне. Исследование последних имеет актуальность в связи с развитием технологии производства нанопроцессоров, а значит, и возникновением необходимости разрешать проблемы отвода тепла от них [10]. Кроме того, развитие теории имеет значимость для проектирования

¹Цепочкой Гука называют цепочку из одинаковых частиц, связанных линейными пружинками (см. [23]).

тепловых диодов [30] и тепловых транзисторов [31].

Достоверность

Достоверность результатов, представленных в работе, обеспечена строгой постановкой задач, сравнением результатов, соответствующих аналитическим выкладкам, с результатами численного моделирования.

ГЛАВА 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПОЧКИ ГУКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

1.1. Постановка задачи

В настоящей главе в качестве модели деформируемого твёрдого тела используется бесконечная цепочка Гука (состоящая из одинаковых частиц массой m , соединённых линейными пружинками жёсткостью c), находящаяся на упругом основании с положительной жёсткостью d (см. рисунок 1).

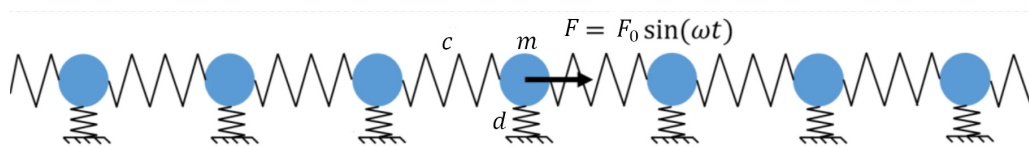


Рис. 1: Цепочка Гука на упругом основании [24].

Предположим следующее:

1. Частицы взаимодействуют только с ближайшими соседями.
2. На одну из частиц (проиндексируем её нулём) действует внешняя сила по синусоидальному закону с амплитудой F_0 и частотой ω .

В силу предположений, написанных выше, запишем уравнение движения для частицы n в следующем виде:

$$m\ddot{u}_n = c(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - du_n + F_0 \sin(\omega t)\delta_{n0}, \quad (1)$$

где u_n — перемещение частицы; δ_n — символ Кронекера. Здесь символ $(\dot{\dots})$ означает дифференцирование по времени. Начальные условия для перемещений

и скоростей частиц положим нулевыми:

$$u_n = 0, \quad \dot{u}_n = 0. \quad (2)$$

1.2. Точное решение

Задача, удовлетворяющая уравнению (1), решена для бесконечной цепочки Гука ($d = 0$) П. Хеммером [18]. Что касается цепочки на упругом основании, точное решение для поля перемещений частиц этой системы найдено в [24] с использованием прямого и обратного дискретных преобразований Фурье при периодических граничных условиях, для ячейки периодичности, содержащей N частиц. Решение задачи имеет следующий вид [24]:

$$u_n = \frac{F_0}{mN} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\Omega_j \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega_j t)) e^{i\frac{2\pi j n}{N}}}{\Omega_j(\Omega_j^2 - \omega^2)}, \quad i^2 = -1, \quad (3)$$

где $\Omega_j = \Omega\left(\frac{2\pi j}{N}\right)$ определяется дисперсионным соотношением (соответствующим полосе пропускания) для цепочки Гука на упругом основании:

$$\Omega(\theta) = \sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 + 4\omega_e^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \omega_{\text{cut}} = \sqrt{\frac{d}{m}}, \quad \omega_e = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (4)$$

где θ — волновое число; ω_e — элементарная частота колебаний атома; ω_{cut} — нижняя частота отсечки. Тогда поле перемещений в бесконечной цепочке Гука определяется пределом решения (3) при $N \rightarrow \infty$:

$$u_n = \frac{F_0}{2\pi m} \int_0^{2\pi} \frac{(\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)) e^{i\theta n}}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} d\theta. \quad (5)$$

Итак, получено точное решение для поля перемещений в бесконечной цепочке Гука на упругом основании, подверженной локальному силовому нагружению, записанное в интегральном виде. Однако, интегральное представление поля перемещений недоступно для анализа особенностей распространения воз-

мущений в рассматриваемой системе в зависимости от частоты нагружения. Следовательно, ниже приводится вывод приближённого решения для u_n .

1.3. Приближённое решение

В настоящем параграфе точное решение уравнений динамики (5), записанное в интегральной форме, используется для построения приближённого решения, записанного в замкнутой форме. Для построения приближенного решения применяется подход, связанный с разделением вкладов: от вынужденных и собственных возмущений² системы. Впервые такой подход предложен П. Хеммером в его докторской диссертации [18], где рассматривалась бесконечная цепочка Гука без упругого основания. Однако, там делался акцент на построении стационарного решения ($t \rightarrow \infty$) при устремлении к нулю затухающего во времени вклада от собственных возмущений, записанного через хорошо известное решение Шрёдингера [36]. Тот же подход применялся для полубесконечной цепочки Гука, подверженной кинематическому нагружению на свободном конце [7]. Здесь предлагается подход, связанный с анализом вклада от собственных колебаний на больших временах. Этот подход впервые применён в динамической задаче для полубесконечной цепочки Гука, подверженной силовому нагружению на конце [42]. В настоящей работе он используется для бесконечной цепочки Гука на упругом основании, несколько более усложнённой системы.

Перепишем выражение (5) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_{n(\text{eig})} + u_{n(\text{forced})}, \\
 u_{n(\text{eig})} &= \frac{F_0 \omega}{2\pi m} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\Omega t) e^{i\theta n}}{\Omega(\omega^2 - \Omega^2)}, \\
 u_{n(\text{forced})} &= \frac{F_0 \sin(\omega t)}{2\pi m} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta n} d\theta}{\Omega^2 - \omega^2},
 \end{aligned} \tag{6}$$

²При нулевых начальных условиях внезапная внешняя сила приводит к собственным возмущениям системы, помимо возмущений с частотой той силы.

разделяя на два слагаемых, стоящих при $\sin(\omega t)$ и $\sin(\Omega t)$. Слагаемое $u_{n(\text{eig})}$ определяет вклад, соответствующий собственным возмущениям, распространяющимся в цепочке. В свою очередь, слагаемое $u_{n(\text{forced})}$ определяет вклад, соответствующий вынужденным колебаниям. Далее приведём вывод для каждого вклада.

1.3.1. Вклад, соответствующий собственным возмущениям

Выражение для вклада $u_{n(\text{eig})}$ не может быть найдено аналитически, однако возможна асимптотическая оценка его поведения на больших временах ($\omega t \gg 1$). Распишем уравнение для $u_{n(\text{eig})}$ в (6) в виде следующей суммы:

$$u_{n(\text{eig})} = u_{n(\text{eig})}^{\text{sing}} + u_{n(\text{eig})}^{\text{stat}}, \quad (7)$$

где выражение для $u_{n(\text{eig})}^{\text{sing}}$ определяет вклад от сингулярной точки подынтегрального выражения в (6), а выражение для $u_{n(\text{eig})}^{\text{stat}}$ — вклад от стационарной точки. Последнее представляет собой асимптотику вклада $u_{n(\text{eig})}$ на подвижном фронте. Перепишем выражение для $u_{n(\text{eig})}$ в виде

$$\begin{aligned} u_{n(\text{eig})} &= \frac{F_0\omega}{2\pi m} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\Omega(\theta)t) \cos(n\theta)}{\Omega(\theta)(\omega^2 - \Omega(\theta)^2)} d\theta = \\ &= \frac{F_0\omega}{4\pi m} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\Omega(\theta)t - n\theta)}{\Omega(\theta)(\omega^2 - \Omega(\theta)^2)} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\Omega(\theta)t + n\theta)}{\Omega(\theta)(\omega^2 - \Omega(\theta)^2)} d\theta \right) \\ &= \frac{F_0\omega}{2\pi m} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\Omega(\theta)t - n\theta)}{\Omega(\theta)(\omega^2 - \Omega(\theta)^2)} d\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

где последнее равенство справедливо в силу симметрии решения относительно нулевой частицы, или

$$u_{n(\text{eig})} = \frac{F_0\omega}{m} \text{Im } I^{\text{stat}}, \quad I^{\text{stat}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\Omega t - n\theta)}}{\Omega(\omega^2 - \Omega^2)} d\theta. \quad (9)$$

Для того чтобы оценить интеграл I^{stat} , стоящий в выражении (9), воспользу-

емся подходом, предложенным в [11] впервые для дискретных систем³.

Положим $|n| = w\omega_e t$, временно рассматривая переменную n как непрерывно меняющуюся на бесконечном интервале. Здесь переменная w имеет смысл безразмерной постоянной во времени скорости точки наблюдения. Тогда выражение для интеграла I^{stat} можно записать как

$$I^{\text{stat}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi(\theta)\omega_e t} d\theta}{\Omega(\omega^2 - \Omega^2)}, \quad \varphi(\theta) = \sqrt{\tilde{\omega}_{\text{cut}}^2 + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} - w\theta, \quad \tilde{\omega}_{\text{cut}} = \frac{\omega_{\text{cut}}}{\omega_e} = \sqrt{\frac{d}{c}}. \quad (10)$$

Интеграл, записанный в формуле (10) имеет тип интеграла Фурье:

$$I = \int f(\theta) e^{i\varphi(\theta)\omega_e t} d\theta. \quad (11)$$

Чтобы его оценить на больших временах, применим метод стационарной фазы.

Выражение для главного члена асимптотики интеграла I , \check{I} , имеет вид [2]

$$\check{I} = \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(\theta_s)|\omega_e t}} f(\theta_s) e^{i(\varphi(\theta_s)\omega_e t + \frac{\pi}{4} \text{sgn} \varphi''(\theta_s))}, \quad (12)$$

где θ_s — стационарная точка, удовлетворяющая условию

$$\varphi'(\theta_s) = 0. \quad (13)$$

Здесь $(...)'$ означает дифференцирование по волновому числу. Таким образом,

$$I \simeq H(1-w)\check{I} + O((\omega_e t)^{-1}), \quad \omega_e t \rightarrow \infty, \quad (14)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда. Подстановка $\varphi(\theta)$ из уравнения (10) в (14)

³Для континуальных систем подход, рассмотренный ниже, впервые был применён Л.И. Слепяном [3], затем С.Н. Гавриловым [12].

