

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого**  
Институт прикладной математики и механики  
Кафедра теоретической механики

Работа допущена к защите  
Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., проф.

\_\_\_\_\_ **А. М. Кривцов**

" \_ " \_\_\_\_\_

**ДИССЕРТАЦИЯ**

**на соискание академической степени**

**МАГИСТРА**

**Тема: «Динамическое исследование аневризмы аорты»**

Направление: 010800 – Механика и математическое моделирование

Выполнил студент гр. 63604/1

А. С. Гнездилова

Руководитель проф. дфмн.

А. В. Порубов

Консультант по вопросам охраны труда

В. В. Монашков

Санкт-Петербург  
2015

## Содержание

<b>Введение .....</b>	<b>3</b>
<b>1. Постановка задачи.....</b>	<b>9</b>
<b>2. Точное решение в виде уединенной волны.....</b>	<b>13</b>
<b>3. Численное исследование эволюции локализованной волны в аорте .....</b>	<b>16</b>
3.1 Результаты визуализации поведения локализованной уединенной волны в трубке с наличием неоднородности .....	18
3.2 Анализ результатов .....	23
3.3 Сравнение основных элементов численного решения с частным точным .....	25
3.4 Задача акустодиагностики .....	26
<b>Заключение.....</b>	<b>29</b>
<b>Приложение А. Охрана труда .....</b>	<b>30</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>40</b>

## Введение

Как известно, аорта – самый крупный артериальный сосуд в теле человека, от которого отходят все артерии, образующие большой круг кровообращения. Аорту подразделяют на три отдела: восходящую часть аорты, дугу аорты и нисходящую часть аорты, которая, в свою очередь, делится на грудную и брюшную части.

Восходящая часть аорты является продолжением артериального конуса левого желудочка, начинаясь от отверстия аорты. Дуга аорты своей выпуклостью обращена вверх. От выпуклости отходят три крупных сосуда: плечеголовной ствол, левая общая сонная артерия и левая подключичная артерия. Нисходящая аорта начинается на уровне тел III—IV грудных позвонков и, сужаясь, переходит в срединную крестцовую артерию, которая проходит вдоль передней поверхности крестца. Нисходящая аорта подразделяется на грудную часть аорты, располагающуюся над диафрагмой, и брюшную часть аорты, находящуюся под диафрагмой. На уровне IV поясничного позвонка от нисходящей аорты отходят правая и левая общие подвздошные артерии.

С аортой связано множество заболеваний. Аневризма аорты – расширение участка аорты, обусловленное патологическим изменением соединительно-тканых структур ее стенок вследствие атеросклеротического процесса, воспалительного поражения, врожденной неполноценности или механических повреждений артериальной стенки [24]. Разрыв аневризмы ведет к мощным внутренним кровоизлияниям, представляющим смертельную опасность. Среди людей, попавших в больницу с диагнозом расслоения или разрыва аневризмы аорты, в живых остаются не более 30%. Поэтому лучше распознать аневризму до начала расслоения и разрыва. Кроме явной опасности, аневризма аорты несет и скрытую: она может давить на соседние органы, быть причиной анемии (малокровия), способствует появлению тромбов, которые в любой момент могут закупорить кровеносные

сосуды. В свое время, именно аневризма аорты привела к внезапной гибели Альберта Эйнштейна, Шарля де Голля и многих других людей. До 75% всех аневризм развивается в грудной, брюшной аорте и зоне ее бифуркации (разделения) на подвздошные артерии. Помимо аорты, аневризма может возникнуть в артериях головного мозга, подвздошных артериях, а также в крупных артериях нижних конечностей [23].

Аортальный стеноз - сужение отверстия аорты за счет срачивания створок ее клапана, препятствующее нормальному току крови из левого желудочка в аорту. Это очень распространенный порок сердца у взрослых (70-85 % случаев среди всех пороков). Приблизительно 2 % людей старше 65, 3 % людей старше 75, 4 % процента людей старше 85 имеют данную патологию [24].

Следует отметить, что артериальные заболевания, такие как стеноз или аневризма аорты, порождают образование неоднородностей в окрестности пораженного участка стенки аорты. Для лечения заболеваний сердечно-сосудистой системы хирурги часто используют некоторые искусственные материалы, такие как стенты и протезы. Стент — специальная, изготовленная в форме цилиндрического каркаса упругая металлическая или пластиковая конструкция, которая помещается в просвет полых органов и обеспечивает формирование нормальных стенок сосуда. Данный метод является успешным, но в краткосрочной перспективе, так как эти материалы стали причиной аномальных механических напряжений и нарушений артериального кровотока за счет возобновления роста стенок или образования тромбов [18].

Моделирование внутренней структуры стенок аорты представляет собой трудную задачу [16]. Однако, в ряде случаев оказываются вполне пригодными упрощенные модели, в частности, те, в которых используется модель тонкостенной эластичной трубки для стенки артерии [5, 22].

Движение жидкости по трубкам с тонкими эластичными стенками представляет собой комплексную задачу гидроупругости, к которой многие неоднократно обращались исследователи, особенно в области биомеханики кровообращения, начиная с французского ученого Пуазейля [3, 6]. Уравнения, описывающие нелинейную модель потока крови, впервые были написаны Эйлером в 1775 году, однако он так и не смог решить свои уравнения. В 1985 году Ламберт предложил в первую очередь использовать метод характеристик для расчета нелинейного потока крови.

Течение жидкости по тонкостенным эластичным трубкам можно условно разделить на три относительно самостоятельных гидродинамических явления: перенос объема жидкости по трубке, распространение волны давления (в биомеханике ее называют пульсовой волной), скорость которой обычно выше скорости жидкости, и возникновение высокочастотных колебаний вследствие потери устойчивости. Эти явления носят нелинейный характер и описываются уравнениями, следующими из уравнений Навье-Стокса [5].

Одним из важных гемодинамических процессов является распространение пульсовой волны. Если регистрировать деформации стенки артерии в двух разноудаленных от сердца точках, то окажется, что деформация сосуда дойдет до более удаленной точки позже, то есть по сосуду распространяется волна пульсовых колебаний объема сосуда, давления и скорости кровотока, однозначно связанных друг с другом. Это так называемая пульсовая волна. Пульсовая волна - процесс распространения изменения объема вдоль эластичного сосуда в результате одновременного изменения в нем давления и массы жидкости.

Скорость распространения пульсовой волны зависит от свойств сосуда и крови. Скорость, измеренная экспериментально, составляет  $V_{п} \approx 6 - 8 \text{ м / с}$ , что в 20 - 30 раз больше, чем скорость движения частиц крови  $V_{кр} = 0,3 - 0,5 \text{ м / с}$ . За время изгнания крови из желудочков (время систолы)  $t_c =$

0,3 с пульсовая волна успевает распространиться на расстояние  $L_{\text{п}} = V_{\text{п}} \cdot t_{\text{с}} \approx 2$  м, то есть охватить все крупные сосуды - аорту и артерии. Экспериментальное определение скорости пульсовой волны лежит в основе диагностики состояния сосудов [1].

На практике скорость распространения пульсовой волны в аорте обычно измеряют между двумя точками сосудистой системы. Волны регистрируют на правой сонной и правой бедренной артериях, и скорость пульсовой волны вычисляют исходя из временной задержки между ними [9]. Ряд наблюдений указывает на нелинейный и локализованный характер волн в аорте, в частности, на зависимость амплитуды волны от ее скорости и длины [22].

Нелинейные колебания и волны занимают особое место в современной физике. Многие физические процессы, сопровождающиеся большим энерговыделением, такие как, например, землетрясения, извержения вулканов, промышленные взрывы, старты ракет, магнитные бури и т. п., имеют существенно нелинейный характер. Однако нелинейные процессы по сравнению с линейными в целом остаются малоизученными, а потому и недостаточно часто используемыми [4]. Можно говорить о том, что вся физика - нелинейна, и нелинейные задачи имеются во всех ее областях, так и о том, что целесообразно рассматривать нелинейную физику как самостоятельный раздел. Обе эти точки зрения сегодня в равной мере имеют право на жизнь.

Термин «нелинейный», полезно подчеркивать в тех случаях, когда:

- 1) построена математическая модель физического явления, основанная на нелинейных уравнениях, и решение этих уравнений интересно само по себе. При этом подчеркивается математический смысл;

2) анализируются новые явления, основанные на нарушении принципа суперпозиции решений или на взаимодействии физических объектов между собой. В этом случае подчеркивается физический смысл;

3) идеи, методы, образы, сформировавшиеся в одном из разделов «нелинейной физики», переносятся на другую область. И тогда важен методический смысл, возможность использования аналогий. Часто этот смысл вкладывают в слова «физика нелинейных колебаний и волн», «нелинейная динамика»;

4) идет общение физиков и математиков, работающих в разных направлениях, выработка общего языка и терминологии. В этом заключается «информационный» смысл слова «нелинейность». Обозначающего принадлежность к части научного сообщества, занимающейся этой актуальной и весьма «модной» проблематикой.

Число нелинейных проблем, решенных в различных разделах физики, непрерывно возрастает. В будущем, когда объемы публикуемых «линейного» и «нелинейного» материалов станут примерно одинаковыми и нелинейность задачи перестанет быть достаточным критерием ее актуальности, частота употребления термина «нелинейный», вероятно, уменьшится [10].

Большой прогресс достигнут в области математического моделирования нелинейных волн, решения модельных нелинейных уравнений в частных производных [11]. Развита теория нахождения точных решений уравнений в виде бегущей волны [7], разработаны методы численного исследования уравнений, а также комплексный подход, основанный на комбинированном использовании аналитических и численных методов [8]. Эффективным инструментом комплексного исследования сложных явлений являются символьные математические программы, в частности, программа Вольфрам Математика. Она позволяет получать как аналитические, так и численные решения нелинейных уравнений в частных производных, проводить эффективную визуализацию

полученных решений, сравнение аналитических и численных результатов [13, 15, 21].

