

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ,  
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН  
\_\_\_\_\_А.М. Кривцов  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

## ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Магистерская диссертация

### ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В СРЕДЕ КЕЛЬВИНА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

по направлению подготовки

01.04.03 — Механика и математическое моделирование

направленность 01.04.03\_02 — Mechanics and Mathematical Modeling

(международная)

Выполнил

студент гр. 5040103/00201 \_\_\_\_\_ М.А. Дрепин

Руководитель

доцент  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Е.Ф. Грекова

Санкт-Петербург

2022

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М.Кривцов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

**ЗАДАНИЕ**

**по выполнению выпускной квалификационной работы**

студенту Дрепину Михаилу Александровичу, группа 5040103/00201  
фамилия, имя, отчество (при наличии), номер группы

1. Тема работы: Влияние предварительно напряжённого состояния в среде Кельвина на распространение волн
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 01.06.2022
3. Исходные данные по работе: Статьи о полных и редуцированных средах Коссера и Кельвина
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): построение определяющих уравнений для редуцированной среды Кельвина, получение дисперсионных соотношений для волн, сравнение со случаем без всестороннего расширения, анализ дисперсионных соотношений на влияние нелинейной деформации.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): Графики дисперсионных кривых для продольной и волны сдвига в случаях, когда волна распространяется вдоль оси симметрии и ортогонально оси симметрии, графики зависимостей размеров запрещённой зоны от напряжённого состояния.
6. Консультанты по работе: \_\_\_\_\_
7. Дата выдачи задания 13.05.2022

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ Е. Ф. Грекова  
(подпись) инициалы, фамилия

Задание принял к исполнению \_\_\_\_\_ 13.05.2022  
(дата)

Студент \_\_\_\_\_ М.А. Дрепин  
(подпись) инициалы, фамилия

## РЕФЕРАТ

На 49 с., 13 рисунков, 2 приложения.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: РЕДУЦИРОВАННАЯ СРЕДА КЕЛЬВИНА, ПРЕДНАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ, АКУСТИЧЕСКИЕ МЕТАМАТЕРИАЛЫ

Тема выпускной квалификационной работы: «Влияние предварительно напряжённого состояния в среде Кельвина на распространение волн».

Работа посвящена исследованию влияния предварительно напряжённого состояния на распространение волн в линейной редуцированной среде Кельвина, анализу устойчивости. В ходе исследования были

- проведены построения определяющих соотношений для редуцированной среды Кельвина в преднапряжённом состоянии;
- построены и проанализированы дисперсионные соотношения для частных случаев распространения волн вблизи предварительно деформированного состояния для редуцированной среды Кельвина; представлены примеры новых механизмов неустойчивости.

Получено, что всестороннее однородное растяжение-сжатие приводит к возникновению новых типов неустойчивости. Показано влияние на устойчивость продольных волн упругой константы  $\alpha$ , создающей нивелирующей эффект относительно неустойчивости при сжатии. Также материал меняет характер поведения относительно волн сдвига при растяжении, для которого особой точкой становится растяжение в два раза. При таком растяжении эффективная константа  $\alpha_{eff} = 0$  и дисперсионная кривая  $\omega(k)$  становится прямой линией.

## ABSTRACT

49 pages, 13 figures, 2 appendices.

KEY WORDS: REDUCED KELVIN'S MEDIUM, PRESTRESSED STATE, ACOUSTIC METAMATERIALS

Research topic: "Influence of spherical stress state on the wave properties for reduced Kelvin's medium".

We consider the influence of spherical stress state on the wave propagation in the reduced Kelvin's medium, stability analysis. In this work

- we have obtained constitutive relations for the reduced Kelvin's medium in prestressed state;
- we have obtained and analysed dispersion relations for special cases of wave propagation for reduced Kelvin's medium in vicinity of prestressed state; we have shown new ways of loss of stability.

We obtained that spherical stress state leads to generating new types of instability. Have shown the influence on the stability of longitudinal waves of the elastic constant  $\alpha$ , creating a leveling effect with respect to instability under compression. Also, the material changes its behavior with respect to shear waves in tension. The special point is the stretching twice. Under such stretching, the effective constant  $\alpha_{eff} = 0$  and dispersion curve  $\omega(k)$  becomes a straight line.

# Содержание

Введение	6
Глава 1. Основные обозначения и базовые соотношения	9
Глава 2. Динамические уравнения для изотропной упругой редуцированной среды Кельвина	12
2.1 Динамические законы нелинейной редуцированной среды Кельвина	13
2.2 Определяющие соотношения для нелинейной редуцированной среды Кельвина	14
2.3 Простейшая нелинейная редуцированная среда Кельвина. Энергия деформации.	17
2.4 Среда вблизи однородного нелинейного сферически деформированного состояния	18
Глава 3. Дисперсионные соотношения для линейной изотропной упругой редуцированной среды Кельвина. Волны и устойчивость.	22
3.1 Гармонические волны	22
3.2 Распространение гармонических волн вдоль спина ( $\hat{\mathbf{k}} = \pm \mathbf{m}_0$ )	23
3.2.1 Продольные волны ( $\mathbf{u} \parallel \mathbf{m}_0, \mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{k}}$ ).	25
3.2.2 Поляризованная волна сдвига-вращения ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{m}_0 = 0$ ).	26

3.3	Распространение гармонических волн ортогонально спину ( $\hat{\mathbf{k}} \perp \mathbf{m}_0$ )	26
3.3.1	Продольные волны ( $\mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{m}_0 = 0$ ). . . . .	29
3.3.2	Поперечные волны сдвига ( $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ ). . . . .	29
<b>Глава 4. Исследование дисперсионных соотношений, влияние нелинейной деформации на динамические процессы</b>		<b>32</b>
4.1	Продольные волны, распространяющиеся вдоль спина ( $\mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} = \pm \mathbf{m}_0$ ). . . . .	32
4.2	Поляризованные волны сдвига-вращения, распространяющиеся вдоль спина ( $\mathbf{u} \perp \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} = \pm \mathbf{m}_0$ ). . . . .	35
4.3	Продольные волны, распространяющиеся ортогонально спину ( $\mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} \perp \mathbf{m}_0$ ). . . . .	38
4.4	Поперечные волны, распространяющиеся ортогонально спину ( $\mathbf{u} \perp \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} \perp \mathbf{m}_0$ ). . . . .	39
<b>Заключение</b>		<b>41</b>
<b>Список использованной литературы</b>		<b>43</b>
<b>Приложения</b>		<b>46</b>
А	Приложение. Код библиотек и функций на Python . . . . .	46
Б	Приложение. Код примеров отрисовки графиков на Python . . . . .	47

# Введение

В рамках классической механики Ньютона принято рассматривать среды, как набор материальных точек, обладающих трансляционными степенями свободы, то есть – в трёхмерном пространстве каждая материальная точка характеризуется тремя координатами, определяющими её положение. Этот подход, несмотря на его фундаментальность и удобство в построении уравнений, имеет серьёзные ограничения и является недостаточно полным для описания поведения более сложных континуальных сред. Это вынуждает строить и использовать модели с дополнительными степенями свободы, характеризующими повороты тел-точек. Уже в начале двадцатого столетия П. Дюгемом и Ф. Коссера [6] предлагались подобные модели, однако, с ограничениями, не допускающими свободное вращение. Идея описания среды, состоящей из гиристов, сопротивляющихся угловым деформациям, принадлежит лорду Кельвину, но математический аппарат того времени не позволял полноценно формализовать законы такой среды.

Сегодня мы называем континуумом Коссера любую среду с вращательными степенями свободы [5] а средой Кельвина — среду с вращательными степенями свободы с неограниченным вращением частиц вокруг собственных осей. Этот термин был введен П.А. Жилиным и закрепился в словаре современной механики [17].