приводит к следующему уравнению для нахождения стационарной точки

$$\frac{\sin \theta_s}{\sqrt{\tilde{\omega}_{\text{cut}}^2 + 4 \sin^2 \frac{\theta_s}{2}}} = w. \quad (15)$$

Левая часть уравнения (15) прямо пропорциональна групповой скорости рассматриваемой системы, определяемой в виде зависимости от волнового числа как

$$v_g(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} a \frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{v_s \omega_e \sin \theta}{\sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 + 4\omega_e^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}, \quad (16)$$

где a — длина связи между частицами в недеформированном состоянии; v_s — скорость звука. Таким образом, уравнение (15) можно записать в виде

$$\tilde{v}_g(\theta_s) = w, \quad \tilde{v}_g = \frac{v_g}{v_s}, \quad (17)$$

а область определения w — в виде

$$0 < w < \max \tilde{v}_g, \quad (18)$$

где $\max \tilde{v}_g$ — величина, прямо пропорциональная максимальной групповой скорости. Для того чтобы её определить, найдём точку экстремума θ_m из уравнения

$$\tilde{v}'_g(\theta_m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \theta_m = 2 \arccos \left(\frac{\sqrt{4 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2} - \tilde{\omega}_{\text{cut}} \sqrt{4 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2}}{2} \right). \quad (19)$$

Легко проверить, что $\tilde{v}''_g(\theta_m) < 0$. Следовательно, θ_m — точка максимума. Тогда

$$\max \tilde{v}_g = \tilde{v}_g(\theta_m) = \frac{\sqrt{\tilde{\omega}_{\text{cut}}^2 + 4} - \tilde{\omega}_{\text{cut}}}{2}. \quad (20)$$

Из уравнения (17) стационарная точка θ_s определяется как

$$\theta_{s1,2}(w) = 2 \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + w^2 \pm \sqrt{1 - w^2(2 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2) + w^4}}}{\sqrt{2}} \right). \quad (21)$$

Вычислим вторую производную фазы φ в стационарных точках:

$$\varphi''(\theta_{s1,2}) = \pm \frac{\sqrt{1 + w^4 - w^2(2 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2)}}{\sqrt{2 - 2w^2 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2 \mp 2\sqrt{1 + w^4 - w^2(2 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2)}}}. \quad (22)$$

Поскольку модуль $|\varphi''(\theta_s)|$ не обращается в ноль во всей области определения w (18), найденные стационарные точки не являются вырожденными. Тогда, учитывая (13), (18) и (12) и, суммируя все вклады от стационарных точек, получим

$$\begin{aligned} I^{\text{stat}}(w, t) &= \frac{H(\tilde{v}_g(\theta_m) - w)}{\sqrt{2\pi\omega_e t}} \sum_{j=1,2} \frac{e^{i(\varphi(\theta_{sj})\omega_e t + (-1)^{j-1}\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{|\varphi''(\theta_{sj})|\Omega(\theta_{sj}) (\omega^2 - \Omega(\theta_{sj})^2)}} + O((\omega_e t)^{-1}), \\ \Omega(\theta_{sj}(w)) &= \omega_e \sqrt{2 - 2w^2 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2 \mp 2\sqrt{1 + w^4 - w^2(2 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2)}}, \\ \varphi(\theta_{sj}(w)) &= \sqrt{2 - 2w^2 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2 \mp 2\sqrt{1 + w^4 - w^2(2 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2)}} \\ &\quad - 2w \arccos \left(\frac{\sqrt{1 + w^2 \pm \sqrt{1 - w^2(2 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2) + w^4}}}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда, вспоминая, что $w = |n|/(\omega_e t)$, запишем окончательное выражение для вклада $u_{n(\text{eig})}^{\text{stat}}$:

$$u_{n(\text{eig})}^{\text{stat}} = \frac{F_0 \omega H(\tilde{v}_g(\theta_m)\omega_e t - |n|)}{m\sqrt{2\pi\omega_e t}} \text{Im} \left(\sum_{j=1,2} \frac{e^{i(\varphi(\theta_{sj})\omega_e t + (-1)^{j-1}\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{|\varphi''(\theta_{sj})|\Omega(\theta_{sj}) (\omega^2 - \Omega(\theta_{sj})^2)}} \right) + O((\omega_e t)^{-1}). \quad (24)$$

Для того чтобы найти вклад от сингулярной точки, $u_{n(\text{eig})}^{\text{sing}}$, перепишем выра-

жение для $u_{n(\text{eig})}$ в виде

$$u_{n(\text{eig})} = \frac{F_0 \omega}{\pi m} \int_0^\pi \frac{\sin(\Omega(\theta)t) \cos(n\theta)}{\Omega(\theta)(\omega^2 - \Omega(\theta)^2)} d\theta. \quad (25)$$

Цель последнего действия, которое оправдано за счёт симметрии подынтегрального выражения как функции волнового числа относительно π состоит в том, чтобы, во-первых, уменьшить число необходимых для учёта особых точек подынтегрального выражения (до 1), во-вторых — для того чтобы можно было перейти от интеграла по волнового числу к интегралу по частотам:

$$u_{n(\text{eig})} = \frac{F_0 \omega a}{\pi m} \int_0^{\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}} \frac{\sin(\Omega t) \cos\left(2n \arcsin \frac{\sqrt{\Omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}}{2\omega_e}\right) d\Omega}{v_g(\Omega) \Omega (\omega^2 - \Omega^2)}, \quad (26)$$

$$v_g(\Omega) = \frac{a}{2\Omega} \sqrt{(\Omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2)(4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \Omega^2)}.$$

Поскольку представляет интерес не само значение интеграла, а асимптотическая оценка его вклада от сингулярной точки на больших временах, сделаем замену переменной $\omega - \Omega = \epsilon$, где $\epsilon \ll \omega$. Напишем следующие разложения в окрестности $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega + O\left(\frac{\epsilon}{\omega_e}\right), \\ v_g(\Omega) &= v_g(\omega - \epsilon) = v_g(\omega) + O\left(\frac{\epsilon}{\omega_e}\right), \\ \omega^2 - \Omega^2 &= (\omega - \Omega)(\omega + \Omega) = 2\omega\epsilon + O\left(\frac{\epsilon}{\omega_e}\right)^2, \\ \arcsin \frac{\sqrt{\Omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}}{2\omega_e} &= \arcsin \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}}{2\omega_e} + O\left(\frac{\epsilon}{\omega_e}\right) \\ \implies \cos\left(2n \arcsin \frac{\sqrt{\Omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}}{2\omega_e}\right) &= \mathcal{T}_{2n}\left(\frac{\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}}{2\omega_e}\right) + O\left(\frac{\epsilon}{\omega_e}\right), \end{aligned} \quad (27)$$

где $\mathcal{T}_n(x)$ — полином Чебышева 1 рода n -ой степени. Тогда выражение (26)

можно приближённо записать в виде

$$u_{n(\text{eig})} \approx -\frac{F_0 a \mathcal{T}_{2n} \left(\frac{\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}}{2\omega_e} \right)}{2\pi m \omega v_g(\omega)} \int_{\omega}^{\omega - \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}} \frac{\sin((\omega - \epsilon)t) d\epsilon}{\epsilon}, \quad (28)$$

или

$$u_{n(\text{eig})} \approx \frac{F_0 a \mathcal{T}_{2n} \left(\frac{\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}}{2\omega_e} \right)}{2\pi m \omega v_g(\omega)} \left(\sin(\omega t) \int_{\omega - \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}}^{\omega} \frac{\cos(\epsilon t) d\epsilon}{\epsilon} - \cos(\omega t) \int_{\omega - \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}}^{\omega} \frac{\sin(\epsilon t) d\epsilon}{\epsilon} \right). \quad (29)$$

Определим функцию вклада $u_{n(\text{eig})}^{\text{sing}}$ как

$$u_{n(\text{eig})}^{\text{sing}} = u_{n(\text{eig})} | \omega t \gg 1. \quad (30)$$

Тогда, переходя к новой переменной ϵt , и, устремляя пределы интегралов, стоящих в (29), к бесконечности, получим

$$u_{n(\text{eig})}^{\text{sing}} \approx -\frac{F_0 \mathcal{T}_{2n} \left(\frac{\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}}{2\omega_e} \right) \cos(\omega t)}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2)(4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2)}}. \quad (31)$$

При переходе к последней формуле были использованы выражение для групповой скорости как функции частоты (см. (26)) и тождества

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi, \quad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \quad (32)$$

где через $\text{p.v.} \int$ обозначен интеграл в смысле главного значения.

Стоит отметить, что вклад от сингулярной точки имеет смысл только в том случае, когда частота нагружения ω лежит в спектре частот, определяемым дисперсионным соотношением (4). В случаях, когда частота нагружения лежит в запрещённой зоне, этот вклад полагается равным нулю — тогда вклад, соответствующий собственным возмущениям равен вкладу от стационарной точки.

1.3.2. Вклад, соответствующий вынужденным колебаниям

В отличие от вклада $u_{n(\text{eig})}$, вклад, соответствующий вынужденным колебаниям $u_{n(\text{forced})}$, может быть вычислен точно. Перепишем третье уравнение в (6) в виде

$$u_{n(\text{forced})} = \frac{F_0 \sin(\omega t)}{m} I_n, \quad I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta) d\theta}{\Omega^2 - \omega^2}. \quad (33)$$

Следовательно, задача о нахождении поля перемещения сводится к нахождению интеграла I_n . Интеграл, стоящий в (33) можно привести к следующему виду [18]:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta) d\theta}{4\omega_e^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(2n\theta) d\theta}{4\omega_e^2 \sin^2 \theta - (\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}} \int_{-\pi}^\pi \frac{e^{2in\theta} d\theta}{2\omega_e \sin \theta - \sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Сведём интеграл в (34) к интегралу по единичной окружности. Сделаем замену переменной $z = e^{i\theta}$. Тогда

$$d\theta = -i \frac{dz}{z}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right). \quad (35)$$

Тогда выражение для интеграла I_n можно переписать как

$$I_n = \frac{i}{2\pi \sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n} dz}{i\omega_e z^2 + z \sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2} - i\omega_e}. \quad (36)$$

Далее производится вычисление I_n в зависимости от частоты нагружения ω .

Пусть $\omega_{\text{cut}} < \omega < \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}$, то есть частота нагружения находится в спектре. Полюса подынтегральной функции определим как корни её знаменателя:

$$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2} \pm i\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}}{2i\omega_e} = ie^{\mp i\phi}, \quad \phi = \arccos \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}}{2\omega_e} \right). \quad (37)$$

Из (37) следует, что полюса располагаются не в круге $|z| < 1$, а на окружно-

сти $|z| = 1$. Ниже приводится вывод интеграла по единичной окружности для случая нахождения на ней полюсов.

Выколотим полуокружность пренебрежимо малого радиуса в окрестности некоторого полюса z_0 на комплексной плоскости (Рис.2). Распишем выражение

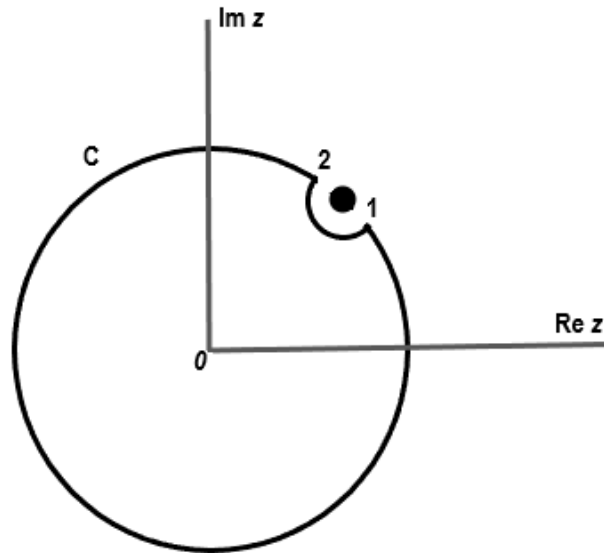


Рис. 2: Контур интегрирования C , огибающий особую точку z_0 .