В данной работе предлагается метод, с помощью которого наличие неоднородностей стенки аорты, образовавшихся в результате болезни или использования стента, можно обнаружить, наблюдая за изменением скорости и амплитуды волны деформации, распространяющейся вдоль стенки аорты. Используется разработанная ранее модель [22], в которой стенка аорты моделируется как тонкая эластичная цилиндрическая трубка, а кровь представляет собой несжимаемую идеальную жидкость. Математически такая гидро-упругая модель представляет собой связанную систему уравнений Навье-Стокса и уравнения движения поперечных волн деформации. В разделе 1 проводится постановка задачи и сведение исходных уравнений к модельному уравнению для поперечных волн деформации в виде модифицированного уравнения Буссинеска с переменными коэффициентами. В разделе 2 приводится его точное решение в виде уединенной локализованной бегущей волны, анализируется зависимость амплитуды и скорости волны от физических характеристик аорты и от неоднородности на стенках. Раздел 3 посвящен численному исследованию распространения локализованной волны деформации вдоль аорты с неоднородностями при помощи кода программы Вольфрам Математика. Установлены основные качественные и количественные изменения в поведении волны при прохождении неоднородности. Проведено сравнение основных элементов численного решения с частным точным решением из Раздела 2 с целью постановки задачи акустодиагностики по определению характера неоднородности по изменению поведения проходящей вдоль аорты нелинейной волны деформации. В Заключение формулируются основные результаты и направления будущих исследований.



## 1. Постановка задачи

Рассмотрим распространение пульсовой волны в стенке аорты, внутри которой течет кровь. Как и в более ранней работе [22] будем считать, что все процессы - одномерны. Это означает, что изменение давления и скорости потока не описываются через поперечное сечение, а рассматриваются как функции осевого расстояния  $x$  вдоль аорты и времени  $t$ . Аорта моделируется как бесконечно длинная прямая, круговая, однородная, тонкостенная, эластичная цилиндрическая трубка, заполненная идеальной жидкостью, которая моделирует кровь. Обоснование такого подхода дано в работе [22].

Тогда для жидкости внутри аорты справедливо уравнение движение в форме уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.1)$$

записанное для  $v(x, t)$  – скорости потока жидкости вдоль оси трубки. Другие обозначения суть:  $\rho$  – постоянная плотность жидкости,  $x$  – координата вдоль оси трубки,  $t$  – время,  $p(x, t)$  – давление жидкости.

Исходное уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(v S)}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

записывается для площади поперечного сечения трубки:

$$S(x, t) = \pi (R + u)^2, \quad (1.3)$$

где  $u(x, t)$  – радиальное упругое смещение стенки трубки,  $R = R(x)$  - радиус трубки. Уравнение неразрывности удобно переписать в виде:

$$u_t + v(R + u)_x + \frac{1}{2}(R + u)v_x = 0, \quad (1.4)$$

Для описания деформационных процессов в стенке трубки в [22] была разработана одномерная модель, приводящая к уравнению движения для сдвиговых волн:

$$\rho_0 H \frac{\partial^2 (R + u)}{\partial t^2} = (P - P_0) - \frac{h}{(R + u)} \sigma_r, \quad (1.5)$$

где для внешнего радиального напряжения было предположено, что

$$\sigma_r = E \frac{u}{R} \left( 1 + a \frac{u}{R} \right), \quad (1.6)$$

здесь  $E$  - модуль Юнга, а параметр  $a$  характеризует нелинейную упругость. Другие обозначения соответствуют внешнему давлению  $P$ ,  $P_0$  - атмосферное давление,  $\rho_0$  - плотность материала стенки, константы  $h$  и  $H$  пропорциональны толщине стенки и учитывают ее тканевую структуру [22].

Справедливы законы сохранения относительно равновесных значений  $h_0$  и  $H_0$ , которые позволяют получить [22]:

$$(R + u)H = RH_0 \Rightarrow H = \frac{H_0}{1 + \frac{u}{R}}, \quad (1.7)$$

$$(R + u)h = Rh_0 \Rightarrow h = \frac{h_0}{1 + \frac{u}{R}},$$

Подстановка этих соотношений в (1.5) приводит к уравнению:

$$\rho_0 u_{tt} = \frac{P - P_a}{H_0} \left( 1 + \frac{u}{R} \right) - \frac{E h_0 u}{R^2 H_0} \frac{1 + a \frac{u}{R}}{1 + \frac{u}{R}}, \quad (1.8)$$

Решение которого определяет давление:

$$P - P_a = \frac{\rho_0 H_0 u_{tt}}{1 + \frac{u}{R}} + \frac{E h_0 u \left(1 + a \frac{u}{R}\right)}{R^2 \left(1 + \frac{u}{R}\right)^2}, \quad (1.9)$$

В длинноволновом пределе  $u \ll R$ :

$$\begin{aligned} P - P_a &= \rho_0 H_0 u_{tt} + \frac{E h_0}{R^2} u \left(1 + \frac{a u}{R}\right) \left(1 - 2 \frac{u}{R} + \dots\right) + \dots \\ &= \frac{E h_0}{R^2} u + \frac{E h_0}{R^3} (a - 2) u^2 + \rho_0 H_0 u_{tt}, \quad (1.10) \end{aligned}$$

Подстановка в уравнение (1) приводит к уравнению:

$$v_t + v v_x = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{E h_0}{R^2} u\right)_x - \frac{(a-2)}{\rho_0} \left(\frac{E h_0}{R^3} u^2\right)_x - (H_0 u_{ttx}), \quad (1.11)$$

В работе [22] рассматривался случай постоянной величины радиуса  $R$ . Переменный радиус учитывался в [18]. Мы будем рассматривать случай резких изменений, которому соответствует кусочно-непрерывный характер радиуса, при этом производные от радиуса в уравнениях учитываться не будут. Тогда (1.11) преобразуется к виду:

$$v_t + \frac{1}{2} (v^2)_x + \frac{E h_0}{\rho_0} \frac{1}{R^2} u_x + (a - 2) \frac{E h_0}{\rho_0 R^3} (u^2)_x + H_0 u_{ttx} = 0, \quad (1.12)$$

А уравнение неразрывности (1.9) примет вид:

$$u_t + \frac{1}{2} R v_x + u_x v + \frac{1}{2} u v_x = 0, \quad (1.13)$$

В линейном случае имеем:

$$u_{tt} - \frac{E h_0}{2 \rho_0 R} u_{xx} = 0, \quad (1.14)$$

$$u_t + \frac{1}{2} R v_x = 0, \quad (1.15)$$

что позволяет записать зависимость между первыми производными в виде:

$$u_t = \pm \sqrt{\frac{Eh_0}{2\rho_0 R}} u_x, \quad (1.16)$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{Eh_0}{2\rho_0 R} \frac{R}{Ru}}, \quad (1.17)$$

Использование соотношений (1.16), (1.17) позволяет получить из (1.12), (1.13) новое модельное уравнение для пульсовой волны. Дифференцируя второе из уравнений по времени и домножая на  $\frac{1}{2}R$ , а первое - по пространственной переменной, можно получить путем вычитания второго уравнения из первого:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \frac{Eh_0}{2\rho_0 R} u_{xx} - \frac{H_0 R}{2} u_{xxtt} + (u_t v)_t + \frac{1}{2} (u v_x)_t - \frac{R}{4} (v^2)_x \\ - (a-2) \frac{Eh_0}{2R^2 \rho_0} (u^2)_{xx} = 0, \end{aligned} \quad (1.18)$$

Применив следующие замены из линейного анализа:

$$(u_x v)_t = \frac{Eh_0}{2\rho_0 R^2} (u^2)_{xx}, \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (u v_x)_t &= \frac{1}{2} (u_t v_x + u v_{xt}) = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} R v_x^2 - \frac{Eh_0}{\rho_0 R^2} u u_{xx} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} R \frac{1}{R^2} \frac{Eh_0}{2\rho_0 R} u_x^2 - \frac{Eh_0}{\rho_0 R^2} u u_{xx} \right) = -\frac{1}{4} \frac{Eh_0}{\rho_0 R^2} (u^2)_{xx}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} -\frac{R}{4} (v^2)_{xx} &= -\frac{R}{2} (v v_{xx} + v_x v_x) = -\frac{R}{4} \frac{4}{R^2} \frac{Eh_0}{2\rho_0 R} (u^2)_{xx} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{Eh_0}{\rho_0 R^2} (u^2)_{xx}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

окончательно получаем новое модельное уравнение:

$$u_{tt} - \frac{Eh_0}{2\rho_0 R} u_{xx} - \frac{1}{4} \frac{Eh_0}{\rho_0 R^2} (2a - 3)(u^2)_{xx} - \frac{H_0 R}{2} u_{xxtt} = 0, \quad (1.22)$$

(1.22) – модифицированное уравнение Буссинеска.

## 2. Точное решение в виде бегущей уединенной волны

Точное решение уравнения (1.22) имеет вид:

$$u[x, t] = 6 \frac{c_1}{a_1} \frac{1}{1 - 4\beta^2 c_1} \beta^2 \text{Sech} \left[ \beta \left( x - \sqrt{\frac{1}{1 - 4\beta^2 c_1}} t \right) \right]^2, \quad (2.1)$$

где амплитуда:

$$Am = \frac{6c_1\beta^2}{a_1(1 - 4c_1\beta^2)}, \quad (2.2)$$

и скорость:

$$v = \sqrt{\frac{1}{1 - 4\beta^2 c_1}}, \quad (2.3)$$

Здесь  $a_1$  и  $c_1$  – комбинации коэффициентов уравнения (1.22), характеризующие упругие свойства стенки,  $\beta$  – свободный параметр.

Форма точного решения по времени при  $a_1 = 0,5$  и  $c_1 = 0,5$  в виде уединенной локализованной бегущей волны показана на рис.2.1.