Построение уравнений для континуума Коссера, состоящего из точек с поворотными степенями свободы, требует разработки теории, согласующейся с законами классических линейных и нелинейных сред. В то же время стремление учитывать сложное поведение среды и описывать его математически,

позволяет находить неожиданные свойства сред, такие как запрещённые зоны для длин и частот волн, новые способы потери устойчивости, способы управления свойствами материала посредством нагружения или добавления внешнего магнитного момента и др.

Важнейший вклад в рассмотрение сложного континуума был внесён Жилиным П.А. [9, 2, 3], Грековой Е.Ф. [11, 12, 8], Ивановой Е.А. [4, 15], а для магнитоупругих сред – G. A. Maugin [18].

В настоящее время теория сред со сложной структурой всё активнее используются для описания сыпучих сред (когезивных, с включениями) [7, 19], магнитоупругих сред [18], наноматериалов [15] и многих других. Для таких сред важны: учёт напряжений, обусловленных ротационными деформациями; изменение волновых и упругих свойств в зависимости от напряжённо-деформированного состояния среды, а также ориентации тел-точек; наличие аномалий и неклассических вариантов потери устойчивости.

В данной работе мы рассматриваем влияние напряжённого состояния на поведение редуцированной среды Кельвина, являющейся акустическим метаматериалом. Механика акустических метаматериалов занимается рассмотрением класса материалов, которые благодаря внутренней структуре проявляют уникальные физико-механические свойства, в частности существование полосы непропускания и/или падающих участков дисперсионной кривой. Динамика поведения среды исследовалась в [13], а также [10].

В контексте применимости исследований, посвящённых среде Кельвина, в области реальных материалов наилучшим образом продемонстрирует аналогию с ферромагнетиками следующая таблица:

Поскольку рассматриваемая среда является редуцированной, а тела-точки имеют выделенную ось вращения, то вид энергии и определяющие уравнения вблизи преднапряжённого состояния для такой среды будут отличаться от



Таблица 1: Аналогия среды Кельвина с Ферромагнетиками.

Среда Кельвина	Ферромагнетики
$\mathbf{u}$ – вектор трансляционных перемещений	
$\tau$ – тензор напряжений	
$\mathbf{m}$ – единичный вектор...	
оси тела-точки	магнитного момента $\mathbf{S}$
$\rho I \dot{\varphi} \mathbf{m}$ , где $\dot{\varphi}$ – угловая скорость собственного вращения тела точки, $I$ – плотность осевого момента инерции	$\rho \mathbf{S} / \gamma = M \mathbf{m} / \gamma$ , где $M = \rho  \mathbf{S} $ – намагниченность, $ \mathbf{S}  = const$ для состояния магнитного насыщения, $\gamma$ – гиромагнитное отношение
$\tau^A$ связан с моментами, совершающими работу на мерах поворотных деформаций тел точек относительно окружающего континуума	$\tau^A$ связан со спин-решётчным взаимодействием
$\boldsymbol{\mu}$ $\boldsymbol{\mu}$ – тензор моментных напряжений	$-\mathbf{B} \times \mathbf{S}$ $\mathbf{B}$ – тензор обменных взаимодействий
$\mathbf{L}$ $\mathbf{L}$ – объёмная плотность внешнего момента	$\mathbf{B}^e \times \mathbf{S}$ $\mathbf{B}^e$ – внешняя магнитная индукция

рассматриваемых ранее. Особый интерес в данном контексте вызывает влияние на поведение среды контролируемого воздействия (в работе в качестве такого воздействия приведено всестороннее расширение/сжатие) и изменение типа материала при прохождении через особые положения. Исследованию этого вопроса и посвящена данная работа.

# Глава 1

## Основные обозначения и базовые соотношения

Для задания положения центра масс тела-точки мы будем использовать радиус-вектор  $\mathbf{R}$ . В начальном положении этот вектор равен  $\mathbf{r}$ . В качестве координат будем использовать лагранжевы координаты. Тогда можно ввести частные производные по лагранжевым координатам:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{r}, \quad \mathbf{R}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^i} \equiv \partial_i \mathbf{R}, \quad (1.1)$$

задающие базисы в отсчётной и актуальной конфигурациях. Отсюда набла оператор (градиент) в отсчётной и актуальной конфигурациях:

$$\overset{\circ}{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{r}^i \partial_i, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{R}^i \partial_i, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{r}^i, \mathbf{R}^i$  задают взаимные базисы для  $\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_i$  (совпадающие в случае ортогональности и нормированности изначальных). Здесь и далее в случаях повторения индекса (и отсутствии его в левой части равенств) для компактности записи используется правило суммирования Эйнштейна.

Зададим ось тела-точки  $\mathbf{m}_0$  и ортогональный ей вектор  $\mathbf{l}_0$ , тогда, применяя углы Эйлера, можно задать тензор поворота:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_3(\psi \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{P}_2(\theta \mathbf{l}_0) \cdot \mathbf{P}_1(\varphi \mathbf{m}_0) \quad (1.3)$$

где  $\psi, \theta, \varphi$  – угол прецессии, нутации и собственного вращения, соответствен-

но. Тензоры  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$  – задаются по формуле для тензора поворота:

$$\mathbf{P}(\varphi \mathbf{m}_0) = (1 - \cos\varphi) \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 + \cos\varphi \mathbf{E} + \sin\varphi \mathbf{m}_0 \times \mathbf{E}, \quad (1.4)$$

здесь и далее  $\mathbf{E}$  - единичный тензор в трёхмерной системе координат (тензор второго ранга).

С другой стороны, тензор поворота можно задать как:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_\perp \cdot \mathbf{P}(\varphi \mathbf{m}_0), \quad (1.5)$$

где:

$$\mathbf{P}_\perp = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

где  $\boldsymbol{\theta}$  – плоский вектор поворота тела-точки.

Для угловой скорости в линейном приближении будет справедливо

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\varphi} \mathbf{m} \quad (1.7)$$

Таким образом, положение тела точки задаётся тензором поворота  $\mathbf{P}$  и радиус-вектором  $\mathbf{R}$ .

Для описания деформаций среды введём меры деформации  $\mathbf{A}, \mathbf{K}$ :

$$\mathbf{A} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{r}^i \otimes \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{P}, \quad (1.8)$$

где  $\boldsymbol{\Phi}$  - решение уравнения, аналогичного уравнению Пуассона, но для пространственного изменения координат:

$$\partial_i \mathbf{P} = \boldsymbol{\Phi}_i \times \mathbf{P}, \quad (1.9)$$

Обозначим  $\boldsymbol{\tau}$  тензор силовых напряжений Коши, а  $\mathbf{T} = \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\tau} \det \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{R}$  – первый тензор напряжений Пиолы—Кирхгофа. Заметим, что тензор напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  вообще говоря не будет симметричным. Аналогично тензору силовых напряжений (далее будем называть его тензором напряжений) вводится тензор моментных напряжений  $\boldsymbol{\mu}$ . Однако, в данной работе редуцированность среды приводит к тождественному равенству 0 этого тензора.

Наши частицы осесимметричны. Момент инерции  $I$  - это момент относительно оси симметрии. Мы рассматриваем быстро вращающиеся частицы с малыми моментами инерции, так что проекция кинетического момента на ось симметрии конечна.

Динамический спин в данной работе – это кинетический момент, главный вклад в него вносит вращение вокруг своей оси. Будем называть его "собственным динамическим спином" или просто "спином".

## Глава 2

# Динамические уравнения для изотропной упругой редуцированной среды Кельвина

Акустические метаматериалы - это среды с аномальными волновыми свойствами. Единожды отрицательные акустические метаматериалы обладают запрещёнными зонами, а дважды отрицательные акустические метаматериалы имеют убывающую часть дисперсионной кривой  $\omega(k)$ . Они используются для контроля прохождения волн.