для интеграла от произвольной аналитической функции $\frac{f(z)}{g(z)}$ по замкнутому контуру C . По теореме Коши

$$\oint_C \frac{f(z)}{g(z)} dz = 0, \quad (38)$$

поскольку внутри области, ограниченной контуром C , нет особых точек. С другой стороны, интеграл (38) можно расписать как сумму двух интегралов: по пути $1 \rightarrow 2$ и по пути $2 \rightarrow 1$. Тогда

$$\int_{1 \rightarrow 2} \frac{f(z)}{g(z)} dz + \int_{2 \rightarrow 1} \frac{f(z)}{g(z)} dz = 0. \quad (39)$$

Устремляя к нулю радиус выколотой в окрестности полюса полуокружности, r ,

приходим к равенству

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{2 \rightarrow 1} \frac{f(z)}{g(z)} dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{g(z)} dz. \quad (40)$$

В интеграле по пути $1 \rightarrow 2$ сделаем замену $z = z_0 + re^{i\theta}$. Тогда, устремляя $r \rightarrow 0$, и, раскладывая $f(z)$ и $g(z)$ в ряд в окрестности z_0 , получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{1 \rightarrow 2} \frac{f(z)}{g(z)} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})rie^{i\theta}}{g(z_0 + re^{i\theta})} d\theta = -i\pi \frac{f(z_0)}{g'_z(z_0)}, \quad (41)$$

где $(\dots)'_z$ означает дифференцирование по z . Таким образом, с одной стороны

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{g(z)} dz = i\pi \frac{f(z_0)}{g'_z(z_0)}. \quad (42)$$

Применяя формулу (42) для интеграла I_n (формула (36)), которому соответствуют полюса, определённые в (37), получаем

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{1}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}} \left(\frac{(-1)^n e^{-2i\phi|n|}}{i\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}} + \frac{(-1)^n e^{2i\phi|n|}}{-i\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}} \right) \\ &= \frac{(-1)^n \sin(2\phi|n|)}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2} \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}}. \end{aligned} \quad (43)$$

С другой стороны, стоит отметить, что при $\omega_{\text{cut}} < \omega < \sqrt{4\omega^2 + \omega_{\text{cut}}^2}$ интеграл (33) не существует, следовательно, найденное выражение (43) свидетельствует о вычислении (33) в смысле главного значения. Другим способом прийти к решению (43) является рассмотрение исходной задачи (1) с диссипативным слагаемым, прямо пропорциональным $i\omega_n$ (в таком случае в знаменатель интеграла в (33) добавляется слагаемое, регуляризирующее интеграл). В самом деле, в соответствии с принципом предельного поглощения, формула (43) — предел решения вышеупомянутой задачи при стремлении к нулю диссипативного коэффициента. Это было подтверждено предварительными расчётами для рассматриваемой системы.

Для вычисления интегралов по единичной окружности при частотах, лежащих в запрещённой зоне ($\omega < \omega_{\text{cut}}$, $\omega > \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}$), используется следующая формула [1]:

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{g(z)} dz = 2\pi i \sum_j \text{Res} \left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_j \right) = 2\pi i \sum_j \frac{f(z_j)}{g'_z(z_j)}, \quad (44)$$

где z_j — полюса (корни уравнения $g(z) = 0$), лежащие внутри круга ($|z| < 1$).

Пусть $\omega_{\text{cut}} < \omega$. Тогда интеграл (36) записывается как

$$I_n = -\frac{i}{2\pi \sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n} dz}{\omega_e z^2 + z \sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2} - \omega_e}. \quad (45)$$

Полюса подынтегральной функции имеют вид

$$z_{1,2} = \frac{-\sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2} \pm \sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2 + 4\omega_e^2}}{2\omega_e}. \quad (46)$$

Имея ввиду то, что внутри круга ($|z| < 1$) находится только полюс z_1 и, применяя формулу (44), получим:

$$I_n = \frac{z_1^{2|n|}}{\sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2} \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}} = \frac{e^{-\gamma_1 |n|}}{\sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2} \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}}, \quad (47)$$

$$\gamma_1 = -2 \ln \left(\frac{\sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2 + 4\omega_e^2} - \sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2}}{2\omega_e} \right) = 2 \text{arccosh} \left(\frac{\sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2 + 4\omega_e^2}}{2\omega_e} \right).$$

Аналогично, для $\omega > \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}$:

$$I_n = \frac{(-1)^{n+1} e^{-\gamma_2 |n|}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2} \sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2 - 4\omega_e^2}}, \quad (48)$$

$$\gamma_2 = -2 \ln \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2} - \sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2 - 4\omega_e^2}}{2\omega_e} \right) = 2 \text{arccosh} \left(\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}}{2\omega_e} \right).$$

Определим физический смысл коэффициентов γ_1 и γ_2 . Для этого построим обобщённое дисперсионное соотношение для цепочки Гука на упругом основании (для полосы пропускания и запрещённой зоны). Положим в уравнении

динамики системы (1) $F_0 = 0$ и, подставляя туда решение для u_n в виде:

$$u_n = U_0 e^{i(\Omega t + \tilde{\theta} n)}, \quad \tilde{\theta} = \theta + i\gamma, \quad (49)$$

где $\tilde{\theta}$ — комплекснозначное волновое число, получим уравнение для дисперсионного соотношения

$$\Omega^2 = 2\omega_e^2(1 - \cos \theta \cosh \gamma + i \sin \theta \sinh \gamma) + \omega_{\text{cut}}^2. \quad (50)$$

Очевидно, мнимая часть уравнения (50) равна нулю. В таком случае либо $\gamma = 0$, тогда уравнение (50) равносильно (4), либо $\gamma \neq 0$, но $\sin \theta = 0$. Тогда имеем две ситуации.

Пусть $\theta = 0$. Уравнение (50) принимает вид

$$\Omega^2 = 2\omega_e^2(1 - \cosh \gamma) + \omega_{\text{cut}}^2, \quad (51)$$

откуда

$$\cosh \gamma = 1 - \frac{\Omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}{2\omega_e^2} \iff \cosh^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{4\omega_e^2 - \Omega^2 + \omega_{\text{cut}}^2}{4\omega_e^2}, \quad (52)$$

откуда следует, что $\Omega < \omega_{\text{cut}}$ и

$$\gamma = 2 \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \Omega^2}}{2\omega_e} \right). \quad (53)$$

Пусть $\theta = \pi$. Уравнение (50) принимает вид

$$\Omega^2 = 2\omega_e^2(1 + \cosh \gamma) + \omega_{\text{cut}}^2, \quad (54)$$

откуда

$$\cosh \gamma = \frac{\Omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}{2\omega_e^2} - 1 \iff \cosh^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{\Omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}{4\omega_e^2}, \quad (55)$$

откуда следует, что $\Omega > \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}$ и

$$\gamma = 2 \operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{\Omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2}}{2\omega_e} \right). \quad (56)$$

При $\omega_{\text{cut}} = 0$ выражение для (56) совпадает с мнимой частью волнового числа для цепочки Гука без упругого основания, которое было получено в [37].

Таким образом, периодическое нагружение с частотой, лежащей в запрещённой зоне, приводит (помимо того, что к распространению собственных возмущений) к возмущениям, локализованным вблизи точки нагружения и экспоненциально убывающим при удалении от этой точки. Показатели экспонент — мнимые части комплексных волновых чисел, определённые в зависимости от частоты нагружения.

1.3.3. Итоговое приближённое решение

В настоящем параграфе строится итоговое приближённое решение для поля перемещений частиц в зависимости от частоты нагружения. Для проверки полученного решения строится численное решение задачи путём интегрирования обезразмеренного уравнения движения (1) симплектическим методом [41] с шагом по времени $\omega_e \Delta t = 0.01$. Численное моделирование проводится для цепочки Гука, состоящей из $N = 1000$ частиц при периодических граничных условиях

$$u_n = u_{n+N}. \quad (57)$$

Безразмерный параметр $F_0/(ac)$ положим равным единице. Рассмотрим случай, когда частота нагружения находится в запрещённой зоне.

Пусть $\omega < \omega_{\text{cut}}$. В таком случае, приближение для поля перемещений можно записать в следующем виде

$$u_n \approx u_{n(\text{eig})}^{\text{stat}} + u_{n(\text{forced})}, \quad (58)$$

где вклад $u_{n(\text{eig})}^{\text{stat}}$ определяется выражением (24), а вклад $u_{n(\text{eig})}^{\text{forced}}$ — выражениями (33) и (47). Зафиксируем нижнюю частоту отсечки $\omega_{\text{cut}} = \omega_e$. Поле перемещений при $\omega_e t = 200$ представлено на рисунке 3. Зависимость перемещения

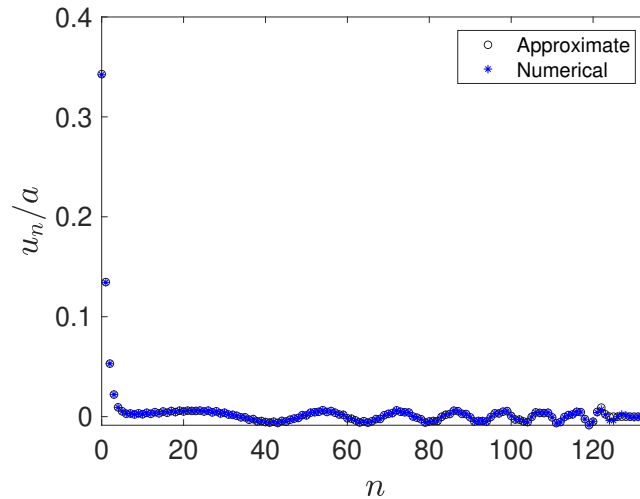


Рис. 3: Приближённое и численное решения для поля перемещений в момент $\omega_e t = 200$ при $\omega = 0.2\omega_e$.

частицы от времени, располагающейся на некотором расстоянии от точки нагружения ($n = 10$), представлена на рисунке 4.

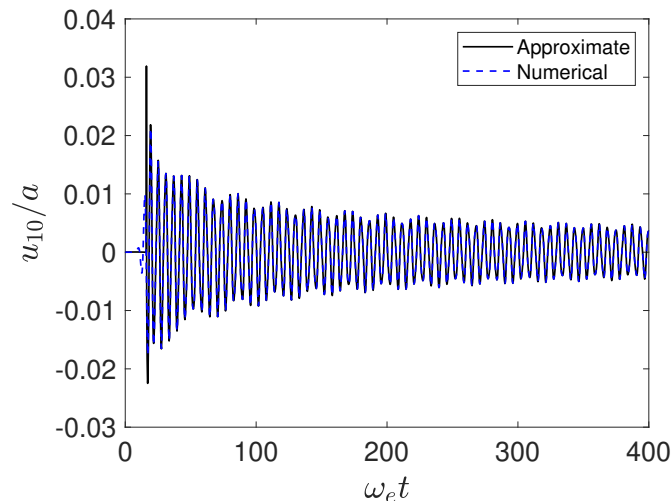


Рис. 4: Зависимость перемещения 10-й частицы при $\omega = 0.2\omega_e$.

Пусть $\omega > \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}$. В таком случае, приближение для поля перемещений записывается в виде (58), где вклад, соответствующий вынужденным колебаниям, определяется формулами (33) и (48). Поле перемещений при $\omega_e t = 200$

представлено на рисунке 5. Зависимость перемещения частицы от времени,

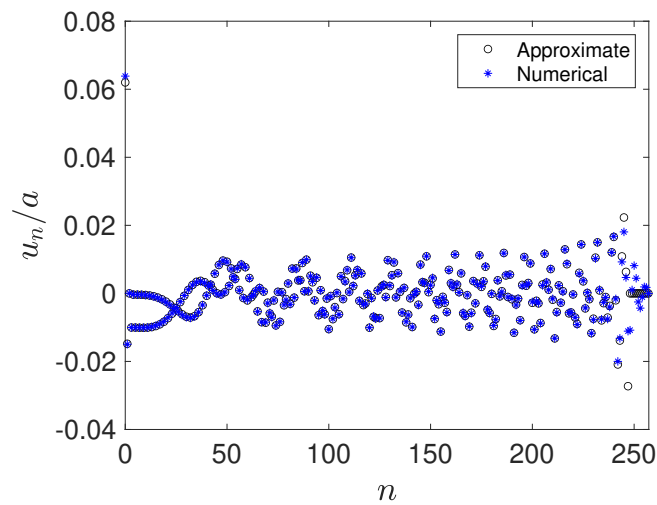


Рис. 5: Приближённое и численное решения для поля перемещений в момент $\omega_e t = 400$ при $\omega = 4\omega_e$.

располагающейся на некотором расстоянии от точки нагружения ($n = 10$), представлена на рисунке 6.