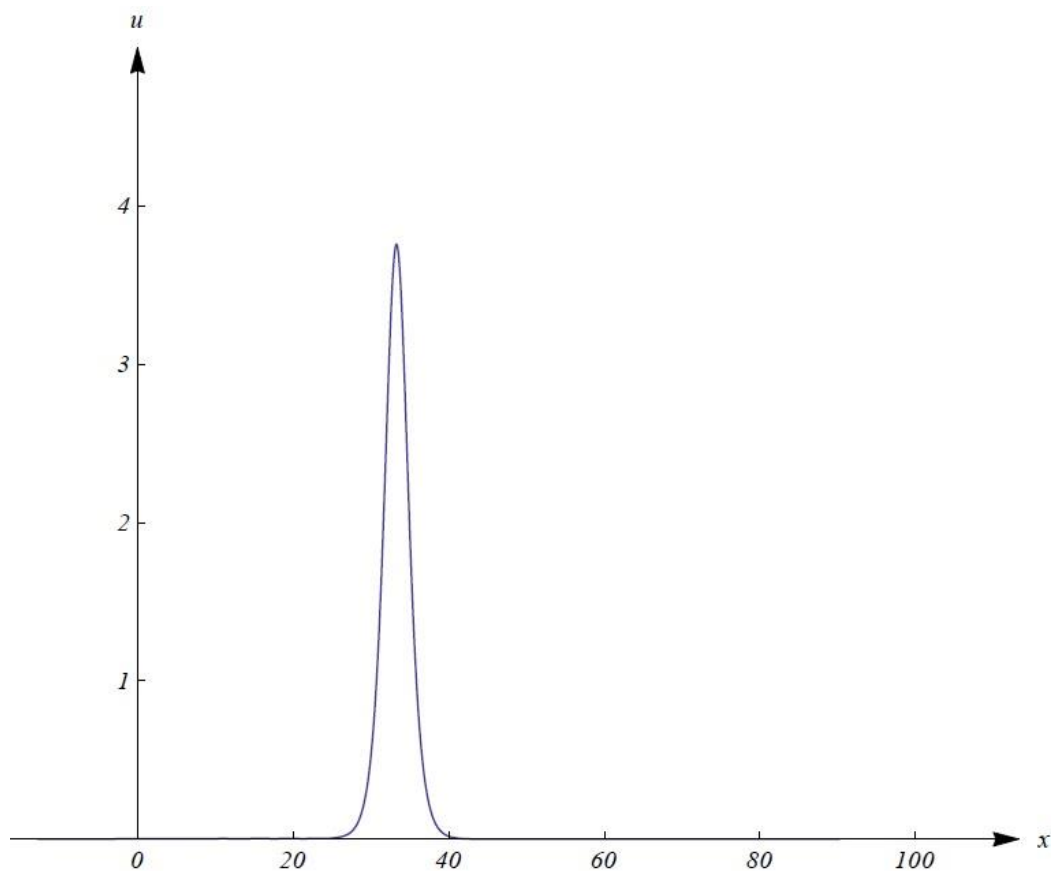


Рис.2.1. Форма точного решения по времени при  $t=20$

Для анализа зависимости амплитуды и скорости волны от физических характеристик аорты и от неоднородности на стенках изменяем коэффициенты  $a_1$  и  $c_1$ . На приведенных ниже графиках (рис.2.2. и рис.2.3.) показаны данные зависимости для уединенной локализованной бегущей волны (рис.2.1.).

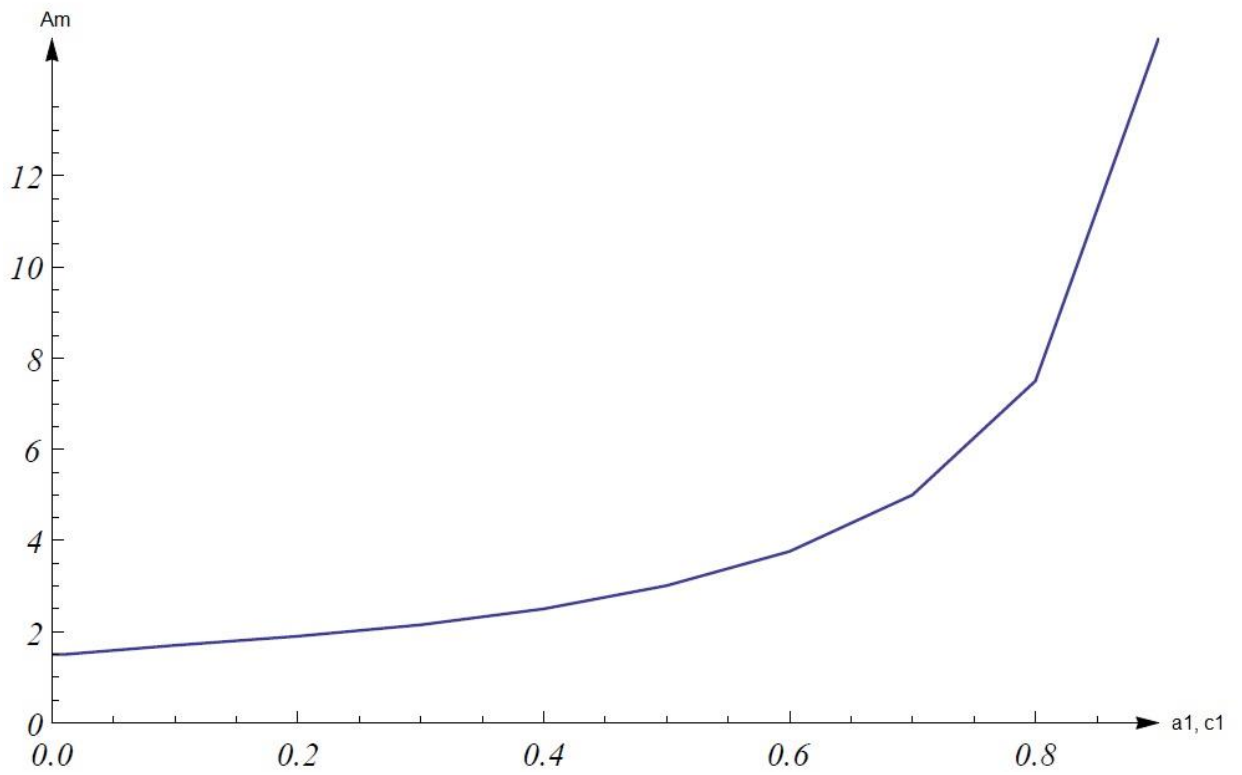


Рис. 2.2. График зависимости амплитуды от коэффициентов  $a_1$  и  $c_1$ .

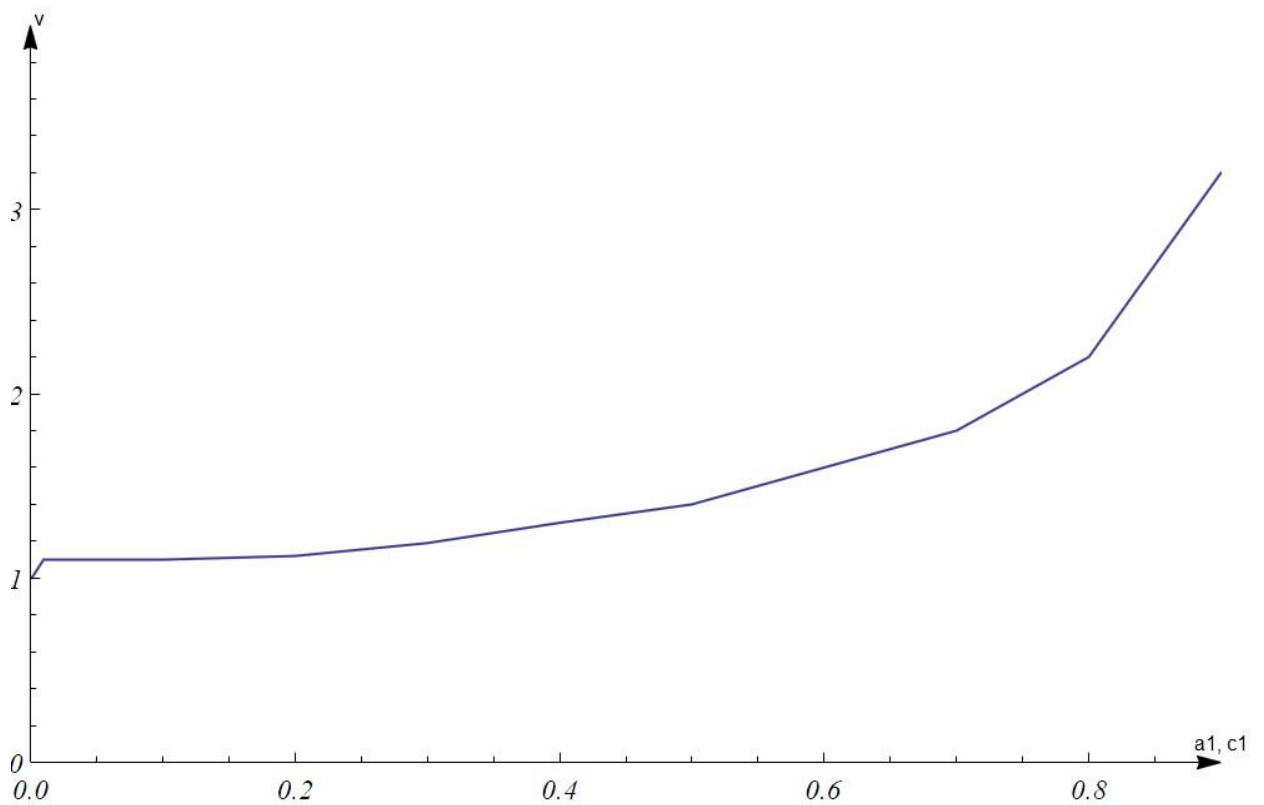


Рис.2.3. График зависимости скорости от коэффициентов  $a_1$  и  $c_1$ .

Из графиков на рис.2.2 и рис.2.3 видно, что изменение амплитуды и скорости бегущей волны прямо пропорционально изменению коэффициентов  $a_1$  и  $c_1$ . А это значит, что величины амплитуды и скорости зависят от физических характеристик аорты и от неоднородности на стенках.

### **3.Численное исследование эволюции локализованной в волны в аорте**

В ходе исследования был разработан код в пакете Вольфрам Математика, с помощью которого и были решены нелинейные уравнения в частных производных и произведена визуализация полученных решений.

Начальное условие (при  $t=0$ ) представляет собой точное решение уравнения (1.22):

$$u[x] = 6 \frac{c_1}{a} \frac{1}{1 - 4\beta^2 c_1} \beta^2 \text{Sech}[\beta x]^2, \quad (3.1)$$

Неоднородность стенок трубки задается кусочно-непрерывной функцией:

$$R[x] = c_{11} + (c_{21} - c_{11})(\text{Tanh}[km(x - x_{11})] - \text{Tanh}[kn(x - x_{12})]), \quad (3.2)$$

где  $c_{11}$ ,  $c_{22}$  – размеры изменения глубины неоднородности,  $x_{11}$ ,  $x_{12}$  – размеры изменения длины неоднородности,  $km$ ,  $kn$  – крутизна заднего и переднего фронта неоднородности соответственно.