Если упругая энергия линейного континуума с обычным инерционным членом зависит от специальных обобщённых векторных координат, но не зависит от их градиента, мы будем называть такой континуум редуцированным. При определённых условиях симметрии такая среда будет акустическим метаматериалом [11].

Так редуцированная простейшая среда Кельвина - это единожды отрицательный метаматериал по отношению к волнам сдвига-вращения, которые поляризованы относительно спина (есть запрещённая зона).

Нелинейное напряжённое состояние в редуцированной и полной среде Коссера меняет эффективные упругие константы [14] и оказывает влияние на распространение волн и устойчивость [12], создавая новые механизмы потери устойчивости материала.

Определяющие соотношения среды Кельвина, являющейся частным случаем среды Коссера, будут иметь особый вид и динамическое слагаемое в них будет отличаться из-за гироскопических эффектов.

В данной главе мы ответим на вопрос «Как нелинейное равномерное расширение влияет на эффективные свойства материала и какую форму имеют динамические уравнения среды вблизи такого деформированного состояния?».

## 2.1 Динамические законы нелинейной редуцированной среды Кельвина

В работе рассматривается **редуцированная** среда: энергия деформации  $U$  не зависит от  $\nabla \mathbf{P}$  (работа не совершается на  $\nabla \boldsymbol{\omega}$ ). Математически это выражается следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial \nabla \theta} = 0 \Leftrightarrow \mu = 0 \quad (2.1)$$

А визуально это ограничение демонстрируется на рис. 2.1

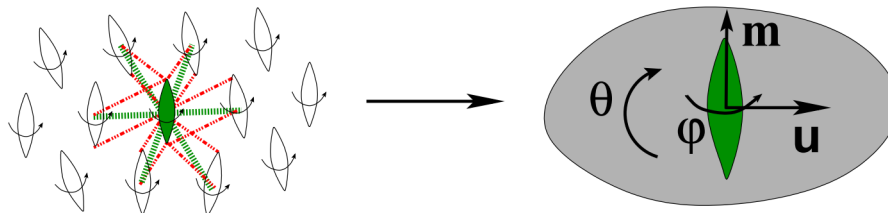


Рис. 2.1: Редуцированная среда Кельвина

Таким образом тензор моментных напряжений в любом состоянии среды будет нулевым.

В связи с редуцированием динамические соотношения для обобщённой среды Кельвина [9] упрощаются. С учётом отсутствия массовой плотности внешних сил, запишем баланс сил в локальной форме (получаем из Первого

закона динамики Эйлера):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad (2.2)$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{T} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \quad (2.3)$$

С учётом отсутствия внешних моментов и эквивалентности нулю тензора моментных напряжений запишем баланс моментов в локальной форме (получаем из Второго закона динамики Эйлера):

$$\boldsymbol{\tau}_x = \boldsymbol{\omega} \times \rho I \dot{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{m}. \quad (2.4)$$

$$[\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{T}]_x = \boldsymbol{\omega} \times \rho_0 I \dot{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{m}. \quad (2.5)$$

## 2.2 Определяющие соотношения для нелинейной редуцированной среды Кельвина

Вывод определяющих соотношений выполним аналогично [9], а также [16], [12] – на основе баланса энергии, записанного для среды Коссера:

$$\rho \dot{U} = \boldsymbol{\tau}_*^\top \cdot \cdot \dot{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\mu}_*^\top \cdot \cdot \dot{\mathbf{K}}, \quad (2.6)$$

где  $\boldsymbol{\tau}_*$  и  $\boldsymbol{\mu}_*$  – энергетический тензор напряжений и энергетический тензор моментных напряжений соответственно. Они, как и введённые братьями Коссера тензора деформации  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{K}$ , не меняются при жёстком повороте среды, что позволяет говорить о корректном способе задания упругой энергии. Через реальные тензора  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\mu}$  они выражаются следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau}_* = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^{-\top} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}. \quad (2.7)$$

$$\mu_* = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^{-\top} \cdot \mu \cdot \mathbf{P}. \quad (2.8)$$

Поскольку мы рассматриваем редуцированную среду Кельвина, то реакции, производящие мощность на градиенте поворота, отсутствуют и тензор моментных напряжений равен 0 и из правой части баланса энергии исчезает второе слагаемое. В то же время очевидно, что:

$$\boldsymbol{\tau}_* = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}}, \quad (2.9)$$

И соответственно для  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{T}$  можно записать:

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^{\top} \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^{\top}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^{\top}. \quad (2.11)$$

Упругая энергия среды Кельвина не должна зависеть от  $\varphi$ . Чтобы учесть все независимые деформации, можно взять энергию в форме  $U = U(\mathbf{G}, \mathbf{F}, \tilde{\gamma})$  (согласно [3]), где тензора деформации выражаются следующим образом:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{\top} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\top} - \mathbf{E})/2, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{A}^{\top} (\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0) \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_0. \quad (2.14)$$

В то же время редуцированность среды означает отсутствие зависимости энергии от  $\nabla \mathbf{P}$ , а значит и от  $\mathbf{K}$ . Поэтому мы будем использовать энергию в форме  $U = U(\mathbf{G}, \tilde{\gamma})$ . Где более удобный для вычислений вектор тензор  $\tilde{\gamma}$  записывается как линейная комбинация тензоров  $\mathbf{G}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  и собственного вектора  $\mathbf{m}_0$ :



$$\tilde{\gamma} = \gamma - \mathbf{m}_0 - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_0 - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}_0. \quad (2.15)$$

Заметим, что линеаризация вблизи натурального недеформированного состояния для таких мер деформации даёт:

$$\mathbf{G} \approx (\nabla \mathbf{u})^S, \quad \tilde{\gamma} \approx (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \times \mathbf{m}_0, \quad (2.16)$$

что соответствует малым деформациям в линейной теории.

Это не единственный способ задания системы мер деформации, но мы остановимся на этом варианте.

Чтобы получить определяющие соотношения для тензоров напряжений в форме зависимости от выбранных мер, запишем дифференциал энергии двумя способами:

$$\begin{cases} dU(\mathbf{A}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}} \cdot \cdot d\mathbf{A}^\top \\ dU(\mathbf{G}, \tilde{\gamma}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} \cdot \cdot d\mathbf{G}^\top + \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \cdot d\tilde{\gamma} \end{cases} \quad (2.17)$$

В силу симметрии  $\mathbf{G}$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} = \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} \right)^\top, \quad (2.18)$$

а с учётом  $d\mathbf{G} = d\mathbf{G}^\top = \frac{1}{2}(d\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top + \mathbf{A} \cdot d\mathbf{A}^\top)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} \cdot \cdot d\mathbf{G}^\top = \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{A} \right) \cdot \cdot d\mathbf{A}^\top, \quad (2.19)$$

При этом, если рассмотреть  $d\tilde{\gamma}$ :

$$d\tilde{\gamma} = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_0 - d\mathbf{G} \cdot \mathbf{m}_0, \quad (2.20)$$

то опять же в силу симметрии  $d\mathbf{G}$  и с учётом свойств свёртки мы получим:

$$\frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \cdot d\tilde{\gamma} = \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m}_0 \cdot d\mathbf{A}^\top - \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m}_0 \cdot d\mathbf{G}^\top = \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m}_0 \cdot d\mathbf{A}^\top - \left( \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m}_0 \right)^S \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{A}^\top \quad (2.21)$$

Приравнивая первое уравнение системы ко второму, мы получим формулу для производной от энергии, фигурирующей в определяющих соотношениях:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{A} - \left( \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m}_0 \right)^S \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m}_0, \quad (2.22)$$

Таким образом, с учётом последней формулы, а также  $\mathbf{A} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$  и математической записи для изменения направления собственных осей вращения  $\mathbf{m} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{P}^\top$  определяющие соотношения для нелинейной редуцированной среды Кельвина можно записать в следующей форме:

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot \left( \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} - \left( \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m}_0 \right)^S \right) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} + \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m} \right), \quad (2.23)$$

$$\mathbf{T} = \rho_0 \left( \left( \frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} - \left( \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m}_0 \right)^S \right) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} + \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m} \right). \quad (2.24)$$

### 2.3 Простейшая нелинейная редуцированная среда Кельвина. Энергия деформации.

Мы будем рассматривать физически линейную, но геометрически нелинейную среду. Энергию деформации  $U$  зададим как квадратичную форму нелинейных тензоров деформации  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^\top, \tilde{\gamma}$ :

$$\rho_0 U = \frac{1}{2} \mathbf{G} \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{G} + 2\alpha \tilde{\gamma}^2 \quad (2.25)$$

Мы рассматриваем **простейший случай** среды Кельвина, то есть анизотропия среды обуславливается фактом, что повороты вокруг оси  $\mathbf{m}$  не создают напряжений или гироскопических сил. В таком случае перевязка между тензором  $\mathbf{G}$  и  $\tilde{\gamma}$  нулевая, тензор упругости  ${}^4\mathbf{C}$  изотропен и имеет вид:

$${}^4\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu(\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n)^S (\mathbf{e}^m \mathbf{e}^n)^S \quad (2.26)$$

Подстановка энергии, выраженной через константы  $\lambda, \mu, \alpha$ , в определяющие соотношения позволяет связать напряжения с деформациями в материале:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho}{\rho_0} \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot ((\lambda \text{tr } \mathbf{G}\mathbf{E} + 2\mu \mathbf{G} - 4\alpha(\tilde{\gamma} \mathbf{m}_0)^S) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} + 4\alpha \tilde{\gamma} \mathbf{m}), \quad (2.27)$$

$$\mathbf{T} = ((\lambda \text{tr } \mathbf{G}\mathbf{E} + 2\mu \mathbf{G} - 4\alpha(\tilde{\gamma} \mathbf{m}_0)^S) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} + 4\alpha \tilde{\gamma} \mathbf{m}). \quad (2.28)$$

## 2.4 Среда вблизи однородного нелинейного сферически деформированного состояния

В данной главе основная задача состояла в нахождении формы динамических уравнений при условии, что деформация среды равномерна и однородна по всем направлениям. Поэтому удобно обозначить за  $A$  коэффициент, с которым среда расширяется (или сжимается, если  $A < 1$ ).

Субиндекс “s” далее означает отношение величин к нелинейному сферически деформированному состоянию.

Радиус вектор  $\mathbf{R}_s$ , независимая от спина часть тензора вращения  $\mathbf{P}_{\perp s}$ , тензор деформации  $\mathbf{A}_s$  и вектор  $\mathbf{m}$ , обозначающий направление спина, при

однородной шаровой деформации примут вид:

$$\mathbf{R}_s = A\mathbf{r}, \quad \mathbf{P}_{\perp s} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}_s = A\mathbf{E}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_0, \quad (2.29)$$

что позволит записать более простую форму для тензоров деформаций  $\mathbf{G}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ :

$$\mathbf{G}_s = (A^2 - 1)\mathbf{E}/2, \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_s = -(A - 1)^2\mathbf{m}_0/2, \quad (2.30)$$

а также получить удобную форму для тензоров напряжений:

$$\mathbf{T}_s = T\mathbf{E} + T_1\mathbf{m}_0\mathbf{m}_0, \quad (2.31)$$

где

$$T = A(A^2 - 1)\left(\frac{3}{2}\lambda + \mu\right), \quad T_1 = 2\alpha(A - 1)^3 \quad (2.32)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{T}_s/A^2. \quad (2.33)$$

Мы будем использовать оператор градиента в преднапряжённом состоянии:

$$\overset{s}{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_s} = A^{-1}\overset{\circ}{\nabla}. \quad (2.34)$$

Вблизи сферически деформированного состояния справедливо приближение:

$\mathbf{R} = A\mathbf{r} + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{P}_{\perp} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$ , что позволяет линеаризовать меры деформации:

$$\mathbf{A} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} \approx A(\mathbf{E} + \overset{s}{\nabla} \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_{\varphi}(\varphi \mathbf{m}_0), \quad (2.35)$$

$$\mathbf{G} \approx \frac{1}{2}(A^2 - 1)\mathbf{E} + A^2(\overset{s}{\nabla} \mathbf{u})^S, \quad (2.36)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \approx -\frac{1}{2}(A - 1)^2\mathbf{m}_0 + A(\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{m}_0 - A^2(\overset{s}{\nabla} \mathbf{u})^S \cdot \mathbf{m}_0, \quad (2.37)$$

После алгебраических преобразований  $[\mathbf{T}]_1$  – линейная часть  $\mathbf{T}$  будет выгля-

деть следующим образом:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{T}]_1 = & \mathbf{C}_1 \cdot \overset{s}{\nabla} \mathbf{u} + A^3 (\lambda \overset{s}{\nabla} \cdot \mathbf{u} \mathbf{E} + 2\mu \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S) \\
& + 2\alpha A^2 \mathbf{E} \times (\mathbf{m}_0 \times (\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} - A \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S) \cdot \mathbf{m}_0) \\
& + 4\alpha(1 - A)A (\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} - A \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S) \cdot \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \\
& + \mathbf{C}_2 \times \boldsymbol{\theta} + 4\alpha(1 - A)A \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0. \quad (2.38)
\end{aligned}$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{T}_s - 4\alpha A \tilde{\gamma}_s \mathbf{m}_0 = T \mathbf{E} + 4\alpha(A - 1)^2 (A - 1/2) \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{C}_2 = 2\alpha(A^2 \mathbf{E} - 2\tilde{\gamma}_s \mathbf{m}_0) = 2\alpha(A^2 \mathbf{E} + (A - 1)^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0) \quad (2.40)$$

Тогда баланс сил в линейном приближении:

$$\begin{aligned}
& A \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}) + A^4 ((\lambda + 2\mu) \overset{s}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \cdot \mathbf{u} - \mu \overset{s}{\nabla} \times (\overset{s}{\nabla} \times \mathbf{u})) \\
& + 2\alpha A^3 \overset{s}{\nabla} \times (\mathbf{m}_0 \times (\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} - A \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S) \cdot \mathbf{m}_0) + 4\alpha(1 - A)A (\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} - A \overset{s}{\nabla} \cdot (\overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S)) \cdot \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \\
& + A \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{C}_2 \times \boldsymbol{\theta}) + 4\alpha(A - 1)A \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{m}_0 \times \boldsymbol{\theta}) \mathbf{m}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Найдём также линейную часть векторного инварианта тензора напряжений

$\boldsymbol{\tau}$ :

$$[\boldsymbol{\tau}_\times]_1 = -2 \frac{\rho}{\rho_0} \alpha A (\mathbf{m}_0 \cdot ((3A - 1)(A - 1) \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S + (A^2 + 1) \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^A) \times \mathbf{m}_0 + (A^2 + 1) \boldsymbol{\theta})$$

Тогда баланс моментов примет вид:

$$-\mathbf{m}_0 \cdot (\omega_s \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S + \omega_0 \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^A) \times \mathbf{m}_0 = \omega_0 \boldsymbol{\theta} + \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}_0, \quad (2.42)$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\alpha A(A^2 + 1)}{\rho_0 I \dot{\varphi}} > 0, \quad \omega_s = \frac{2\alpha A(3A - 1)(A - 1)}{\rho_0 I \dot{\varphi}}. \quad (2.43)$$

Далее полученные соотношения баланса будут рассматриваться в контексте вывода дисперсионных соотношений. В этой же главе мы хотели бы заметить, что, вводя новые – “эффективные” – константы, мы собираем уравнения по смыслу и форме аналогичные уравнениям в линейной среде. И поэтому мы можем обратиться к ранее полученным выводам [3, 1] и использовать факт, что отрицательные эффективные коэффициенты означают неустойчивость нелинейного равновесия в связи с возможностью достижения энергетической функцией отрицательных значений.