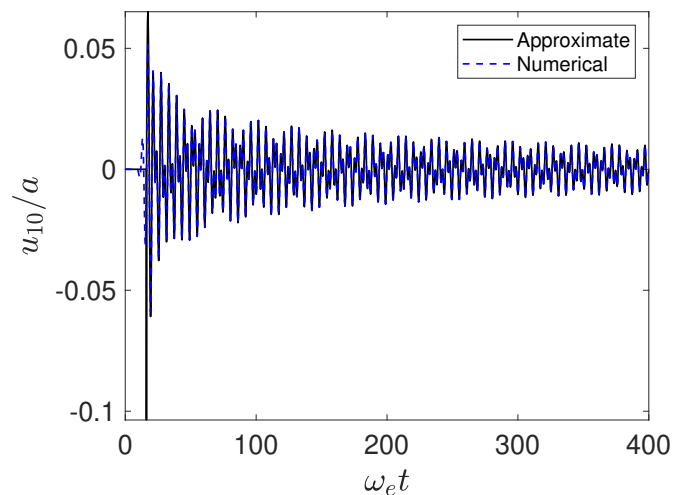


Рис. 6: Зависимость перемещения 10-й частицы при $\omega = 4\omega_e$.

Из рисунков (3) и (5) видно, что поле перемещений соответствует локализованным возмущениям вблизи нулевой частицы и распространяющимся возмущениям, которые затухают во времени как $1/\sqrt{t}$. Следовательно, нагружение при частотах, находящихся в запрещённой зоне, приводит к тому,

что вся энергия локализуется вблизи нулевой частицы и не распространяется. Из рисунков (3), (4), (5), (6) видно, что полученная аппроксимация поля перемещений довольно точно согласуется с результатами численного моделирования за исключением поля вблизи фронта. Асимптотика на самом фронте (при $n = \max \tilde{v}_g t$) может быть уточнена с помощью метода, основанного на лемме Эрдейли (см. [37]). Исследование её выходит за рамки настоящей работы.

Рассмотрим случай, когда частота нагружения находится в полосе пропускания. Пусть $\omega_{\text{cut}} < \omega < \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}$. Прежде чем построить приближённое решение, рассмотрим асимптотическое решение для вклада от стационарной точки ($u_{n(\text{eig})}$). Из формулы (24) видно, что знаменатель амплитуды претерпевает сингулярность. Решая уравнение $\Omega(\theta_s(w)) = \omega$ относительно w , с выбором положительного корня, имеем

$$w = \frac{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{\text{cut}}^2)(4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2 - \omega^2)}}{2\omega\omega_e}. \quad (59)$$

Сравнивая полученное выражение для (59) с выражением для групповой скорости как функции от частоты (см.(26)), получаем, что сингулярность наблюдается при $w = \tilde{v}_g(\omega)$, $\tilde{v}_g = v_g/v_s$. Следовательно, необходимо рассмотреть, как ведёт себя решение для поля перемещений как при $w < \tilde{v}_g(\omega)$, так и при $\tilde{v}_g(\omega) < w < \tilde{v}_g(\theta_m)$.

Построим зависимости фаз $\varphi(\theta_{s1})$ и $\varphi(\theta_{s2})$ как функции от w и функцию $\omega(w)$ как обратную от правой части выражения (59).

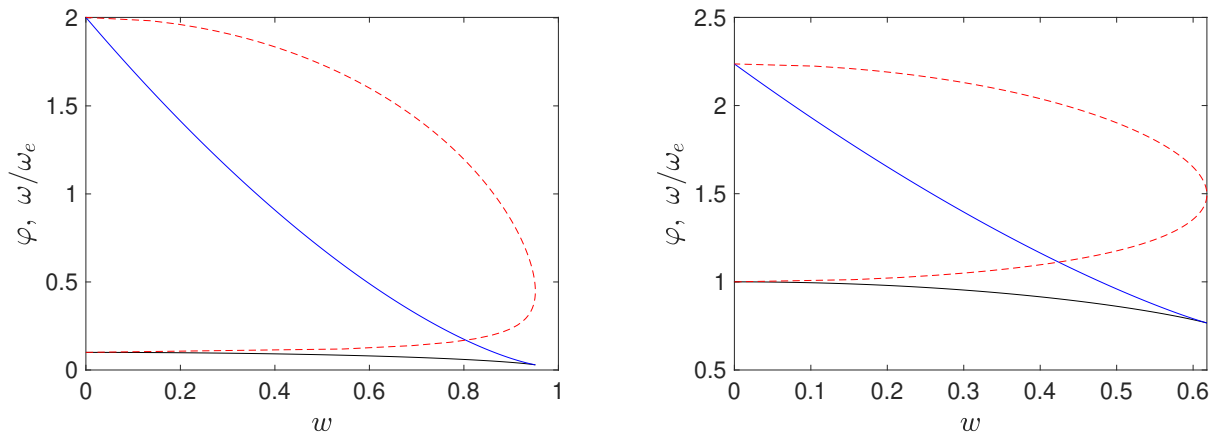


Рис. 7: Зависимости $\varphi(\theta_{s1})$ (чёрная линия) и $\varphi(\theta_{s2})$ (синяя линия) при нижних частотах отсечки $\omega_{\text{cut}} = 0.1\omega_e$ (слева) и $\omega_{\text{cut}} = \omega_e$ (справа). Красной пунктирной линией обозначена функция частоты ω от $\tilde{v}_g(\omega)$, определяемая выражением (59).

Из рисунка 7 видно, что частота нагружения всегда больше как минимум одной фазы φ . Поскольку величину $\varphi(\theta_s)\omega_e$ можно расценивать как «эффективную частоту», с которой происходят колебания вклада от стационарной точки $u_{n(\text{eig})}^{\text{stat}}$, заключаем, что возмущения с частотой ω , которым соответствуют вклады $u_{n(\text{eig})}^{\text{sing}}$ и $u_{n(\text{forced})}$, не могут проходить в зону, в которой $\tilde{v}_g(\omega) < w < \tilde{v}_g(\theta_m)$. Существует второй фронт, переносящий эти возмущения и распространяющийся с групповой скоростью, определённой в частоте нагружения.

Итак, поле перемещений записывается в следующем виде

$$u_n \approx H(\tilde{v}_g(\omega)\omega_e t - |n|)(u_{n(\text{forced})} + u_{n(\text{eig})}^{\text{sing}}) + u_{n(\text{eig})}^{\text{stat}}, \quad (60)$$

где вклад $u_{n(\text{eig})}^{\text{sing}}$ определяется формулой (31), а вклад $u_{n(\text{forced})}$ — формулами (33) и (43). Поля перемещений при различных частотах нагружения и при $\omega_e t = 250$ представлены на рисунке 8.

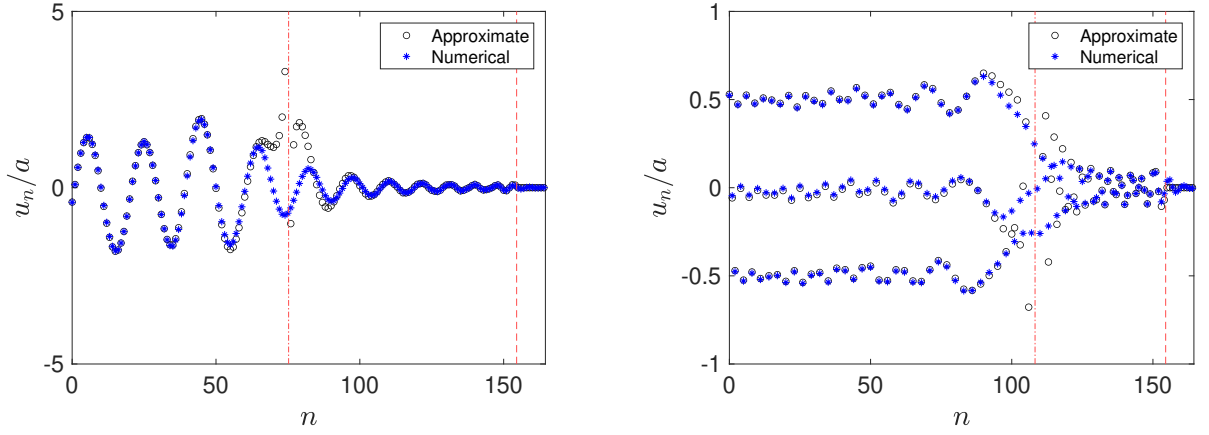


Рис. 8: Приближённое и численное решения для поля перемещений в момент $\omega_e t = 250$ при $\omega = 1.05\omega_e$ (слева) и при $\omega = 2\omega_e$ (справа). Красными линиями обозначены координаты фронтов, распространяющихся с групповыми скоростями $v_g(\omega)$ (штрихпунктирная линия) и $\max v_g$ (пунктирная линия).

Таким образом, нагружение с частотой, лежащей в спектре, ведёт к распространению не только возмущений, фронт которых распространяется с максимальной групповой скоростью и описываемым слагаемым (24), но и возмущений с частотой ω , фронт которых движется с групповой скоростью, определённой в этой частоте.

Рассмотрим случай, когда частота нагружения находится на границах полосы пропускания, то есть, когда $\omega = \omega_{\text{cut}}$ и $\omega = \sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}$. Для построения решения динамической задачи ограничимся вкладом от стационарной точки (24). Рассмотрим изменение во времени перемещения некоторой фиксированной частицы, находящейся вдали от нуля, но позади фронта.

Пусть $\omega = \omega_{\text{cut}}$. Напишем следующие разложения произведения функций $\sqrt{|\varphi''(\theta_s)|}$, $\Omega(\theta_s)$ и $\omega^2 - \Omega(\theta_s)^2$ в ряд по w , применяя формулы (22) и (23):

$$\begin{aligned} \sqrt{|\varphi''(\theta_{s1})|}\Omega(\theta_{s1})(\omega_{\text{cut}}^2 - \Omega(\theta_{s1})^2) &= -\sqrt{\tilde{\omega}_{\text{cut}}}\omega_{\text{cut}}^2\omega_e w^2 + O(w^4), \\ \sqrt{|\varphi''(\theta_{s2})|}\Omega(\theta_{s2})(\omega_{\text{cut}}^2 - \Omega(\theta_{s2})^2) &= \sqrt[4]{4 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2}(-4 + w^2(7 + \tilde{\omega}_{\text{cut}}^2))\omega_e^3 + O(w^4). \end{aligned} \quad (61)$$

Из разложений (61) заключаем, что вторым слагаемым в формуле (23) можно

пренебречь, поскольку первое разложение (61) соответствует растущей во времени амплитуде. Тогда, делая замену $w = |n|/(\omega_e t)$, записываем приближённое выражение для поля перемещений в виде

$$u_n \approx -\frac{F_0 \omega_e H(\tilde{v}_g(\theta_m) \omega_e t - |n|) t^{\frac{3}{2}}}{\omega_{\text{cut}} m \sqrt{2\pi \omega_{\text{cut}} n^2}} \sin \left(\varphi \left(\theta_{s1} \left(\frac{|n|}{\omega_e t} \right) \right) \omega_e t + \frac{\pi}{4} \right), \quad (62)$$

где $\varphi(\theta_{s1}(w))$ определяется из формулы (23). Отметим, что в итоговую формулу нельзя подставлять первые слагаемые из разложения θ_{s1} для фазы, так как это приведёт к существенной потере точности. Зависимость перемещения 50-й частицы представлена на рисунке 9.