На рис. 3.1 приведен график функции  $R[x]$ , при значениях параметров:

$$c_{11} = 1, c_{22} = 0.9, x_{11} = 30, x_{12} = 100, km = 4, kn = 0.1$$

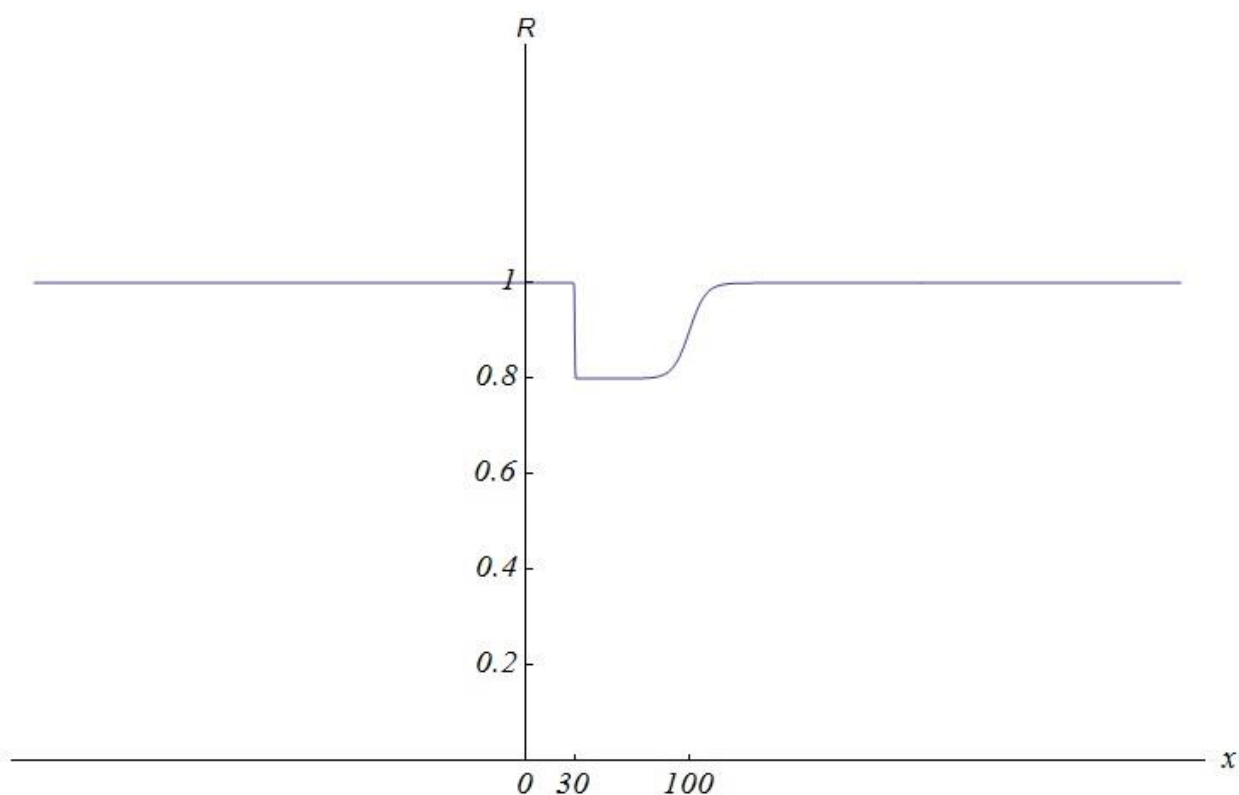


Рис. 3.1. Пример профиля неоднородности в трубке

Модифицированное уравнение Буссинеска (1.22) с учетом изменения стенок (3.2) записывается в виде:

$$R(x)^2 u_{r,tt} - \frac{Eh_0}{2\rho_0 R} R(x) u_{r,xx} - \frac{1}{4} \frac{Eh_0}{\rho_0 R^2} R(x)^2 (2a - 3) (u_r^2)_{xx} - \frac{H_0 R}{2} R(x)^3 u_{r,xxtt} = 0, \quad (3.3)$$

Далее было проведено численное исследование эволюции локализованной в волны в аорте. В пакете Вольфрам Математика было произведено решение нелинейного уравнения в частных производных (3.3) и построена эволюция изменения по времени частей численного решения.

В разделе 3.1 приведены результаты визуализации данного решения для неоднородности, представленной на рис. 3.1.

### 3.1 Результаты визуализации поведения локализованной уединенной волны в трубке с наличием неоднородности

Как говорилось ранее, для лечения заболеваний сердечно-сосудистой системы, в особенности аневризмы аорты, часто используются стенты. Наличие которых может привести к повторному образованию неоднородностей в аорте. В этом разделе будет рассматриваться эффект незначительного сужения стенок аорты, который моделирует как случай последствия от стентирования, так и заболевание - стеноз. Коэффициенты в данном случае принимаем равными:  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $c_1 = 0.95$ .

При заданных условиях поведение волны деформации в момент времени  $t = 15,5$  показано на рис. 3.1.1. Положение волны деформации в данный момент времени соответствует значению координаты  $x = 30$ , другими словами профиль волны находится на левой границе неоднородности. Синей пунктирной линией показано начальное значение амплитуды.

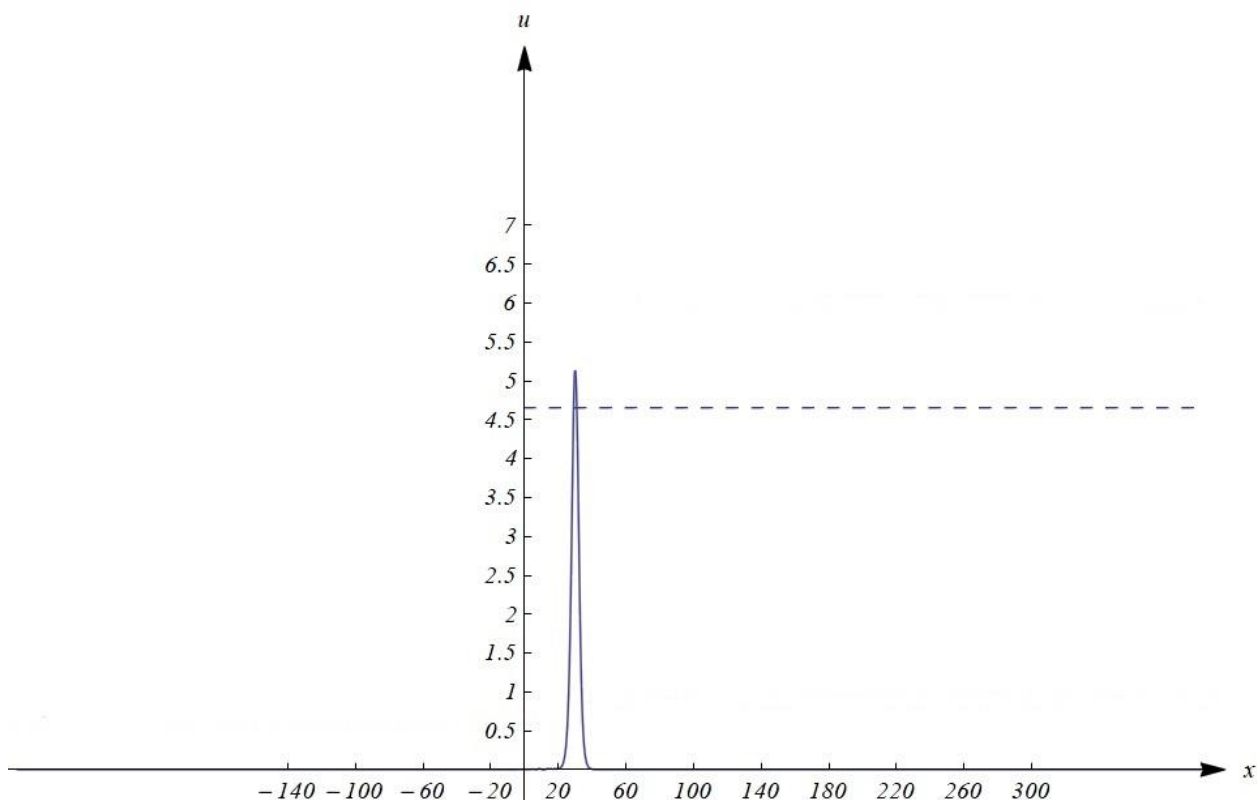


Рис.3.1.1. Поведение волны деформации при  $t=15,5$

Из графика легко заметить, что на данном участке значение амплитуды увеличивается.

Далее изменяя значение времени до  $t = 20$  имеем следующую картину (рис.3.1.2).

Из графика видно, что внутри неоднородности амплитуда основной волны резко возрастает, также образуется отраженная волна, имеющая максимальную амплитуду в данный момент времени. Красной пунктирной линией обозначено максимальное значение амплитуды для образовавшейся отраженной волны.