## Глава 3

# Дисперсионные соотношения для линейной изотропной упругой редуцированной среды Кельвина. Волны и устойчивость.

Ранее в [13] был произведён вывод дисперсионных соотношений для Гироконтинуума. Было показано, что в такой среде присутствуют как плоские, так и поляризованные волны. Также был произведён вывод уравнений для линейной среды Кельвина. В данной главе мы хотим получить информацию о видах волн для среды Кельвина при всестороннем однородном расширении-сжатии и понять, как на поведение среды влияет геометрическая нелинейность.

### 3.1 Гармонические волны

Мы желаем найти гармоническое во времени решение ( $\exp i\omega t$ ), поэтому для дальнейших вычислений будет удобно выразить  $\boldsymbol{\theta}$  через  $\mathbf{u}$  из баланса моментов, при условии что  $\omega \neq \omega_0$

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^{-1} (\mathbf{E} + i\frac{\omega}{\omega_0} \mathbf{m}_0 \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{m}_0 \cdot (\frac{\omega_s}{\omega_0} \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S + \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^A) \times \mathbf{m}_0).$$

Подстановка этого выражения в баланс сил 2.41 и поиск решения в форме  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_s - \omega t))$  позволили бы нам сформулировать редуцированную спектральную проблему для произвольного направления распростране-

ния волн.

Во избежание громоздких выводов мы проведём подстановку выражений в двух частных случаях: при распространении волн вдоль спина и ортогонально спину (с разделением каждого из этих двух вариантов на продольную волну и поперечную волну). В общем случае волны, конечно же, могут иметь произвольные направления распространения – с компонентами вдоль и ортогонально спину.

Учитывая вид искомого решения, в дальнейшем можно использовать соотношение:

$$\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} = i k \mathbf{u}$$

### 3.2 Распространение гармонических волн вдоль спина ( $\hat{\mathbf{k}} = \pm \mathbf{m}_0$ )

С учётом направления  $\hat{\mathbf{k}}$  можно переписать  $\boldsymbol{\theta}$  в следующей форме:

$$\boldsymbol{\theta} = \pm \frac{ik}{2} \left( \frac{\omega_s}{\omega_0} + 1 \right) \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \left( -\mathbf{m}_0 \times \mathbf{u} + i \frac{\omega}{\omega_0} (\mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{u} \right). \quad (3.1)$$

Воспользуемся ранее выведенной формой баланса сил 2.41 и последовательно упростим слагаемые:

1. Слагаемое

$$A \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}) = -k^2 [A^2 (A^2 - 1) \left( \frac{3}{2} \lambda + \mu \right) + 4\alpha A (A - 1)^2 (A - 1/2)] \mathbf{u}$$

2. Слагаемое

$$A^4 ((\lambda + 2\mu) \overset{s}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \cdot \mathbf{u} = -k^2 A^4 (\lambda + 2\mu) \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}$$



3. Слагаемое

$$-A^4 \mu \overset{s}{\nabla} \times (\overset{s}{\nabla} \times \mathbf{u}) = -k^2 A^4 \mu (\mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{u}$$

4. Слагаемое

$$2\alpha A^3 \overset{s}{\nabla} \times (\mathbf{m}_0 \times (\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} - A \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S)) \cdot \mathbf{m}_0 = -k^2 \alpha A^4 (\mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{u}$$

5. Слагаемое

$$4\alpha(1-A)A(\overset{s}{\Delta} \mathbf{u} - A \overset{s}{\nabla} \cdot (\overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S)) \cdot \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 = -k^2 4\alpha A(1-A)^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}$$

6. Слагаемое

$$A \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{C}_2 \times \boldsymbol{\theta}) = -\frac{k^2}{2} A \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \left( \frac{\omega_s}{\omega_0} + 1 \right) \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} ((\mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{u} + i \frac{\omega}{\omega_0} (\mathbf{m}_0 \times \mathbf{u}))$$

7. Слагаемое

$$4\alpha(A-1)A \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{m}_0 \times \boldsymbol{\theta}) \mathbf{m}_0 = 0$$

И правая часть уравнения:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = -\rho_0 \omega^2 \mathbf{u}$$

После комбинирования слагаемых по домножению на тензора-проекторы мы можем записать удобную форму для записи дисперсионных соотношений

$$\begin{aligned}
& \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u} (\rho_0 \omega^2 - \rho_0 k^2 c_p^2) \\
& + (\mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{u} (\rho_0 \omega^2 - k^2 \left( \mu_{eff} + \alpha_{eff} \left( 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \right)) \\
& - ik^2 \alpha_{eff} \frac{\omega \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \mathbf{m}_0 \times \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

При этом мы получаем эффективные константы, меняющиеся в зависимости от предварительно деформированного состояния:

$$c_p^2 = \frac{A}{\rho_0} (\lambda A (5A^2 - 3)/2 + \mu A (3A^2 - 1) + 2\alpha (A - 1)^2 (2A + 1)), \quad (3.3)$$

$$\alpha_{eff} = \alpha A \left( 1 + \frac{\omega_s}{\omega_0} \right) (2A^2 - 2A + 1) = 2\alpha A \frac{(A^2 + (A - 1)^2)(2A^2 - 2A + 1)}{A^2 + 1} > 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{eff} &= 3\lambda A^2 (A^2 - 1)/2 + 2\mu A^2 (A^2 - 1/2) \\
&+ \alpha A (4(A - 1)^2 (A - 1/2) + A^3) - \alpha_{eff} = \\
&3\lambda A^2 (A^2 - 1)/2 + 2\mu A^2 (A^2 - 1/2) + \alpha A (4(A - 1)^2 (A - 1/2) + A^3) - \\
&2\alpha A \frac{(A^2 + (A - 1)^2)(2A^2 - 2A + 1)}{A^2 + 1} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

### 3.2.1 Продольные волны ( $\mathbf{u} \parallel \mathbf{m}_0, \mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{k}}$ ).

Дисперсионное соотношение для продольных волн с учётом  $\mathbf{u} \parallel \mathbf{m}_0$  примет простой вид:

$$\omega = c_p k \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Поляризованная волна сдвига-вращения ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{m}_0 = 0$ ).

Слагаемые, домножаемые на  $\mathbf{m}_0\mathbf{m}_0$  равны 0, дисперсионное соотношение принимает вид:

$$\mathbf{u}(\rho_0\omega^2 - k^2(\mu_{eff} + \alpha_{eff}(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2}))) - ik^2\alpha_{eff}\frac{\omega\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\mathbf{m}_0 \times \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Введём обозначения:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{\mu_{eff}}{\mu_{eff} + \alpha_{eff}}, \quad (3.8)$$

$$c_{s\alpha}^2 = \frac{\mu_{eff} + \alpha_{eff}}{\rho_0}. \quad (3.9)$$

Волны с круговой (циркулярной) поляризацией:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2)$ , Для волн, поляризованных вдоль спина, дисперсионное соотношение примет вид:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2} \frac{\omega + \omega_0}{\omega + \omega_1^2/\omega_0}, \quad (3.10)$$

Для волн, поляризованных против спина, дисперсионное соотношение примет вид

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2} \frac{\omega - \omega_0}{\omega - \omega_1^2/\omega_0}. \quad (3.11)$$

### 3.3 Распространение гармонических волн ортогонально спину ( $\hat{\mathbf{k}} \perp \mathbf{m}_0$ )

Мы можем ввести вектор  $\mathbf{l} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{m}_0$ , что вместе с  $\hat{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{m}_0$  составляет полный базис в трёхмерном пространстве.