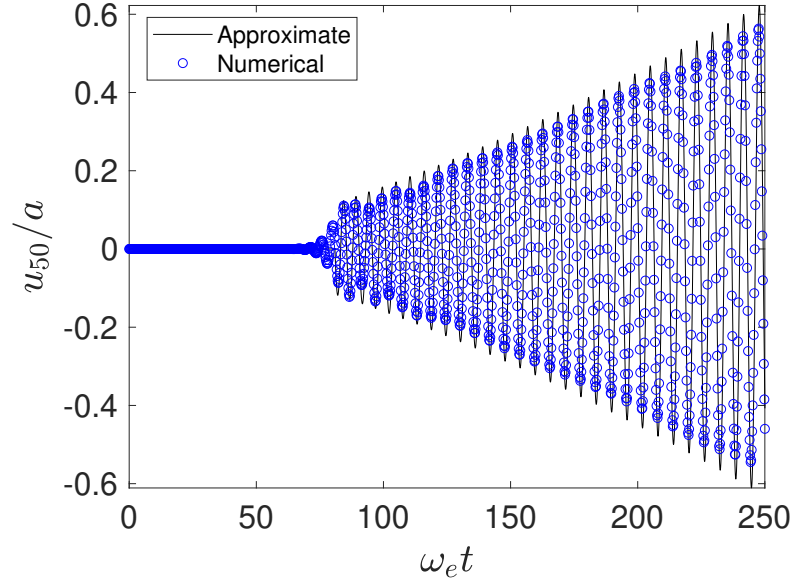


Рис. 9: Рост перемещения частицы с индексом $n = 50$ в цепочке Гука на упругом основании при частоте нагружения, равной ω_{cut} .

Пусть $\omega = \sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 + 4\omega_e^2}$. Напишем следующие разложения произведения функций $\sqrt{|\varphi''(\theta_s)|}$, $\Omega(\theta_s)$ и $\omega^2 - \Omega(\theta_s)^2$ в ряд по w , применяя формулы (22) и (23):

$$\begin{aligned} \sqrt{|\varphi''(\theta_{s1})|} \Omega(\theta_{s1}) (\omega_{\text{cut}}^2 + 4\omega_e^2 - \Omega(\theta_{s1})^2) &= -\sqrt{\tilde{\omega}_{\text{cut}}} \left((2\tilde{\omega}_{\text{cut}} + 1) w^2 - 4 \right) \omega_e^3 + O(w^4), \\ \sqrt{|\varphi''(\theta_{s2})|} \Omega(\theta_{s2}) (\omega_{\text{cut}}^2 + 4\omega_e^2 - \Omega(\theta_{s2})^2) &= w^2 (4 + \tilde{\omega}_{\text{cut}})^{\frac{5}{4}} \omega_e^3 + O(w^4). \end{aligned} \quad (63)$$

Из разложений (63) аналогично заключаем, что первым слагаемым в формуле (23) можно пренебречь. Тогда, делая замену $w = |n|/(\omega_e t)$, записываем при-

ближённое выражение для поля перемещений в виде

$$u_n \approx \frac{F_0 \omega_e H(\tilde{v}_g(\theta_m) \omega_e t - |n|) t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi} (4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2)^{\frac{3}{4}} n^2} \sin \left(\varphi \left(\theta_{s2} \left(\frac{|n|}{\omega_e t} \right) \right) \omega_e t - \frac{\pi}{4} \right), \quad (64)$$

где $\varphi(\theta_{s2}(w))$ определяется из формулы (23). Зависимость перемещения 50-й частицы представлена на рисунке 10.

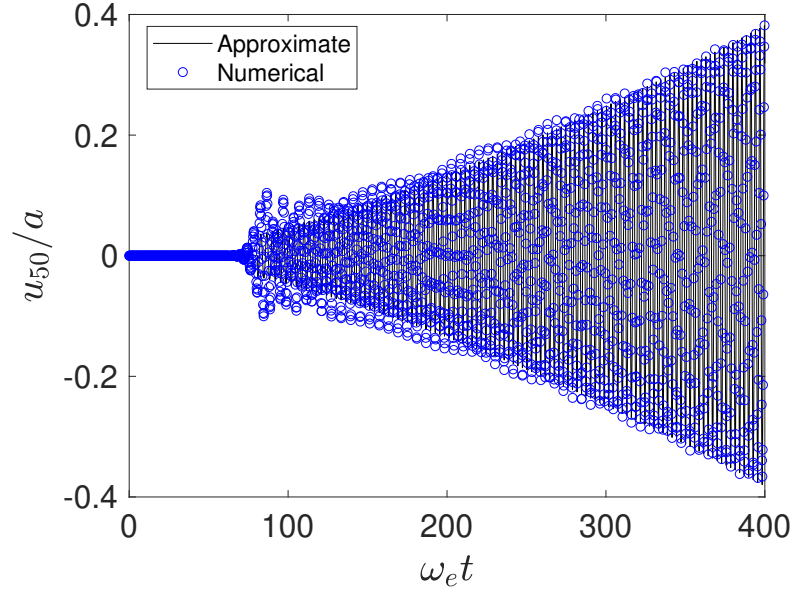


Рис. 10: Рост перемещения частицы с индексом $n = 50$ в цепочке Гука на упругом основании при частоте нагружения, равной $\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\text{cut}}^2}$.

Таким образом, нагружение с частотами, находящимся на границах полосы пропускания (и которые соответствуют нулевым групповым скоростям), приводит к росту перемещений во времени, а, следовательно — к резонансу. Стоит отметить, что, во-первых, полученный результат ожидаем, поскольку резонанс, возникающий при нагружениях с частотами отсечки наблюдается как в дискретных системах [18, 42], так и в континуальных [39]. Во-вторых, наличие упругого основания ускоряет рост перемещений (амплитуда перемещений растёт пропорционально $t^{\frac{3}{2}}$), поскольку в цепочке Гука без упругого основания поле перемещений растёт пропорционально \sqrt{t} [18].

1.4. Заключение к главе 1

Проведено исследование динамики бесконечной цепочки Гука на упругом основании при внешнем локальном синусоидальном нагружении. С использованием точного решения, найденного в [24] и переписанного для бесконечной цепочки, найдена асимптотика полей перемещений при разных частотах нагружения.

При частоте нагружения, лежащей в запрещённой зоне, распространяющиеся возмущения, описываемые с помощью слагаемого (24), и фронт которых движется с максимальной групповой скоростью, затухают со временем. В системе устанавливается локализация возмущений в подверженной нагружению нулевой частице, экспоненциально убывающих от неё. Показатель экспоненты определяется мнимой частью комплексного волнового числа. При частоте нагружения, лежащей в полосе пропускания, распространяются не только затухающие возмущения, описанные выше, но и незатухающие периодические возмущения. Частота таких возмущений равна частоте нагружения, их фронт распространяется с соответствующей ей групповой скоростью v_g . При частоте нагружения, соответствующей нулевой групповой скорости (т.е. на границе полосы пропускания) происходит резонанс, притом амплитуда колебаний при верхней и нижней частотах отсечки отличается.

Предполагается, что полученные асимптотические результаты для полей перемещений могут считаться объяснением поведения энергии, подводимой в цепочку Гука на упругом основании за счёт силового нагружения (См. [24, 35]), поскольку подобным образом, как ведёт себя поле перемещений, ведёт себя и поле скоростей. При частоте нагружения, лежащей в запрещённой зоне, энергия не пропускается (а значит, растёт до определённого значения и следом около него осциллирует) из-за возникновения её локализации в точке воздействия и вблизи неё. При частоте нагружения, лежащей в полосе пропускания, подводимая энергия растёт во времени (по линейному закону) за счёт незатухающих возмущений, распространяющихся с той же частотой. При частоте нагружения

на границе полосы пропускания рост энергии усиливается ($t^{\frac{3}{2}}$), причиной чему является резонанс.

Подходы, разработанные к решению задач, рассмотренных в настоящей главе, предлагаются для исследования динамики одномерных гармонических кристаллов, содержащих дефекты, интерфейсы, а также подверженных как детерминированному, так и стохастическому силовым нагрузениям произвольного характера. В качестве предметов дальнейшего исследования может быть указано уточнение асимптотических решений на фронтах, а также применение рассмотренных в настоящей работе асимптотических методов для полиатомных, двумерных и трёхмерных решёток.

ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЁТКИ ПРИ МГНОВЕННОМ ВОЗМУЩЕНИИ

2.1. Постановка задачи

В настоящей главе рассматривается задача о поперечных колебаниях квадратной решётки⁴ (рисунок 11), состоящей из одинаковых частиц массой m , соединённых линейными пружинками жёсткостью c . Выдвинем следующие предпо-

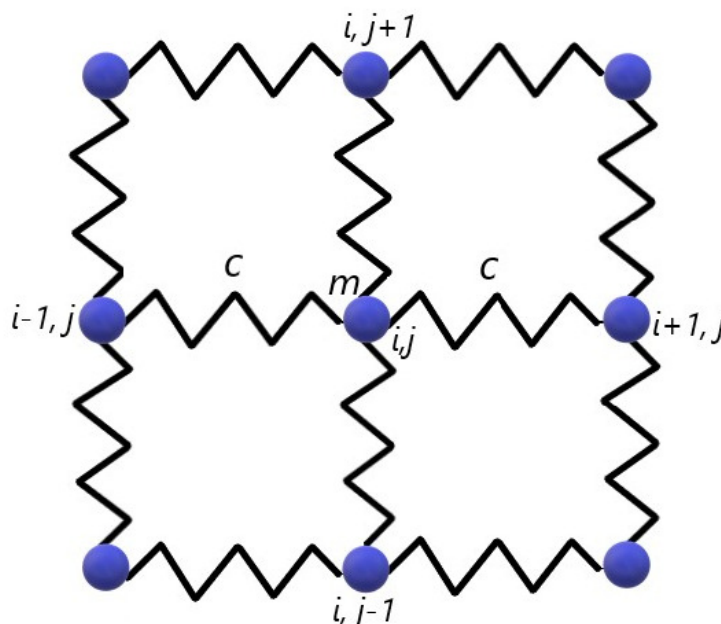


Рис. 11: Ячейка периодичности квадратной решётки.

ложения:

1. Частицы взаимодействуют с ближайшими соседями.
2. Колебания происходят в растянутой решётке.
3. В начальный момент времени нулевой частице задана начальная скорость v_0 при отсутствии перемещений.

⁴Колебания происходят перпендикулярно её плоскости.

С учётом вышенаписанных предположений, сформулируем постановку задачи. Уравнения динамики имеют следующий вид

$$\ddot{u}_{i,j} = \omega_e^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}), \quad \omega_e = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad (65)$$

где $u_{i,j}$ — перемещение частицы. Индекс i соответствует положению частицы по горизонтали, j — по вертикали. Начальные условия имеют вид

$$u_{i,j} = 0, \quad \dot{u}_{i,j} = v_0 \delta_{i0,j0}, \quad (66)$$

где v_0 — амплитуда начальной скорости; $\delta_{i0,j0}$ — двумерный символ Кронекера, равный 1 при $i = j = 0$ и нулю в остальных случаях.

2.2. Поле скоростей частиц. Точное решение

Для решений динамических задач для многомерных решёток используются прямое и дискретное преобразования Фурье [26, 14]. Запишем для них выражения в следующем виде:

$$\hat{u}(\mathbf{k}) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} u_{i,j} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{i,j}}, \quad u_{i,j} = \int_{\mathbf{k}} \hat{u}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{i,j}} d\mathbf{k}, \quad (67)$$

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{i,j} = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \quad \int_{\mathbf{k}} \dots d\mathbf{k} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots dk_1 dk_2,$$

где $\mathbf{x}_{i,j}$ — радиус-вектор частицы в актуальной конфигурации; \mathbf{k} — волновой вектор, сонаправленный вектору $\mathbf{x}_{i,j}$; k_1, k_2 — волновые числа ($\in [0; 2\pi]$); \hat{u} — Фурье-образ перемещения частицы.