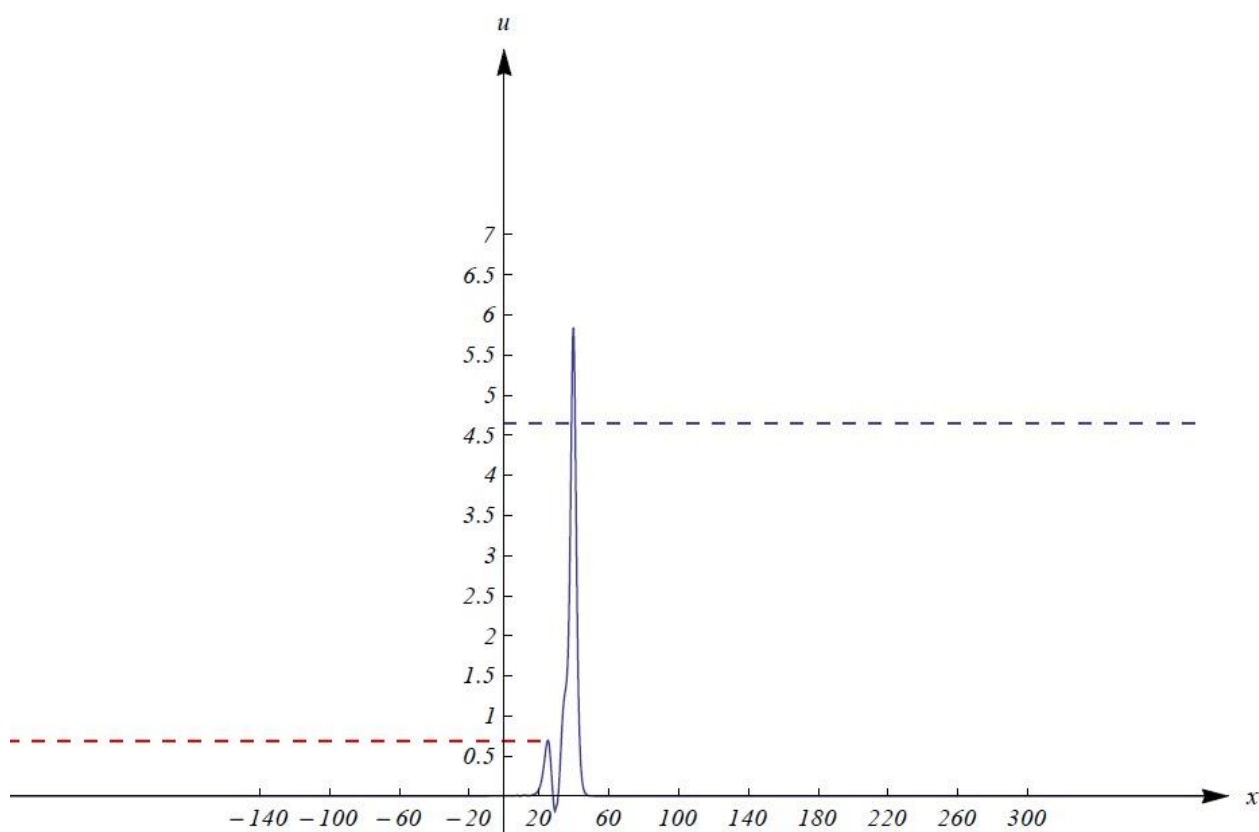


Рис.3.1.2. Поведение волны деформации при  $t=20$

На рис. 3.1.3. показано поведение волны деформации в момент времени  $t = 35$ . В этот момент времени можно наблюдать формирование вторичной волны, с максимальным значением амплитуды, которое показано зеленой пунктирной линией. Амплитуда отраженной волны уменьшается, в то время как амплитуда основной волны достигает своего максимального значения, которое обозначено коричневой пунктирной линией.

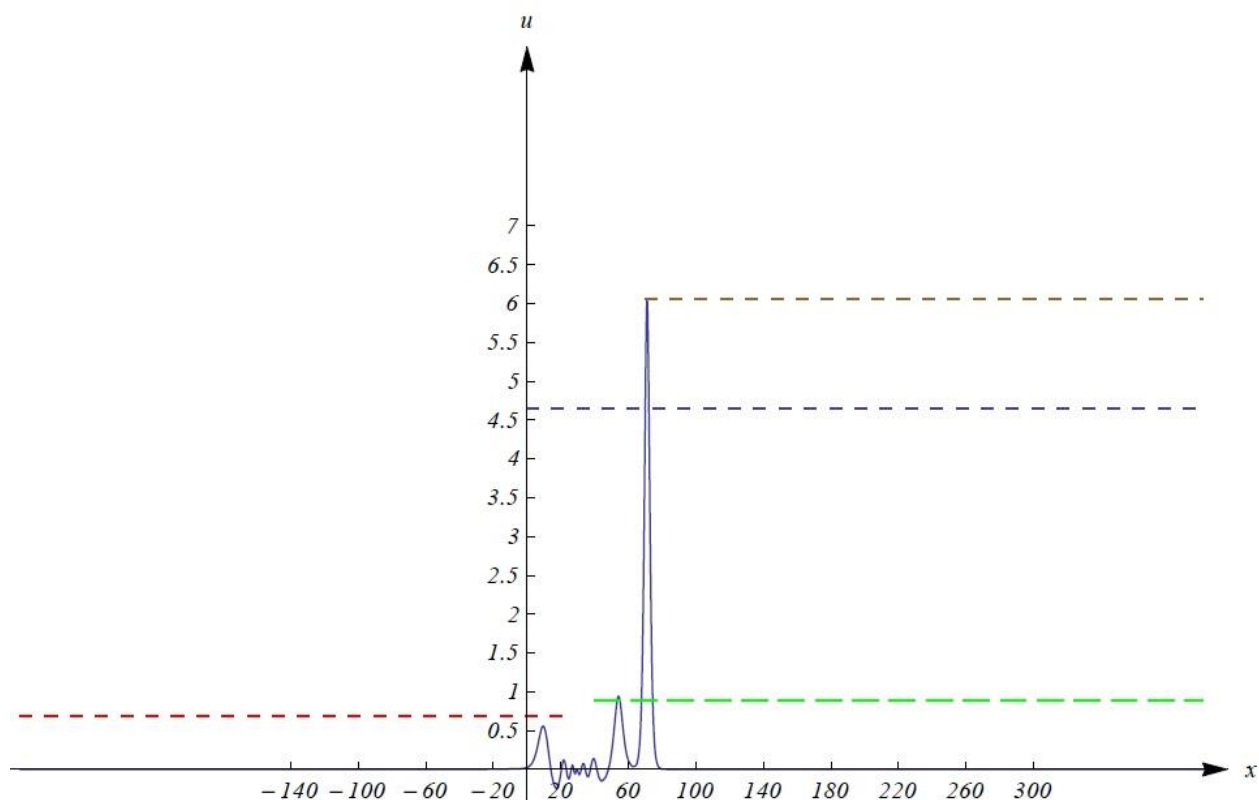


Рис. 3.1.3. Поведение волны деформации при  $t=35$

Далее рассмотрим поведение волны деформации на правой границе неоднородности ( $x = 100$ ), положение которой соответствует значению времени  $t = 49,4$  (см. рис. 3.1.4).

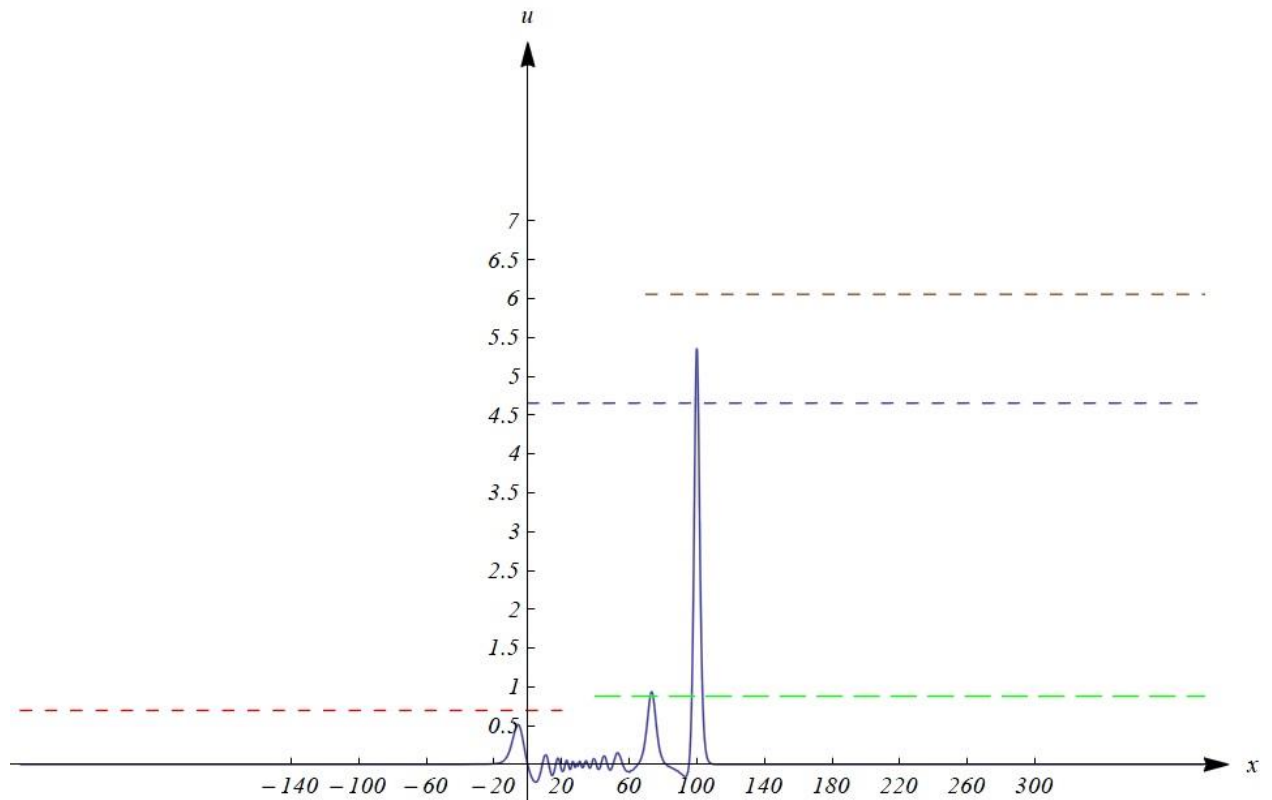


Рис. 3.1.4. Поведение волны деформации при  $t=49,4$

Из графика на рис. 3.1.4 видно, что значения амплитуд основной и отраженной волн уменьшаются. Вторичная же волна продолжает распространяться с максимальной амплитудой.

Как меняются параметры волны на участке, удаленном от неоднородности можно наблюдать на рис. 3.1.5.