Подставляя это выражение для  $\overset{s}{\nabla} \mathbf{u}$  в  $\mathbf{m}_0 \cdot (\frac{\omega_s}{\omega_0} \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S + \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^A) \times \mathbf{m}_0$ , мы получим простую форму:

$$\frac{ik}{2} \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u} \left( \frac{\omega_s}{\omega_0} - 1 \right) \mathbf{l}$$

Что позволяет нам записать для  $\boldsymbol{\theta}$ :

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{ik}{2} \frac{\frac{\omega_s}{\omega_0} - 1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1} \left( \mathbf{l} + i \frac{\omega}{\omega_0} \hat{\mathbf{k}} \right) \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u} = ik\Theta \left( \mathbf{l} + i \frac{\omega}{\omega_0} \hat{\mathbf{k}} \right) \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}, \quad (3.12)$$

где

$$\Theta = \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega_s}{\omega_0} - 1}{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}. \quad (3.13)$$

Для тензора упругости  $\mathbf{C}$  мы будем использовать запись:

$$\mathbf{C}_1 = C_{11} \mathbf{E} + C_{12} \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{C}_2 = C_{21} \mathbf{E} + C_{22} \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0, \quad (3.15)$$

где

$$C_{11} = A(A^2 - 1) \left( \frac{3}{2} \lambda + \mu \right), \quad C_{12} = 4\alpha(A - 1)^2(A - 1/2) \quad (3.16)$$

$$C_{21} = 2\alpha A^2, \quad C_{22} = 2\alpha(A - 1)^2 \quad (3.17)$$

Упрощение слагаемых баланса сил 2.41:

1. Слагаемое

$$A \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}) = AC_{11} \overset{s}{\Delta} \mathbf{u} = -AC_{11} k^2 \mathbf{u}$$

2. Слагаемое

$$A^4 (\lambda + 2\mu) \overset{s}{\nabla} \overset{s}{\nabla} \cdot \mathbf{u} = -k^2 A^4 (\lambda + 2\mu) \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{u}$$

3. Слагаемое

$$-A^4 \mu \overset{s}{\nabla} \times (\overset{s}{\nabla} \times \mathbf{u}) = k^2 A^4 \mu \hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u})$$

4. Слагаемое

$$\begin{aligned}
2\alpha A^3 \overset{s}{\nabla} \times (\mathbf{m}_0 \times (\overset{s}{\nabla} \mathbf{u} - A \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S)) \cdot \mathbf{m}_0 &= \\
ik2\alpha A^3 \overset{s}{\nabla} \times (\mathbf{m}_0 \times (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{u} - \frac{A}{2}(\hat{\mathbf{k}}\mathbf{u} + \mathbf{u}\hat{\mathbf{k}}))) \cdot \mathbf{m}_0 &= ik2\alpha A^3 (1 - \frac{A}{2}) \overset{s}{\nabla} \times (-\mathbf{l}\mathbf{u} \cdot \mathbf{m}_0) \\
&= -k^2 2\alpha A^3 (1 - \frac{A}{2}) \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}
\end{aligned}$$

5. Слагаемое

$$4\alpha A(1 - A)(\overset{s}{\Delta} \mathbf{u} - A \overset{s}{\nabla} \cdot (\overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S)) \cdot \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 = -k^2 4\alpha A(1 - A)(1 - \frac{A}{2}) \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}$$

6. Слагаемое

$$A \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{C}_2 \times \boldsymbol{\theta}) = k^2 A \Theta C_{21} \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}$$

7. Слагаемое

$$4\alpha A(A - 1) \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{m}_0 \times \boldsymbol{\theta}) \mathbf{m}_0 = -k^2 4\alpha A(A - 1) \Theta \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}$$

И правая часть уравнения:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = -\rho_0 \omega^2 \mathbf{u}$$

Также использовалось для 6 слагаемого:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_2 \times \boldsymbol{\theta} &= ik\Theta(C_{21}((\mathbf{m}_0 \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}} \mathbf{m}_0) + i \frac{\omega}{\omega_0} (\mathbf{l} \mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_0 \mathbf{l}))) \\
&\quad + C_{22}(\mathbf{m}_0 \hat{\mathbf{k}} - i \frac{\omega}{\omega_0} \mathbf{m}_0 \mathbf{l})) \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}
\end{aligned}$$

Заметим, что волны, у которых  $\hat{\mathbf{k}} \perp \mathbf{m}_0$ , оказываются плоскими, как и в

средах без спина в отличие от волн, распространяющихся вдоль спина, которые поляризованы.

### 3.3.1 Продольные волны ( $\mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{m}_0 = 0$ ).

Дисперсионное соотношение:

$$k^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{AC_{11} + A^4(\lambda + 2\mu)} \quad (3.18)$$

Это недиспергирующая волна, аналогичная волне растяжения-сжатия в классической среде.

### 3.3.2 Поперечные волны сдвига ( $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ ).

У вектора  $\mathbf{u}$  нет  $\hat{\mathbf{k}}$  составляющей, так что можно записать:

$$\mathbf{u} = (u_m \mathbf{m}_0 + u_l \mathbf{l}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_s - \omega t)} \quad (3.19)$$

Данная запись позволяет раскрыть соотношение:

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u}) = \hat{\mathbf{k}} \times (u_m \mathbf{l} - u_l \mathbf{m}_0) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_s - \omega t)} = (-u_m \mathbf{m}_0 - u_l \mathbf{l}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_s - \omega t)} = -\mathbf{u} \quad (3.20)$$

Получаем для дисперсионного соотношения:

$$\begin{aligned} k^2 A (C_{11} \mathbf{u} + A^3 \mu \mathbf{u} + \alpha A^2 (2 - A) \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u} \\ + \alpha (2 - 2A) (2 - A) \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u} \\ - \Theta C_{21} \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u} + 4\Theta \alpha (A - 1) \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}) = \rho_0 \omega^2 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.21)$$

\* **1**-компонента дисперсионного соотношения – соответствует волне, у которой перемещение ортогонально спину и ортогонально направлению распространения волны она носит тот же характер, что и волна сдвига в классической упругой среде:

$$\omega^2 = c_p^2 k^2 \quad (3.22)$$

где

$$c_p^2 = \frac{AC_{11} + A^4\mu}{\rho_0} = \frac{A^2(A^2 - 1)(\frac{3}{2}\lambda + \mu) + A^4\mu}{\rho_0} \quad (3.23)$$

\* **m**<sub>0</sub>-компонента дисперсионного соотношения:

$$k^2 \left( \mu_{eff} + \alpha_{eff} \left( 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \right) = \rho_0 \omega^2, \quad (3.24)$$

где

$$\alpha_{eff} = \alpha A(A^2 - 2A + 2) \left( 1 - \frac{\omega_s}{\omega_0} \right) = 2\alpha A^2(A^2 - 2A + 2) \frac{2 - A}{A^2 + 1} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \mu_{eff} = 3\lambda A^2(A^2 - 1)/2 + 2\mu A^2(A^2 - 1/2) + \alpha A(A^2 - 2A + 2)(2 - A) - \alpha_{eff} = \\ 3\lambda A^2(A^2 - 1)/2 + 2\mu A^2(A^2 - 1/2) + \alpha A(A^2 - 2A + 2)(2 - A) - 2\alpha A^2(A^2 - 2A + 2) \frac{2 - A}{A^2 + 1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Заметим, что  $\alpha_{eff} > 0$  при  $A < 2$  и  $\alpha_{eff} < 0$  при  $A > 2$ . Введём обозначения:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{\mu_{eff}}{\mu_{eff} + \alpha_{eff}}, \quad (3.27)$$

$$c_{s\alpha}^2 = \frac{\mu_{eff} + \alpha_{eff}}{\rho_0}. \quad (3.28)$$

и получим дисперсионное соотношение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_1^2}, \quad (3.29)$$



## Глава 4

# Исследование дисперсионных соотношений, влияние нелинейной деформации на динамические процессы

В данной главе мы более подробно рассмотрим полученные дисперсионные соотношения и выясним, какие особые состояния появляются в материале благодаря его деформации, а также выясним, как деформация влияет на устойчивость.