Применение дискретного преобразования Фурье к уравнению (66) и началь-

ным условиям (66) соответственно даёт следующую задачу Коши

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{u}} + \Omega(\mathbf{k})^2 \hat{u} &= 0, \quad \Omega(\mathbf{k}) = \Omega(k_1, k_2) = 2\omega_e \sqrt{\sin^2 \frac{k_1}{2} + \sin^2 \frac{k_2}{2}}, \\ \hat{u}|_{t=0} &= 0, \quad \dot{\hat{u}}|_{t=0} = v_0, \end{aligned} \quad (68)$$

где Ω — дисперсионное соотношение для квадратной решётки [25]. Запишем решение задачи (68) относительно $\dot{\hat{u}}$:

$$\dot{\hat{u}}(\mathbf{k}) = v_0 \cos(\Omega(\mathbf{k})t). \quad (69)$$

Взятие обратного дискретного преобразования Фурье от (69) приводит к выражению для поля скоростей $v_{i,j}$:

$$v_{i,j} = \dot{u}_{i,j} = v_0 \int_{\mathbf{k}} \cos(\Omega(\mathbf{k})t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{i,j}} d\mathbf{k} = v_0 \int_{\mathbf{k}} \cos(\Omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{i,j}) d\mathbf{k}. \quad (70)$$

Последнее равенство верно в силу вещественности решения и его симметрии относительно как горизонтальной линии, проходящей через нулевую частицу, так и вертикальной. Используя симметрию решения, будем его строить в четверти квадратной решётки, которой соответствуют неотрицательные индексы. В следующем параграфе приводится асимптотическое приближение для поля скоростей частиц.

2.3. Приближённое решение

В настоящем параграфе строится асимптотика точного решения для поля скоростей частиц (70) на подвижном фронте методом стационарной фазы. Стоит отметить, что поиском оптимального решения задач динамики для квадратной решётки занимались в работах [19, 32]. Однако, на сегодня неизвестно какого-либо подхода к построению приближённого решения. Более того, используемый ниже асимптотический метод предложен впервые для двумерной задачи.

Положим $\mathbf{x}_{i,j} = \mathbf{w}\omega_e t$, временно рассматривая переменные i и j как непрерывно меняющиеся на бесконечном интервале, где $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2]^\top$ — плотность постоянной во времени скорости точки наблюдения. Здесь \top — символ транспонирования и w_1, w_2 — проекции вектора \mathbf{w} на горизонтальное и вертикальное направления плоскости решётки. Тогда выражение для поля скоростей частиц (70) можно переписать в следующем виде:

$$v_{i,j} = v_0 \operatorname{Re} I, \quad I = \int_{\mathbf{k}} e^{i\varphi(\mathbf{k})\omega_e t} d\mathbf{k}, \quad \varphi(\mathbf{k}) = \frac{1}{\omega_e} \Omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}. \quad (71)$$

Определим геометрическое место фронта, движущегося со скоростью \mathbf{w} , записав ограничение для её модуля в следующей форме:

$$|\mathbf{w}| < 1, \quad |\mathbf{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}. \quad (72)$$

Таким образом, исследуемая задача сводится к асимптотической оценке интеграла I , определённого в (71). Пусть дана некоторая невырожденная стационарная точка $\boldsymbol{\theta}$, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{k}=\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}. \quad (73)$$

Тогда выражение для главного члена асимптотики интеграла I , \check{I} , записывается в следующем виде [2]:

$$\check{I} = \frac{1}{2\pi\omega_e t} e^{i\left(\varphi(\boldsymbol{\theta})\omega_e t + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta})\right)}, \quad \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k_1^2} \Big|_{\mathbf{k}=\boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k_1 \partial k_2} \Big|_{\mathbf{k}=\boldsymbol{\theta}} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k_1 \partial k_2} \Big|_{\mathbf{k}=\boldsymbol{\theta}} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k_2^2} \Big|_{\mathbf{k}=\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix}, \quad (74)$$

и, следовательно,

$$I \simeq H(1 - |\mathbf{w}|) \check{I} + O((\omega_e t)^{-1}), \quad \omega_e t \rightarrow \infty. \quad (75)$$

Здесь \mathcal{H} — матрица вторых производных (матрица Гессе); $\det \mathcal{H}(\theta)$ — Гессеиан (определитель матрицы Гессе); sgn как сигнум матрицы есть разность количества положительных и отрицательных собственных чисел этой матрицы. Собственные числа матрицы \mathcal{H} вычисляются как:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} \mathcal{H} \pm \sqrt{(\text{tr} \mathcal{H})^2 - 4 \det \mathcal{H}}}{2}, \quad (76)$$

где $\text{tr}(\dots)$ — след матрицы. Введём индикаторные функции χ_+ и χ_- , такие, что

$$\chi(\lambda)_+ = \begin{cases} 0, & \lambda < 0 \\ 1, & \lambda > 0 \end{cases}, \quad \chi(\lambda)_- = \begin{cases} 1, & \lambda < 0 \\ 0, & \lambda > 0 \end{cases}. \quad (77)$$

Тогда сигнум матрицы \mathcal{H} можно вычислить как

$$\text{sgn} \mathcal{H} = \chi(\lambda_1(\mathcal{H}))_+ + \chi(\lambda_2(\mathcal{H}))_+ - (\chi(\lambda_1(\mathcal{H}))_- + \chi(\lambda_2(\mathcal{H}))_-). \quad (78)$$

Для того чтобы найти стационарные точки, соответствующие I, подставим выражение для фазы из (71) (с учётом (68)) в (73), что приведёт к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin k_1}{\sqrt{\sin^2 \frac{k_1}{2} + \sin^2 \frac{k_2}{2}}} = 2w_1, \\ \frac{\sin k_2}{\sqrt{\sin^2 \frac{k_1}{2} + \sin^2 \frac{k_2}{2}}} = 2w_2. \end{cases} \quad (79)$$

Найдём точное решение системы (79). Пусть вектор $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^\top$ является этим решением. Тогда θ_2 можно выразить через θ_1 из соотношения, получаемого делением второго уравнения системы (79) на первое:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{w_2}{w_1}. \quad (80)$$

Выражая $\sin^2 \frac{\theta_2}{2}$ из соотношения (80) и, подставляя полученный результат в

первое уравнение (79), имеем уравнение относительно θ_1 :

$$\frac{\sin^2 \frac{\theta_1}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right)}{\frac{1}{2} + \sin^2 \frac{\theta_1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4w_2^2}{w_1^2} \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta_1}{2}\right)}} = w_1^2. \quad (81)$$

Положим $y = \sin^2 \frac{\theta_1}{2}$. Тогда, преобразовав (81), получаем следующее уравнение относительно y :

$$y(1 - y) = \left(\frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4w_2^2}{w_1^2} y(1 - y)} \right) w_1^2. \quad (82)$$

Простейшие технические преобразования, применённые к (82), приводят к окончательной форме уравнения относительно y , записанной как

$$y^3 + 2y^2(w_1^2 - 1) + y(1 - w_1^2 + w_1^4 - w_1^2 w_2^2) + w_1^2 w_2^2 + w_1^4 - w_1^2 = 0. \quad (83)$$

Далее будем искать вещественные (и положительные) решения уравнения (83). Уравнение (83) решается путём приведения к канонической форме, где левая часть записывается в виде кубического трёхчлена $y^3 + \tilde{\lambda}_1 y + \tilde{\lambda}_2 = 0$. Уравнение, записанное в каноническом виде, разрешается через формулу Кардано.

Запишем решения (83) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -\frac{2}{3}(w_1^2 - 1) - \frac{\sqrt[3]{2}\alpha}{3\left(\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt[3]{2}}, \\
 y_{2,3} &= -\frac{2}{3}(w_1^2 - 1) + \frac{(1 \pm i\sqrt{3})\alpha}{3\left(4\beta + 4\sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}} - \frac{(1 \mp i\sqrt{3})\left(\beta + \sqrt{4\alpha^3 + \beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{6\sqrt[3]{2}}, \\
 \alpha(w_1, w_2) &= -1 + 5w_1^2 - w_1^4 - 3w_1^2w_2^2, \\
 \beta(w_1, w_2) &= -2 + 15w_1^2 - 15w_1^4 + 2w_1^6 - 9w_1^2w_2^2 - 18w_1^4w_2^2.
 \end{aligned} \tag{84}$$

В зависимости от дискриминанта кубического уравнения $4\alpha^3 + \beta^2$ возможны три ситуации:

1. $4\alpha^3 + \beta^2 > 0$. Тогда уравнение (83) имеет один вещественный и два комплексно-сопряжённые корни.

2. $4\alpha^3 + \beta^2 < 0$. Тогда уравнение (83) имеет три различных вещественных корня.

3. $4\alpha^3 + \beta^2 = 0$. Тогда уравнение (83) имеет три вещественных корня, один из которых имеет как минимум кратность, равную 2.

Рассмотрим первый случай. При $4\alpha^3 + \beta^2 > 0$ единственное вещественное решение y равно вещественному корню из набора $\{y_1, y_2, y_3\}$. Тогда $\theta_1 = 2 \arcsin \sqrt{y}$, а компонента θ_2 , такая, что θ удовлетворяет (73) определяется как

$$\theta_2 = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{w_2}{w_1} \sin \theta_1\right), & y = y_1, \\ \pi - \arcsin\left(\frac{w_2}{w_1} \sin \theta_1\right), & y = y_{2,3}. \end{cases} \tag{85}$$

Рассмотрим второй случай. Запишем следующие представления для стаци-

онарных точек:

$$\begin{aligned}
 \theta_{1(1)} &= 2 \arcsin \sqrt{y_1}, & \theta_{2(1)} &= \arcsin \left(\frac{w_2}{w_1} \sin \theta_{1(1)} \right), \\
 \theta_{1(2)} &= 2 \arcsin \sqrt{y_2}, & \theta_{2(2)} &= \pi - \arcsin \left(\frac{w_2}{w_1} \sin \theta_{1(2)} \right), \\
 \theta_{1(3)} &= 2 \arcsin \sqrt{y_3}, & \theta_{2(3)} &= \pi - \arcsin \left(\frac{w_2}{w_1} \sin \theta_{1(3)} \right).
 \end{aligned} \tag{86}$$

Зависимость знака функции $4\alpha^3 + \beta^2$ от w_1 и w_2 представлена на рисунке 12, а условие её равенства нулю — на рисунке 13.

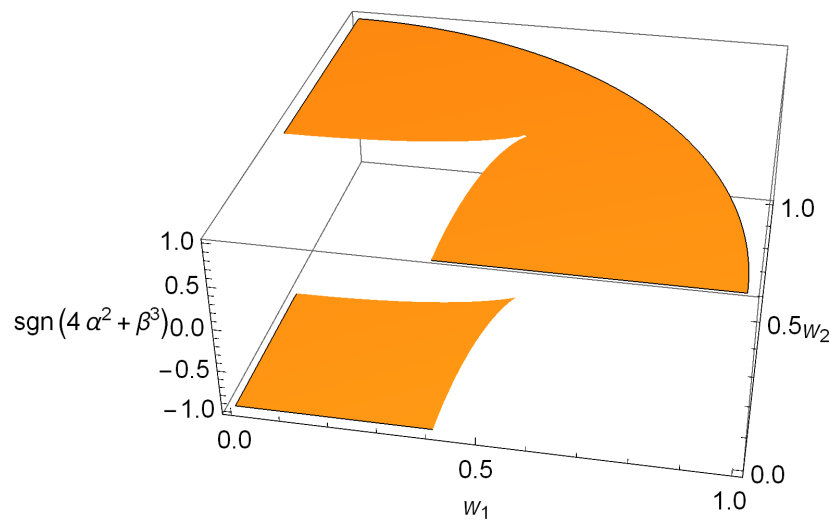


Рис. 12: Зависимость знака функции $4\alpha^3 + \beta^2$ от w_1 и w_2 .