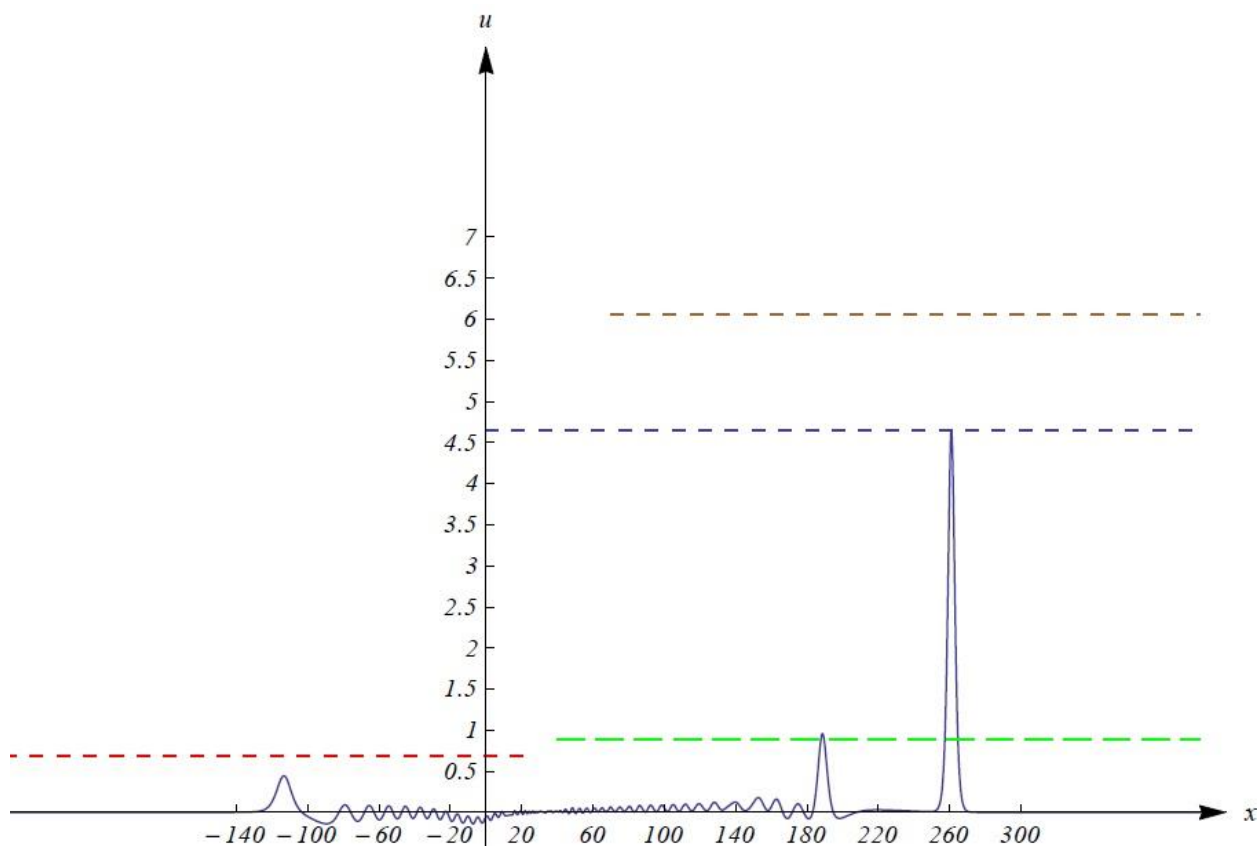


Рис. 3.1.5. Поведение волны деформации при  $t=150$

Из рис. 3.1.5. видно, что в момент времени  $t = 150$  амплитуды основной проходящей и второй проходящей волн имеют свои начальные значения, в то время как амплитуда отраженной волны затухает.

### 3.2 Анализ результатов

Детальное изменение характеристик распространения волны можно узнать ниже (см. табл.3.2.1 и рис.3.2.1).

В табл. 3.2.1. приведены данные значений амплитуд и скоростей в разные моменты времени для трех волн деформации. Значения амплитуд получены при помощи кода в пакете Вольфрам Математика, скорости рассчитывались по формуле (2.3).

Основная волна			Отраженная волна			Вторичная волна		
t	Am	V	t	Am	V	T	Am	V
0	4,65	1,61	20	0,69	1,11	40	0,94	1,14
15,5	5,15	1,68	30	0,58	1,09	50	0,93	1,14
35	6,06	1,78	40	0,54	1,09	60	0,88	1,14
40	6,04	1,78	50	0,51	1,09	70	0,9	1,14
49,4	5,37	1,61	60	0,49	1,09	80	0,84	1,14
60	4,68	1,61	70	0,48	1,09	90	0,79	1,14
70	4,61	1,61	80	0,47	1,08	100	0,73	1,11
80	4,61	1,61	90	0,47	1,08	110	0,88	1,14
130	4,64	1,61	100	0,46	1,08	115	0,94	1,14
175	4,68	1,61	125	0,45	1,08	125	0,94	1,14

Табл.3.2.1. Значения скорости и амплитуды для трех волн деформации при моделировании волны деформации в трубке с наличием неоднородности

На представленном ниже рис.3.2.1. показано, как со временем меняется амплитуда трех волн деформации при рассмотренном случае моделирования неоднородности.

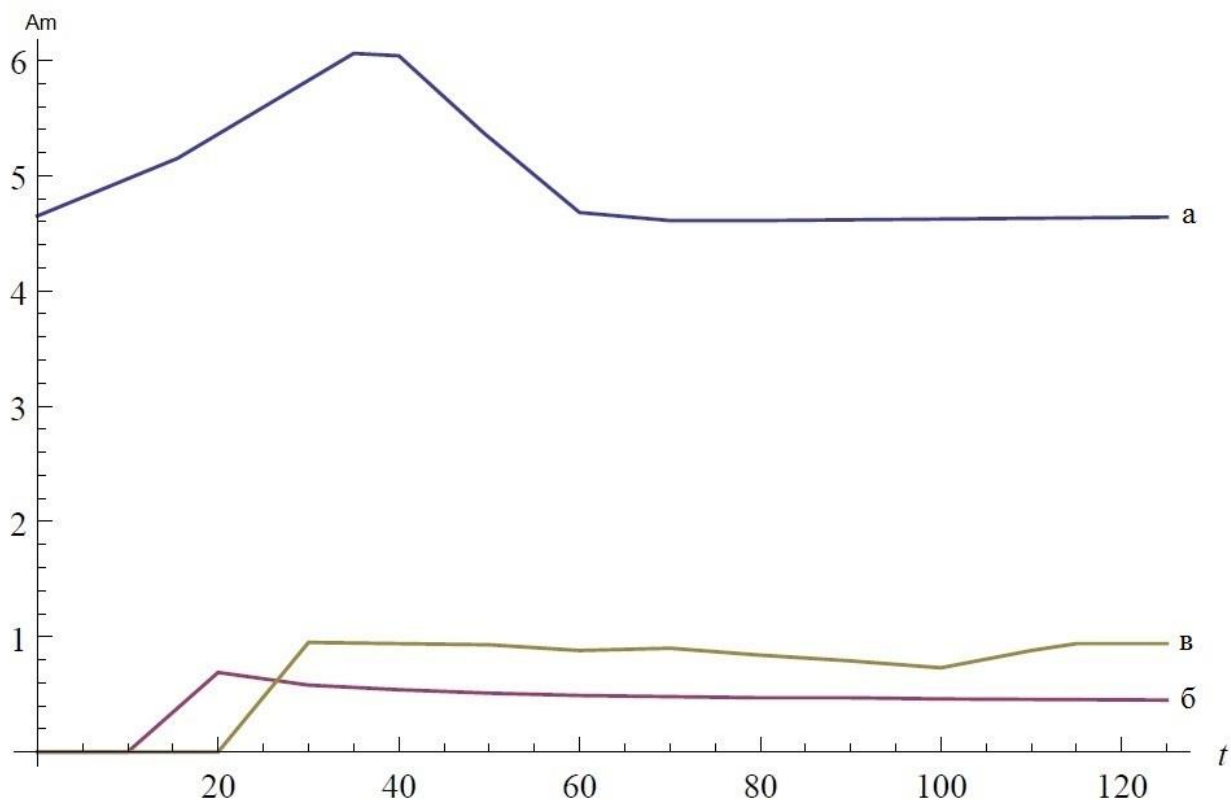


Рис.3.2.1. График зависимости амплитуды от времени при моделировании волны деформации в трубке с наличием неоднородности:

а – для основной волны,

б – для отраженной волны,

в – для вторичной волны.

Выводы: Амплитуда основной волны резко возрастает на подходе к неоднородности, достигает своего максимума внутри нее. После прохождения пораженного участка наблюдается снижение амплитуды до своего минимума, затем рост, до значения практически равного начальному значению амплитуды, с которой волна деформации продолжает распространяться до конца рассмотренного участка. Возрастание скорости наблюдается только при прохождении неоднородности.



Отраженная волна образуется внутри неоднородности и на рассмотренном участке распространяется с затухающей скоростью и амплитудой.

Вторичная волна образуется внутри неоднородности и распространяется с постоянной скоростью. Амплитуда распространения данной волны меняется на всем рассмотренном участке незначительно, на границах участка имеет одинаковые значения и является максимальной.

### **3.3 Сравнение основных элементов численного решения с частным точным решением**

Для сравнения основных элементов численного решения (1.22) с частным точным решением (3.3) с целью постановки задачи акустодиагностики (см. разд. 3.4) проводился сравнительный анализ скоростей.

Рассмотрим на примере данных, представленных в табл.3.2.1.. Скорости для основной волны деформации, полученные в соответствии с частным точным решением, на разных участках сравниваем со скоростями распространения уединенной волны деформации, полученными из графика. Скорости на основе графика определяются по формуле:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (3.3.1)$$

В табл.3.3.1. представлены значения скоростей  $v_1$  и  $v_2$  на различных промежутках распространения волны.  $v_1$  – скорости, полученные на основе частного точного решения,  $v_2$  – скорости, полученные по формуле (3.4.1).

Промежуток времени $\Delta t$	$v_1$	$v_2$
15,5-0	1,68	1,61
49,4-15,5	1,68	2,07
60-49,9	1,61	1,5
70-60	1,61	1,59
80-70	1,61	1,59
130-80	1,61	1,59
175-130	1,61	1,59

Табл. 3.3.1. Значения скоростей из частного точного решения и из графика на различных участках

Погрешность измерения скорости из частного точного решения вычислялась по формуле:

$$\Delta x_i = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}, \quad (3.4.2)$$

Средняя погрешность:

$$\Delta x_{cp} = \frac{\sum \Delta x_i}{n}, \quad (3.4.3)$$

где  $n$  – число измерений.

Средняя погрешность измерения скорости на интервале времени  $t$  от 0 до 175 из частного точного решения  $\Delta x_{cp} = 0,05$ . Это значит, что основные элементы частного точного решения схожи с основными элементами реального поведения волны.

### 3.4 Задача акустодиагностики

По прикладной направленности исследования в физике нелинейных волн можно условно разделить на два направления: «информационное» (использование нелинейных волн для обработки и передачи сигналов, диагностики сред) и «силовое» (транспортировка высоких плотностей

энергии, воздействие на материалы, инициирование различных процессов и реакций).

Нелинейность привносит в оба эти направления принципиально новые возможности. Например, когда для получения информации о среде используются слабые волны, обычно варьируются следующие их характеристики: направление распространения, частота, поляризация. Если же включается в работу нелинейность, то появляется новое измерение в пространстве варьируемых параметров. В данной работе, параметрами характеризующими «силу» волны являются амплитуда и скорость.