Важное замечание: представленные в главе примеры неустойчивости не охватывают полный спектр вариантов неустойчивости среды Кельвина и лишь показывают, что даже для частных случаев волн наблюдается неустойчивость, не характерная для классической среды или линейного случая среды Кельвина.

Критерием неустойчивости выбран уже описанный ранее признак отрицательности энергии, достигаемой при условии отрицательности хотя бы одной упругой константы (эффективной).

### 4.1 Продольные волны,

**распространяющиеся вдоль спина ( $\mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} = \pm \mathbf{m}_0$ ).**

Для продольных волн, распространяющихся вдоль спина, будем использовать дисперсионное соотношение 3.6 с константой  $c_p$  из 3.3.

В зависимости от упругих констант  $\lambda, \mu, \alpha$  среда может иметь участок потери устойчивости или не иметь. Увеличение константы  $\alpha$  повышает эту устойчивость.

### Примеры кривых

Несмотря на то, что на рис. 4.1, демонстрирующем зависимость квадрата скорости от степени растяжения-сжатия материала, есть падающий участок, точка минимума для него выше 0. Это означает, что небольшое сжатие материала приводит к уменьшению скорости продольных волн, среднее - к росту скорости относительно малого сжатия, а сильное - к уменьшению вплоть до 0 относительного среднего сжатия.

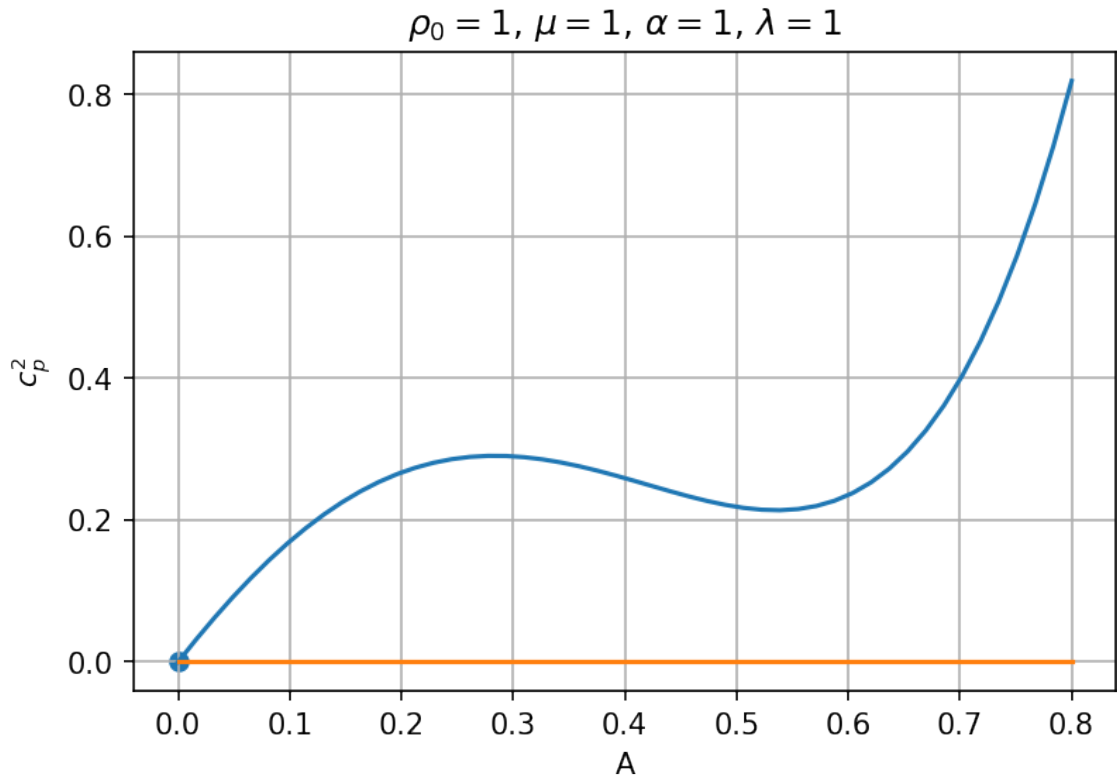


Рис. 4.1: График  $c_p^2$  для случая  $c_{pmin}^2 > 0$

На рис. 4.2 точка минимума находится ниже 0. Это означает, что на интервале для  $A$   $[0.23, 0.72]$  наша среда теряет устойчивость при сжатии. Это

новый характер потери устойчивости для продольных волн.