Из рисунков (12) и (13) видно, что построенные функции симметричны относительно диагонали квадратной решётки. Следовательно, стационарные точки, а, значит, и итоговое решение для поля скоростей также симметричны⁵

Анализ уравнения (83) показал, что в случае $4\alpha^3 + \beta^2 = 0$ при различных значениях w_1 и w_2 один из корней, определённых решением (84), имеет кратность 2.

Рассмотрим точку $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$. Применяя формулу (85), находим стационарную точку

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}. \tag{87}$$

⁵Стоит отметить, что линия $4\alpha^3 + \beta^2$ соответствует сингулярности фундаментального решения для непрерывного поля кинетической температуры в квадратной решётке (см. [25]).

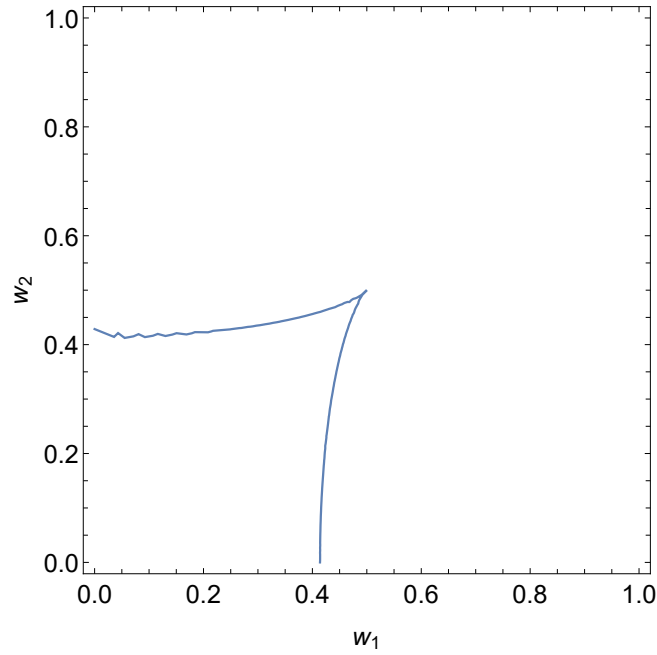


Рис. 13: Линия $4\alpha^3 + \beta^2 = 0$.

Вычисляя гессиан матрицы \mathcal{H} , убеждаемся, что он равен нулю. Следовательно, стационарная точка (87) является вырожденной, и для неё разложение (75) непригодно. В случае вырожденной стационарной точки строится отдельная асимптотика интеграла I, основанная на формуле (4.9) в [4]. Построение данной асимптотики остаётся за рамками настоящего исследования.

Запишем выражение для главного члена асимптотики \check{I} при $4\alpha^3 + \beta^2 > 0$:

$$\check{I}_{4\alpha^3 + \beta^2 > 0}(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi\omega_e t} \frac{e^{i\left(\varphi(\theta_1, \theta_2)\omega_e t + \frac{\pi}{4}\text{sgn}\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2)\right)}}{\sqrt{|\det\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2)|}}, \quad (88)$$

где θ_1 и θ_2 определяются уравнением (85). При $4\alpha^3 + \beta^2 < 0$, выражение для \check{I} имеет следующий вид:

$$\check{I}_{4\alpha^3 + \beta^2 < 0}(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi\omega_e t} \sum_{l=1}^3 \frac{e^{i\left(\varphi(\theta_{1(l)}, \theta_{2(l)})\omega_e t + \frac{\pi}{4}\text{sgn}\mathcal{H}(\theta_{1(l)}, \theta_{2(l)})\right)}}{\sqrt{|\det\mathcal{H}(\theta_{1(l)}, \theta_{2(l)})|}}, \quad (89)$$

где $\theta_{1,2,3(l)}$ определяются уравнением (86), и, наконец, при $4\alpha^3 + \beta^2 = 0$, выра-

жение для $\check{\mathbb{I}}$ записывается в виде

$$\check{\mathbb{I}}_{4\alpha^3+\beta^2=0}(w_1, w_2) = \begin{cases} 0, & 4\alpha^3 + \beta^2 \neq 0, \\ \frac{1}{2\pi\omega_e t} \sum_{l,s} \left. \frac{e^{i\left(\varphi(\theta_1, \theta_2)\omega_e t + \frac{\pi}{4}\text{sgn}\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2)\right)}}{\sqrt{|\det\mathcal{H}(\theta_1, \theta_2)|}} \right|_{y_l \neq y_s}, & 4\alpha^3 + \beta^2 = 0. \end{cases} \quad (90)$$

Таким образом, решение для \mathbb{I} без учёта слагаемого ($O(\omega_e t)^{-1}$) можно записать в виде

$$\mathbb{I} \approx H(1 - |\mathbf{w}|) \left(\check{\mathbb{I}}_{4\alpha^3+\beta^2=0} + \check{\mathbb{I}}_{4\alpha^3+\beta^2>0} H(4\alpha^3 + \beta^2) + \check{\mathbb{I}}_{4\alpha^3+\beta^2<0} H(-4\alpha^3 - \beta^2) \right). \quad (91)$$

Окончательно, подставляя (91) в (71), и, заменяя $w_1 = i/(\omega_e t)$, $w_2 = j/(\omega_e t)$, запишем приближение для поля скоростей частиц в следующем виде

$$v_{i,j} \approx v_0 H\left(\omega_e t - \sqrt{i^2 + j^2}\right) \text{Re} \left(\check{\mathbb{I}}_{4\alpha^3+\beta^2=0} + \check{\mathbb{I}}_{4\alpha^3+\beta^2>0} H(4\alpha^3 + \beta^2) + \check{\mathbb{I}}_{4\alpha^3+\beta^2<0} H(-4\alpha^3 - \beta^2) \right). \\ \alpha = \alpha\left(\frac{i}{\omega_e t}, \frac{j}{\omega_e t}\right), \quad \beta = \beta\left(\frac{i}{\omega_e t}, \frac{j}{\omega_e t}\right). \quad (92)$$

Замена переменных $w_1 = i/(\omega_e t)$, $w_2 = j/(\omega_e t)$ (без модулей) была сделана с учётом того, что поле скоростей симметрично относительно линий, проходящих через нулевую частицу.

Приведём сравнение асимптотического решения для поля скоростей частиц (92) с точным решением (формула (70)) и численным решением. Для построения точного решения интеграл по \mathbf{k} заменяется суммой Римана с разбиением области интегрирования на 10^6 одинаковых квадратов. Для построения численного решения производится численное интегрирование уравнения динамики симплектическим методом leap-frog с шагом по времени $\omega_e \Delta t = 0.01$. Численное моделирование проводилось для квадратной решётки, содержащей 10^6 частиц при периодических граничных условиях.

Для тестирования асимптотического решения построим поля скоростей в фиксированный момент времени ($\omega_e t = 200$) и при фиксированном индексе j : на главной горизонтали при $j = 0$ и при $j = 50$, а также поле скоростей на

диагонали квадратной решётки. Результаты моделирования представлены на рисунках (14—16).

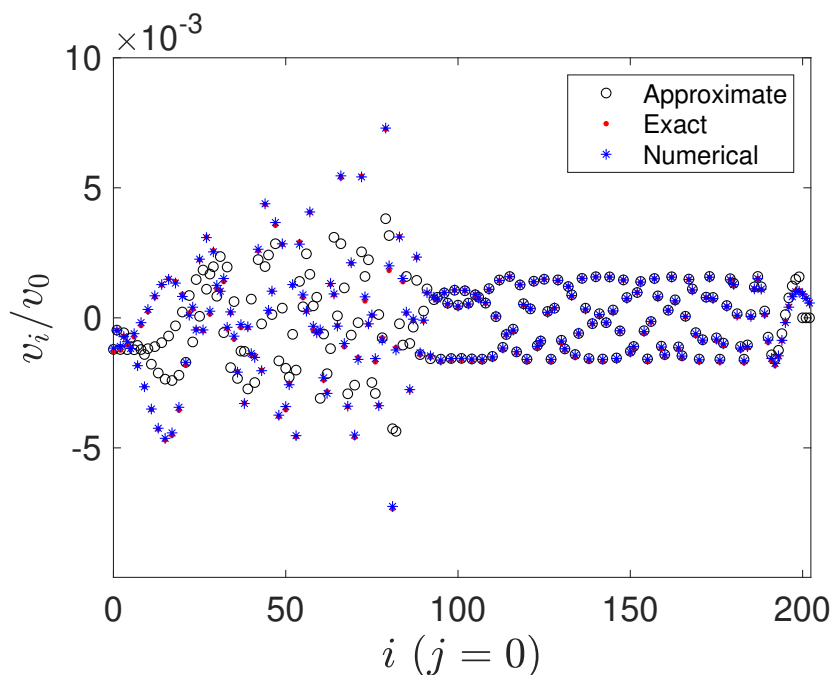


Рис. 14: Приближённое, точное и численное решения для поля скоростей частиц, находящихся на горизонтали $j = 0$ в момент времени $\omega_e t = 200$.

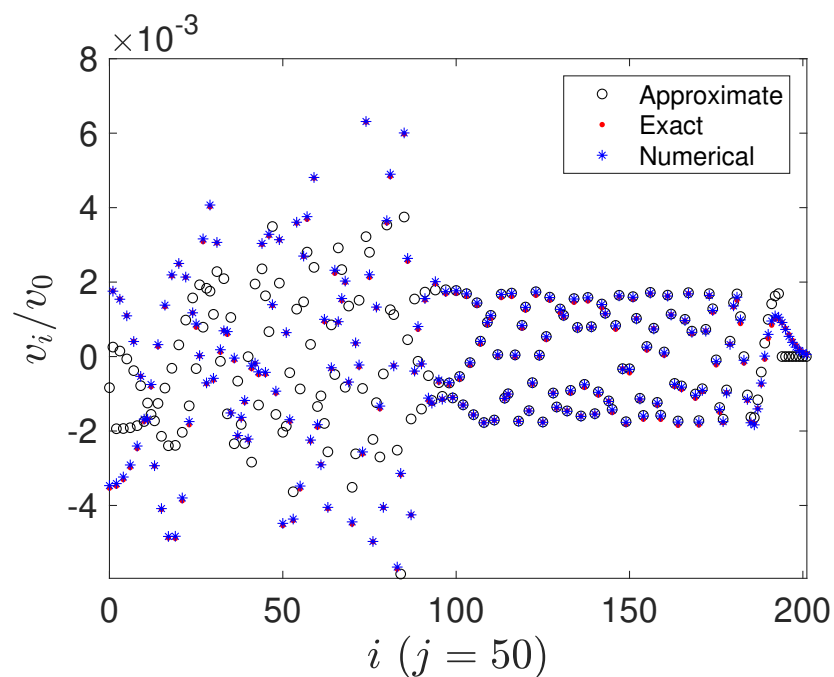


Рис. 15: Приближённое, точное и численное решения для поля скоростей частиц, находящихся на горизонтали $j = 50$ в момент времени $\omega_e t = 200$.