Оба указанных направления сейчас интенсивно развиваются в работах по биомедицинской акустике. Очевидно, что в рамках «силового» направления практически все устройства (используемые для терапии и хирургии) работают в нелинейном режиме. Менее очевидным является тот факт, что нелинейные волны широко применяются в диагностике [10].

Акустические методы широко распространены в медицинской диагностике. Как говорилось ранее, существуют специальные датчики, используемые в медицине, которые позволяют измерять скорость пульсовой волны между двумя точками аорты. Измерение скорости распространения пульсовой волны осуществляется путем контроля пульса двумя датчиками, соединенными с формирователями импульсных последовательностей, образования сигналов в виде импульсных последовательностей, синхронной регистрации центрального и периферического пульса, измерения разности фаз импульсных последовательностей и вывода результатов в единицах измерения скорости. Нахождение искомой разности фаз достигается путем жесткого сопряжения корпусов двух рабочих датчиков пульса с помощью датчика расстояния, сигнал с которого в виде опорного используется для вычисления расстояния при определении искомой скорости пульсовой волны.

На основе вышеизложенного и выявленного сходства из раздела 3.3. можно сформулировать задачу акустодиагностики.

Задача акустодиагностики заключается в возможности сравнения скорости пульсовой волны, полученной на практике, со скоростью полученной на основе точного решения и раздела 2. После по изменению поведения проходящей вдоль аорты нелинейной волны деформации можно определить положение неоднородности и масштабы пораженного участка.

## **Заключение**

В ходе работы был проведен анализ уравнений для модели распространения волн аорте из работ [18, 22], после их сведение к модельному уравнению для поперечных волн деформации в виде модифицированного уравнения Буссинеска с переменными коэффициентами. С помощью кода в пакете Вольфрам Математика было проведено численное исследование распространения локализованной волны деформации вдоль аорты. Установлены основные качественные и количественные изменения в поведении волны при прохождении неоднородности: образование вторичной и отраженной локализованных волн. Проведено сравнение основных элементов численного решения с частным точным решением из Раздела 2 с целью постановки задачи акустодиагностики по определению характера неоднородности по изменению поведения проходящей вдоль аорты нелинейной волны деформации. Это позволяет использовать выражения для параметров аналитического решения для определения параметров неоднородности по измеренным значениям амплитуды и скорости волны. Возможно дальнейшее использование модели для других частных случаев неоднородности, в частности, расширения стенок аорты. В перспективе применение модели на практике для диагностики характера и тяжести заболевания (акустодиагностики).

## **Приложение А. Охрана труда**

Основные нагрузки при выполнении данной работы: интеллектуальные, эмоциональные, зрительные, и, в меньшей степени, слуховые. Вся работа проводилась за персональным компьютером и за письменным столом, натурные эксперименты отсутствовали. Организация

работы должна проводиться в этом случае согласно СНИП 2.2.2/2.41340-03.

По природе действия вредные и опасные факторы подразделяются на следующие группы:

- физические факторы: температура, влажность и подвижность воздуха, неионизирующие электромагнитные излучения (ультрафиолетовое, видимое, инфракрасное, лазерное, микроволновое, радиочастотное, низкочастотное), статическое, электрические и магнитные поля, ионизирующие излучения, производственный шум, вибрация (локальная, общая), ультразвук, аэрозоли преимущественно фиброгенного действия (пыли), освещенность (отсутствие естественного освещения, недостаточная освещенность, повышенная ультрафиолетовая радиация);

- химические факторы, в том числе некоторые вещества биологической природы (антибиотики, витамины, гормоны, ферменты);

- биологические факторы: патогенные микроорганизмы, микроорганизмы продуценты, препараты, содержащие живые клетки и споры микроорганизмов, белковые препараты;

- факторы трудового процесса, характеризующие тяжесть физического труда: физическая динамическая нагрузка, масса поднимаемого и перемещаемого груза, стереотипные рабочие движения, статическая нагрузка, рабочая поза, наклоны корпуса, перемещение в пространстве;

- факторы трудового процесса, характеризующие напряженность труда: интеллектуальные, сенсорные, эмоциональные нагрузки, монотонность нагрузок, режим работы,

В помещении лаборатории или кафедры на сотрудника, работающего с вычислительной техникой, могут негативно действовать следующие факторы:

- повышенная и пониженная температура воздуха;
- чрезмерная запыленность и загазованность воздуха;
- повышенная и пониженная влажность воздуха;
- недостаточная освещенность рабочего места;

- превышающий допустимые нормы шум;
- повышенный уровень ионизирующего излучения;
- повышенный уровень электромагнитных полей;
- повышенный уровень статического электричества;
- опасность поражения электрическим током;
- блеклость экрана дисплея;
- длительное пребывание в сидячем положении;
- гиподинамия;
- повышенные интеллектуальные и психоэмоциональные нагрузки;
- ненормированный рабочий день,

### **Требования к вентиляции, отоплению и кондиционированию воздуха**

Микроклимат производственных помещений — это климат внутренней среды этих помещений, который определяется действующими на организм человека сочетаниями температуры, влажности и скорости движения воздуха. Допустимые микроклиматические условия — это такие сочетания параметров микроклимата, которые при длительном и систематическом воздействии на человека могут вызвать напряжение реакций терморегуляции и которые не выходят за пределы физиологических приспособительных возможностей. При этом не возникает нарушений в состоянии здоровья, не наблюдаются дискомфортные теплоощущения, ухудшающие самочувствие и понижение работоспособности. Оптимальные параметры микроклимата в производственных помещениях обеспечиваются системами кондиционирования воздуха, а допустимые параметры — обычными системами вентиляции и отопления. Помещение кафедры является помещением категории 1а. Для создания и автоматического поддержания в лаборатории независимо от наружных условий оптимальных значений температуры, влажности, чистоты и скорости движения воздуха, в холодное время года используется водяное отопление, в теплое время года

применяется кондиционирование воздуха. Кондиционер представляет собой вентиляционную установку, которая с помощью приборов автоматического регулирования поддерживает в помещении заданные параметры воздушной среды. Также одежда персонала должна соответствовать температурному режиму в помещении. Отопление, вентиляция и кондиционирование должны осуществляться согласно СНиП 2,04,05-91:

1. В холодные периоды года температура воздуха, скорость его движения и относительная влажность воздуха должны составлять: 22 - 24°C; 0.1 м/с; 40-60%; температура воздуха может колебаться в пределах от 21 до 25°C.
2. То же в теплые периоды года: 23 — 25°C; 0.1-0.2 м/с; 40-60%; температура воздуха может колебаться в пределах от 22 до 26°C.
3. Воздух, поступающий в помещения с ЭВМ, должен быть отчищен от загрязнений, в том числе от пыли и микроорганизмов. Запыленность воздуха не должна превышать требований 12.1.005-91.

### **Требования к уровням шума**

Шум — беспорядочное сочетание различных по силе и частоте звуков. Эквивалентный (по энергии) уровень звука (дБА) непостоянного шума - уровень звука постоянного широкополосного шума, который имеет такое же среднеквадратичное звуковое давление, что и данный непостоянный шум в течение определенного интервала времени. Предельно допустимый уровень (ПДУ) шума — это уровень фактора, который при ежедневной (кроме выходных дней) работе, но не более 40 часов в неделю в течение всего рабочего стажа, не должен вызывать заболеваний или отклонений в состоянии здоровья, обнаруживаемых современными методами исследований в процессе работы или в отдаленные сроки жизни настоящего и последующих поколений. Соблюдение ПДУ шума не исключает



нарушения здоровья у сверхчувствительных лиц, В нашем помещении источником шумовых помех могут стать вентиляционные установки, кондиционеры и др. Длительное воздействие этих шумов отрицательно сказываются на эмоциональном состоянии персонала. Шум ухудшает условия труда оказывая вредное действие на организм человека. Работающие в условиях длительного шумового воздействия испытывают раздражительность, головные боли, головокружение, снижение памяти, повышенную утомляемость, понижение аппетита, боли в ушах и т. д. Такие нарушения в работе ряда органов и систем организма человека могут вызвать негативные изменения в эмоциональном состоянии человека вплоть до стрессовых. Под воздействием шума снижается концентрация внимания, нарушаются физиологические функции, появляется усталость в связи с повышенными энергетическими затратами и нервно-психическим напряжением, ухудшается речевая коммутация. Все это снижает работоспособность человека и его производительность, качество и безопасность труда. Длительное воздействие интенсивного шума (выше 80 дБА) на слух человека приводит к его частичной или полной потере. Для того, чтобы добиться допустимого уровня шума рекомендуется применять звукопоглощающее покрытие стен. Защиту от шума следует выполнять в соответствии с СН 2.2.4/2.1.8.562-96.

### **Требования к естественному и искусственному освещению для помещений вычислительных комнат**

Освещённость — плотность светового потока по поверхности, на которую он падает. Правильно спроектированное и выполненное производственное освещение улучшает условия зрительной работы, снижает утомляемость, способствует повышению производительности труда, благотворно влияет на производственную среду, оказывая положительное психологическое воздействие на работающего, повышает безопасность труда и снижает травматизм. Недостаточность освещения приводит к напряжению зрения, ослабляет внимание, приводит к

наступлению преждевременной утомленности. Чрезмерно яркое освещение вызывает ослепление, раздражение и резь в глазах. Неправильное направление света на рабочем месте может создавать резкие тени, блики, дезориентировать работающего. Существует три вида освещения: естественное, искусственное и совмещенное (естественное и искусственное вместе). Естественное освещение — освещение помещений дневным светом, проникающим через световые проемы в наружных ограждающих конструкциях помещений. Естественное освещение характеризуется тем, что меняется в широких пределах в зависимости от времени дня, времени года, характера области и ряда других факторов. Искусственное освещение применяется при работе в темное время суток и днем, когда не удастся обеспечить нормированные значения коэффициента естественного освещения (пасмурная погода, короткий световой день). Освещение, при котором недостаточное по нормам естественное освещение дополняется искусственным, называется совмещенным освещением. Искусственное освещение подразделяется на рабочее, аварийное, эвакуационное, охранное. Рабочее освещение, в свою очередь, может быть общим или комбинированным, Общее — освещение, при котором светильники размещаются в верхней зоне помещения равномерно или применительно к расположению оборудования. Комбинированное — освещение, при котором к общему добавляется местное освещение, Работа, выполняемая с использованием вычислительной техники, имеют следующие недостатки: вероятность появления прямой блескости, ухудшенная контрастность между изображением и фоном, отражение экрана. Недостаточность освещения приводит к напряжению зрения, ослабляет внимание, приводит к наступлению преждевременной утомленности. Чрезмерно яркое освещение вызывает ослепление, раздражение и резь в глазах. Неправильное направление света на рабочем месте может создавать резкие тени, блики, дезориентировать работающего. Согласно СНиП 23-05-95

освещение в помещениях, где располагается вычислительная техника, должно быть смешанным: естественным и искусственным. При выполнении зрительной работы категории средней точности к. е. о. должен быть не ниже 4 %. Искусственное освещение в помещениях следует осуществлять в виде комбинированной системы освещения с использованием люминесцентных источников света в светильниках общего назначения. В качестве источников должны использоваться люминесцентные лампы типа ЛБ и ДРЛ с индексом цветопередачи ( $R > 70$ ), в качестве светильников должны использоваться установки с преимущественно отраженным или рассеянным светораспределением (тип УСП-5-2x40, УСП-35-2x40, ЛВ003-2x40-002). Величина освещенности при искусственном освещении люминесцентными лампами должна быть в горизонтальной плоскости не ниже 300лк — для системы общего освещения и не ниже 750лк — для системы комбинированного освещения, причем с учетом работы категории высокой зрительной точности может быть увеличена до 1000лк. Для исключения бликов отражения на экранах от светильников общего назначения необходимо применять антибликерные сетки, специальные фильтры для экранов, защитные козырьки и т.п.