Из рисунков (14—16) видно, что асимптотическое решение годится для

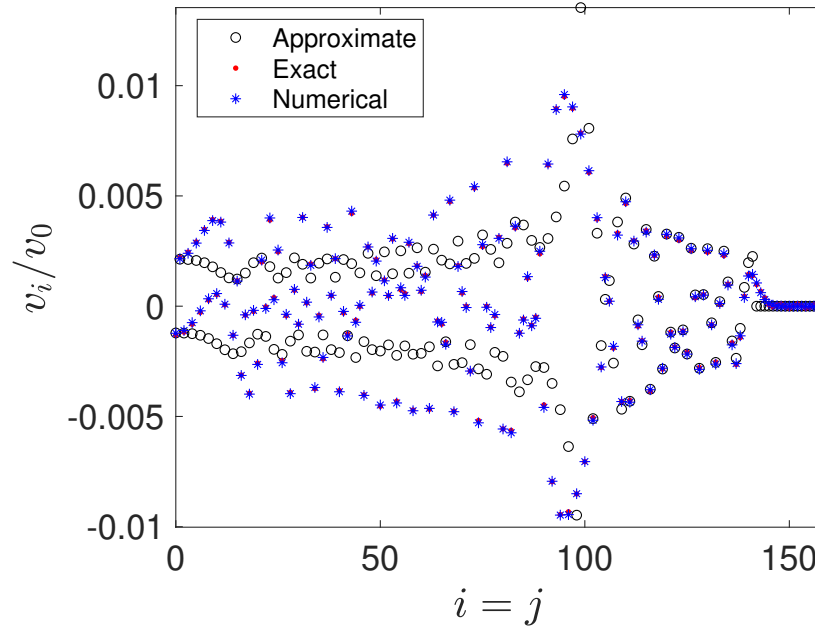


Рис. 16: Приближённое, точное и численное решения для поля скоростей частиц, находящихся на диагонали решётки в момент времени $\omega_e t = 200$.

качественного описания полей скоростей частиц. Сравнение количественного описания аналитических результатов с результатами численного моделирования показало, что точное решение (70) практически совпадает в масштабе рисунка с численным решением во всех точках расположения частиц. Однако, асимптотическое (92) решение согласуется с численным только в точках, приближенных к фронту. В точках далеко позади фронта и приближенных к нулевой частице асимптотическое и численное решения расходятся.

Приведём возможные причины несовпадения асимптотического и точного/численного решений:

1. Неучёт вырожденной точки.
2. Возможно, для оценки поля скоростей вблизи линии $4\alpha^3 + \beta^2$ требуется несколько другой метод построения решения, чем метод стационарной фазы. Возможным альтернативным методом является нахождение асимптотики интеграла (71) путём его превращения в интеграл по частотам и оценка последнего через использование геометрических соображений [43].

2.4. Заключение к главе 2

Проведено исследование динамики квадратной решётки, подверженной точечному мгновенному начальному возмущению и совершающей поперечные колебания. Построено как аналитическое, так и численное решения для поля скоростей частиц. С использованием метода стационарной фазы построена асимптотика точного решения для поля скоростей на подвижном фронте — таким образом, предложено обобщение подхода С.Н.Гаврилова [11] на двумерные решётки. Однако, полученное асимптотическое решение описывает в точности только дальнее поле скоростей, возможные причины чего приведены в предыдущем параграфе.

Помимо уточнения асимптотики решения динамических задач для квадратной решётки, разработка методов построения асимптотических решений для сложных многомерных решёток является возможным направлением дальнейшего исследования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем результаты, выносимые на защиту:

1. Построено асимптотическое решение задачи динамики бесконечной цепи Гука на упругом основании, подверженной локальному силовому нагружению по периодическому закону: построены приближённые решения для перемещений частиц при разных частотах нагружения. Исследован характер распространения или локализации возмущений в зависимости от частоты нагружения. Показано, что нагружение с частотой, равной нижней или верхней частоте отсечки (на границе полосы пропускания) приводит к резонансу, где поле перемещений растёт со временем как $t^{\frac{3}{2}}$.

2. Обобщён подход С.Н. Гаврилова к нахождению асимптотики решения динамических задач на подвижном фронте (через метод стационарной фазы) к квадратной решётке, совершающей поперечные колебания. Построено приближённое решение для поля скоростей частиц.

Вышеуказанные результаты составляют научную новизну исследования.

Ожидается, что решения задач, рассмотренных в настоящей диссертации, могут быть вспомогательными для исследования нестационарных термомеханических процессов как в однородных кристаллах Гука, так и в кристаллических решётках, содержащих пространственные неоднородности (дефекты, интерфейсы, дислокации и пр.). Однако, стоит отметить, что в реальных задачах необходимо иметь дело с нелинейностью (нелинейными взаимодействиями). Результаты исследования, посвящённые гармоническим системам, могут быть нулевым приближением решений нелинейных задач или с точностью описывать эти решения на малых временах (см., например, [22]).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Сидоров, Ю. В., Федорюк, М. В., Шабунин, А. И. Лекции по ТФКП. 2-е издание (1982)
- [2] Fedoryuk, M. V. The saddle-point method. Science (1977) (in Russian)
- [3] Slepryan, L. I. Nonstationary elastic waves. Sudostroenie, Leningrad, 376 (1972) (in Russian)
- [4] Wong, R. Asymptotic approximations of integrals, Academic Press (1989)
- [5] Ai, B. Q., He, D., Hu, B. Heat conduction in driven Frenkel-Kontorova lattices: Thermal pumping and resonance. Physical Review E, 81(3), 031124 (2010)
- [6] Berinskii, I. E., Borodich, F. M. Elastic in-plane properties of 2D linearized models of graphene. Mechanics of Materials, 62, 60-68 (2013)
- [7] Cannas, S., Prato, D. Externally excited semi-infinite one-dimensional models. American Journal of Physics, 59(10), pp.915–920 (1991)
- [8] Chen, G. Non-Fourier phonon heat conduction at the microscale and nanoscale. Nature Reviews Physics, 3(8) (2021)
- [9] Dhar, A. Heat transport in low-dimensional systems. Advances in Physics, 57(5) (2008)
- [10] Erik P. DeBenedictis. Will Moore's Law be Sufficient? IEEE (2004)
- [11] Gavrilov, S. N. Discrete and continuum fundamental solutions describing heat conduction in a 1D harmonic crystal: Discrete-to-continuum limit and slow-and-fast motions decoupling. International Journal of Heat and Mass Transfer, 194, 123019 (2022)

- [12] Gavrilov, S. N. Non-stationary problems in dynamics of a string on an elastic foundation subjected to a moving load. *J. Sound Vib.* 222(3), 345–361 (1999)
- [13] Gavrilov, S.N., Krivtsov, A.M.. Steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional square harmonic scalar lattice lying in a viscous environment and subjected to a point heat source, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* (2019)
- [14] Gavrilov, S. N., Krivtsov, A. M. Steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional square harmonic scalar lattice lying in a viscous environment and subjected to a point heat source. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 32(1), 41-61 (2020)
- [15] Gavrilov, S. N., Krivtsov, A. M. Steady-state ballistic thermal transport associated with transversal motions in a damped graphene lattice subjected to a point heat source. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 34(1), 297-319 (2022)
- [16] Gavrilov, S.N., Krivtsov, A.M., Tsvetkov D.V. Heat transfer in a one-dimensional harmonic crystal in a viscous environment subjected to an external heat supply. *Continuum Mech. Thermodyn.* 31, 255–272 (2018)
- [17] Gendelman, O. V., Paul, J. Kapitza thermal resistance in linear and nonlinear chain models: isotopic defect. *Physical Review E*, 103(5), 052113 (2021)
- [18] Hemmer, P. C. Dynamic and stochastic types of motion in the linear chain. Tapir forlag (1959)
- [19] Katsura, S., Inawashiro, S. Asymptotic form of the lattice Green's function of the square lattice. *Annals of Physics*, 77(1-2), 206-215 (1973)

- [20] Kepesidis, K. V., Bennett, S. D., Portolan, S., Lukin, M. D., Rabl, P. Phonon cooling and lasing with nitrogen-vacancy centers in diamond. *Physical Review B*, 88(6), 064105 (2013)
- [21] Kevrekidis, P. G., Dmitriev, S. V., Takeno, S., Bishop, A. R., Aifantis, E. C. Rich example of geometrically induced nonlinearity: From rotobreathers and kinks to moving localized modes and resonant energy transfer. *Physical Review E*, 70(6), 066627 (2004)
- [22] Korznikova, E.A., Kuzkin, V.A., Krivtsov, A.M., Xiong, Daxing, Gani, Vakhid A., Kudreyko, A.A., Dmitriev, S.V.: Equilibration of sinusoidal modulation of temperature in linear and nonlinear chains. *Phys. Rev. E* 102, 062148 (2020)
- [23] Krivtsov, A. M. Dynamics of matter and energy. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 103(4), e202100496 (2023)
- [24] Kuzkin, V. A., Krivtsov, A. M. Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*, 3(01n02) (2018)
- [25] Kuzkin, V. A., Krivtsov, A. M. Fast and slow thermal processes in harmonic scalar lattices. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 29(50), 505401 (2017)
- [26] Kuzkin, V. A. Thermal equilibration in infinite harmonic crystals. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 31(5), 1401-1423 (2019)
- [27] Lepri, S., Livi, R., Politi, A. (2016). Heat Transport in Low Dimensions: Introduction and Phenomenology. In: Lepri, S. (eds) *Thermal Transport in Low Dimensions*. Lecture Notes in Physics, vol 921. Springer, Cham.

- [28] Liazhkov, S. D. Unsteady thermal transport in an instantly heated semi-infinite free end Hooke chain. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 35(2), 413-430 (2023)
- [29] Liazhkov, S. D., Kuzkin, V. A. Unsteady two-temperature heat transport in mass-in-mass chains. *Physical Review E*, 105(5), 054145 (2022)
- [30] Li, B., Wang, L., Casati, G. Thermal diode: Rectification of heat flux. *Physical review letters*, 93(18), 184301 (2004)
- [31] Malik, F.K., Fobelets, K.: A review of thermal rectification in solid-state devices. *J. Semicond.* 43(10), 1–18 (2022).
- [32] Maurya, G., Sharma, B. L. Scattering by two staggered semi-infinite cracks on square lattice: an application of asymptotic Wiener–Hopf factorization. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 70(5), 133 (2019)
- [33] Podolskaya, E. A., Krivtsov, A. M. and Kuzkin, V. A. Discrete thermomechanics: From thermal echo to ballistic resonance (a review). *Mechanics and Control of Solids and Structures*, 501-533 (2022)
- [34] Pupin, M. Propagation of long electrical waves. *Transaction of the AIEE*, pp.91-142 (1899)
- [35] Saadatmand, D., Xiong, D., Kuzkin, V. A., Krivtsov, A. M., Savin, A. V., Dmitriev, S. V. Discrete breathers assist energy transfer to ac-driven nonlinear chains. *Physical Review E*, 97(2), 022217 (2018)
- [36] Schrödinger, E.: Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme. *Ann. Phys.* 349(14), 916–944 (1914)
- [37] Shishkina, E. V., Gavrilov, S. N. Unsteady ballistic heat transport in a 1D harmonic crystal due to a source on an isotopic defect. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 35(2), 431-456 (2023)

- [38] Shkurinov, A. P., Sinko, A. S. et al. Impact of the dipole contribution on the terahertz emission of air-based plasma induced by tightly focused femtosecond laser pulses. *Physical Review E*, 95(4), 043209 (2017)
- [39] Slepyan, L. I., Tsareva, O. V. Energy flux for zero group velocity of the carrying wave. In *Soviet Physics Doklady* (Vol. 32, p. 522) (1987)
- [40] Sokolov, A. A., Krivtsov, A. M., Müller, W. H. Localized heat perturbation in harmonic 1D crystals: Solutions for the equation of anomalous heat conduction. *Physical Mesomechanics*, 20, 305-310 (2017)
- [41] Verlet, L.. Computer experiments on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. *Physical review*, 159(1), 98 (1967)
- [42] Liazhkov, S.D. ArXiv:2212.09441v2 (2023)
- [43] Tsaplin, V. A.,Kuzkin, V. A. Temperature oscillations in harmonic triangular lattice with random initial velocities. arXiv preprint arXiv:1709.04670 (2017)