### **Пожарная безопасность при работе с вычислительной техникой**

Пожарная безопасность — это состояние защищенности личности, имущества, общества и государства от пожаров. Пожар — это неконтролируемое горение, причиняющее материальный ущерб, вред жизни и здоровью граждан, интересам общества и государства. Определение категорий помещений осуществляется на стадии проектирования путем последовательной проверки принадлежности к категориям, установленным нормативными документами (НПБ 105-95), Причинами взрывов и пожаров часто являются электрооборудование и электрические сети. Опасность загорания в ЭВМ связана со значительным

количеством плотно расположенных на монтажных платах и блоках: электронных узлов и схем, электрических и коммутационных кабелей, резисторов, конденсаторов, полупроводниковых диодов и транзисторов. Высокая плотность элементов в электронных схемах приводит к значительному повышению температуры отдельных узлов (80 — 200°C), что может служить причиной воспламенения изоляционных материалов, В связи с этим в помещениях вычислительного центра должны быть предусмотрены возможные пути эвакуации персонала. Требования к количеству, размерам и размещению эвакуационных выходов, лестниц и лестничных клеток установлены СНиП 2.01.02-85, а именно:

1. Эвакуационные выходы должны располагаться рассредоточено. Минимальное расстояние  $l$  между наиболее удаленными один от другого эвакуационными выходами из помещения следует определять по формуле:

$l = \sqrt{\Pi}$ , где  $\Pi$  — периметр помещения,

4. Ширина путей эвакуации в свету должна быть не менее 1м, дверей- не менее 0.8м.

5. Высота прохода на путях эвакуации должна быть не менее 2м.

6. Не допускается устройство винтовых лестниц, забежных ступеней, раздвижных и подъемных дверей и ворот, а также вращающихся дверей и турникетов.

7. Двери на путях эвакуации должны открываться по направлению выхода из здания.

8. Наружные эвакуационные двери зданий не должны иметь запоров, которые не могут быть открыты изнутри без ключа.

## **Требования электробезопасности**

Для питания ЭВМ служит трехфазная электросеть с напряжением 380/220В и частотой 50Гц. Помещение, в котором располагался вычислительный центр, относится к помещениям без повышенной опасности (ГОСТ 12.1.013), поэтому защитное заземление не применялось (ГОСТ 12.1.030). При этом обслуживающий персонал должен допускаться до работы только после инструкции по технике безопасности. Изолирующие корпуса терминалов обеспечивают недоступность токоведущих частей, находящихся под напряжением.

## **Эргономические требования**

Настоящий стандарт ГОСТ Р ИСО 9241-5-2009 устанавливает руководящие принципы, применяемые при формировании требований пользователей, а также при разработке проекта и установке оборудования рабочих станций, предназначенных для проведения офисных работ с применением видеодисплейных терминалов. Общие принципы и требования, установленные в настоящем стандарте, следует учитывать при разработке стандартов, устанавливающих требования к конструкции офисной мебели и оборудования рабочего места оператора. Под рабочим местом понимается зона, оснащенная необходимыми техническими средствами, в которой совершается трудовая деятельность исполнителя или группы исполнителей, совместно выполняющих одну работу или операцию. Конструкция рабочего места должна обеспечивать быстроту, безопасность, простоту и экономичность технического обслуживания в нормальных и аварийных условиях; полностью отвечать функциональным требованиям и предполагаемым условиям эксплуатации. Конструкция рабочего стола должна обеспечивать оптимальное размещение на рабочей поверхности используемого оборудования с учетом его количества и конструктивных особенностей, характера выполняемой работы. Высота рабочей поверхности

стола для взрослых пользователей должна регулироваться в пределах 680-800 мм; при отсутствии такой возможности высота рабочей поверхности стола должна составлять 725 мм. Конструкция рабочего стула (кресла) должна обеспечивать поддержание рациональной рабочей позы, позволять изменять позу с целью снижения статического напряжения мышц шейно-плечевой области и спины для предупреждения развития утомления. Тип рабочего стула (кресла) должен выбираться в зависимости от характера и продолжительности работы с учетом роста пользователя. Поверхность сиденья, спинки и других элементов стула (кресла) должна быть полумягкой, с нескользящим, неэлектризующимся и воздухопроницаемым покрытием, обеспечивающим легкую очистку от загрязнений. Клавиатуру следует располагать на поверхности стола на расстоянии 100-300 мм от края, обращенного к пользователю, или на специальной, регулируемой по высоте рабочей поверхности, отделенной от основной столешницы,

### **Напряженность трудового процесса**

Тяжесть трудового процесса в ходе работы над диссертацией можно отнести к оптимальному классу условий труда (легкая физическая нагрузка), основная нагрузка интеллектуальная, присутствует возможность гибкого графика работы, изменения рабочей позы. Классифицировать по степени напряженности выполняемую работу можно следующим образом: интеллектуальные нагрузки предполагают решение сложных задач с выбором по известным алгоритмам (напряженный труд 1-ой степени); а также эвристическую, творческую деятельность, требующую решения сложных задач при отсутствии алгоритма (напряженный труд 2-ой степени); большую часть времени работа проходит установленному графику с возможной его коррекцией по ходу деятельности (напряженный труд 1-ой степени); часто присутствует работа в условиях дефицита времени (напряженный труд 2-ой степени); сенсорные нагрузки (работа за экраном компьютера) присутствуют более четырех часов за рабочий день

(напряженный труд 2-ой степени); фактическая продолжительность рабочего дня 8-9 часов (напряженность труда средней степени).

## Список литературы

1. Биофизика: Учебник для вузов / ред. В.Ф. Антонов. – М.: ВЛАДОС, 2000. – 288 с.
2. Бегун П. И. Моделирование в биомеханике: Учеб. Пособие / П. И. Бегун, П. Н. Афонин. – М.: Высш. шк., 2004. – 390 с.
3. Бранков Г. Основы биомеханики: Пер. с болг. Джупанова В. / Ред. И. В. Кнетс. М.: Мир, 1981. – 254 с.
4. О. В. Вишневецкий. Анализ нелинейных волновых процессов при помощи преобразования Вигнера / О. В. Вишневецкий, О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор // Радиофизика и радиоастрономия. – 2007. - т. 12. - №3. - с. 295 - 310.
5. А. Н. Волобуев. Течение жидкости в трубках с эластичными стенками // УФН. – 1995. - Т. 165. - №2. - С. 177 – 186.
6. Механика кровообращения / Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. - М.: Мир, 1981 – 623 с.
7. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. - Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2010. - 368 с.
8. Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации. М.: Наука. 2009. - 208 с.
9. А.Н.Рогоза, Т.В.Балахонова, Н.М.Чихладзе, О.А.Погорелова, Н.М.Моисеева, О.А.Сивакова. Современные методы оценки состояния сосудов у больных артериальной гипертонией. -М.: Издательский дом «Атмосфера», 2008.
10. О. В. Руденко. Нелинейные волны: некоторые биомедицинские приложения // УФН. 2007.- Т. 177, № 4. – С. 374 – 383.
11. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. - 622с.
12. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. - М.: Мир, 1988 - 694 с.



13. Advanced numerical differential equation solving in Mathematica. Wolfram Research, Inc. 2008. 367 p.
14. Alun D. Hughes, Kim H. Parker, Justin E. Davies. Waves in arteries: A review of wave intensity analysis in the systemic and coronary circulations // Artery Research 2. 2008. 51-59.
15. Differential equation solving with DSolve. Wolfram Research, Inc. 2008. 118 p.
16. G. A. Holzapfel, T. C. Gasser, R. W. Ogden, A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models // Journal of Elasticity 61. 2000. 1-48.
17. A. W. Khir, K. H. Parker. Wave intensity in the aorta: effects of arterial occlusion // J. Biomech 38. 2005. 647-655.
18. R. A. Kraenkel, S. Noubissie, P. Wofo. A mathematical model for wave propagation in elastic tubes with inhomogeneities: Application to blood waves propagation // Physica D 236. 2007. 131-140.
19. A. W. Khir, A. Zambanini, K. H. Parker. Local and regional wave speed in the aorta: effects of arterial occlusion // Medical Engineering and Physics 26. 2004. 23-29.
20. J. C. Mirsa, M. K. Patra. A study of solitary waves in a tapered aorta by using the theory of solitons // Computers and Mathematics with Application 54. 2007. 242-254.
21. Mathematics and Algorithms. Wolfram Research, Inc. 2007. 462 p.
22. S. Yomosa. Solitary Waves in Large Blood Vessels // J. Phys. Soc. Japan 56. 1987. 506-520.
23. Аневризма аорты [Электронный ресурс] // Компания «Экстен Медикал». – Электрон. дан. – Спб., 2007. – URL: [http://www.infarkt.ru/anevrizma\\_aorty](http://www.infarkt.ru/anevrizma_aorty) (дата обращения: 25.03.2015)
24. Википедия – свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. - <http://wikipedia.org> . - (дата обращения: 14.11.2013)