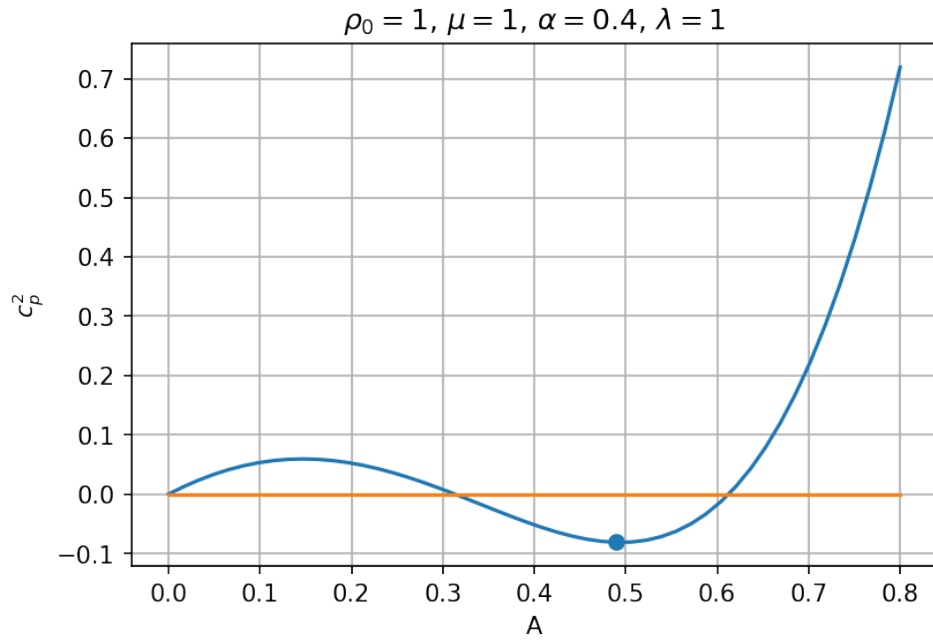


Рис. 4.2: График  $c_p^2$  для случая  $c_{pmin}^2 < 0$

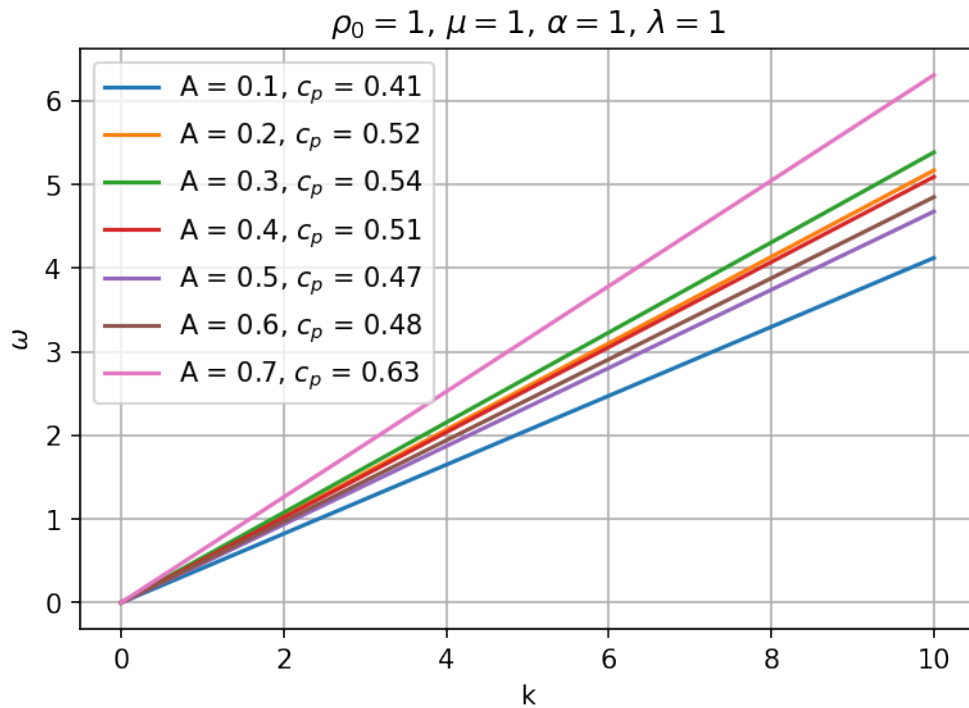


Рис. 4.3: Дисперсионные кривые  $\omega(k)$  для разных степеней сжатия

В остальном дисперсионные волны имеют тот же вид, что и в линейном случае. И при  $A=1$  совпадают с ним.

## 4.2 Поляризованные волны сдвига-вращения, распространяющиеся вдоль спина ( $\mathbf{u} \perp \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} = \pm \mathbf{m}_0$ ).

На рис. 4.4 красный пунктир обозначает точку  $\mu_{eff} + \alpha_{eff} = 0$ . Левая ветка соответствует участку  $\mu_{eff} + \alpha_{eff} < 0, \mu_{eff} < 0$ .

На этом участке  $c_{s\alpha}^2 < 0, \omega_1^2 < 0$ . Правая ветка соответствует участку  $\mu_{eff} + \alpha_{eff} > 0 (c_{s\alpha}^2 > 0)$ . Она разбивается линией  $\omega_1^2 = 0$  на нижний участок ( $\mu_{eff} < 0$ ) и на верхний участок ( $\mu_{eff} > 0$ ). Посмотрим, как поляризованные волны ведут себя на трёх этих участках.

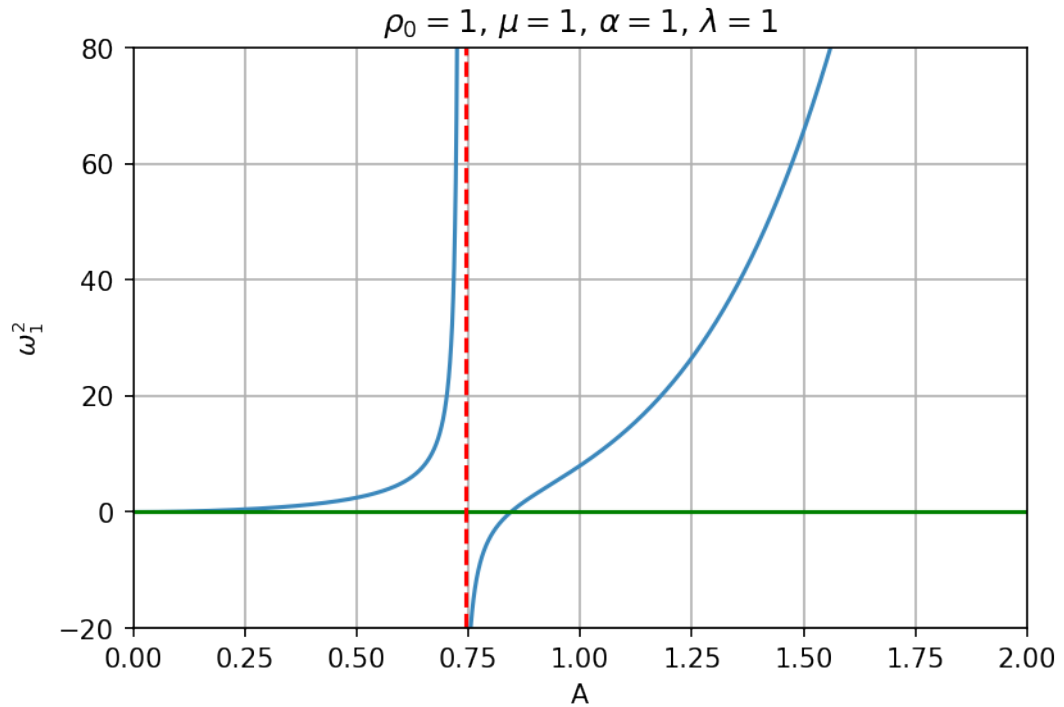


Рис. 4.4: Зависимость  $\omega_1^2$  от степени растяжения-сжатия  $A$

### Примеры кривых

За счёт растяжения мы можем влиять на положение запрещённой зоны и на её ширину (рис. 4.5). При этом для всех трёх случаев (малого сжатия,

недеформированной среды и растяжения) правой ветки кривой с рис. 4.4 при  $\omega^2 > 0$  ветка дисперсионной кривой для волны, поляризованной вдоль спина, будет малодисперсивной (рис. 4.6).

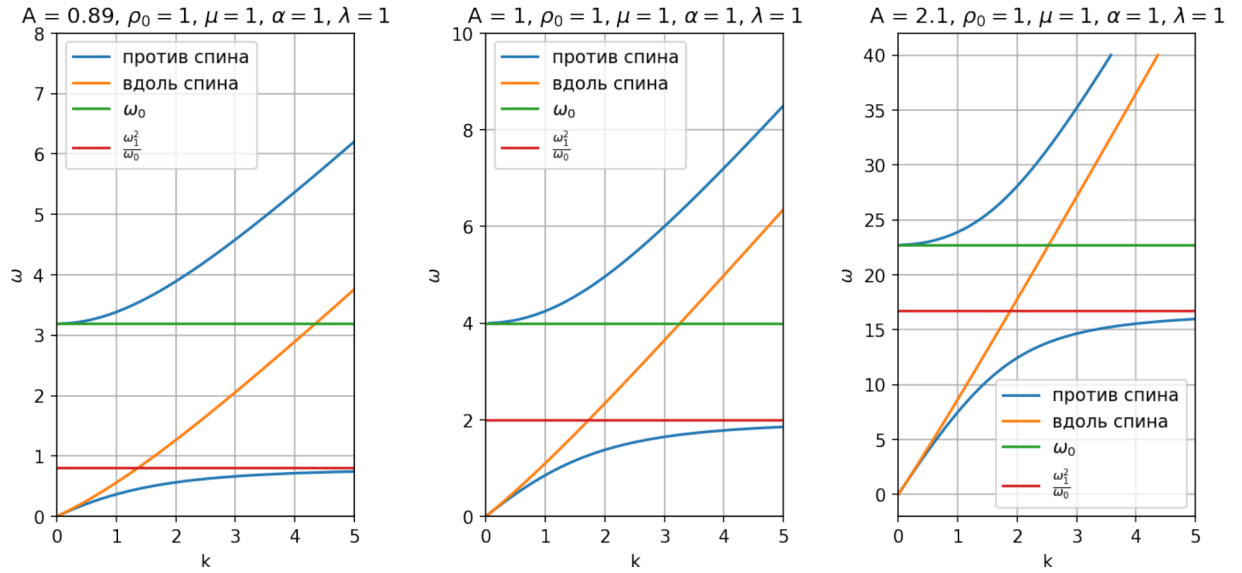


Рис. 4.5: Дисперсионные кривые для поляризованных волн вдоль спина, слева направо: участок малого сжатия, недеформированный, участок растяжения

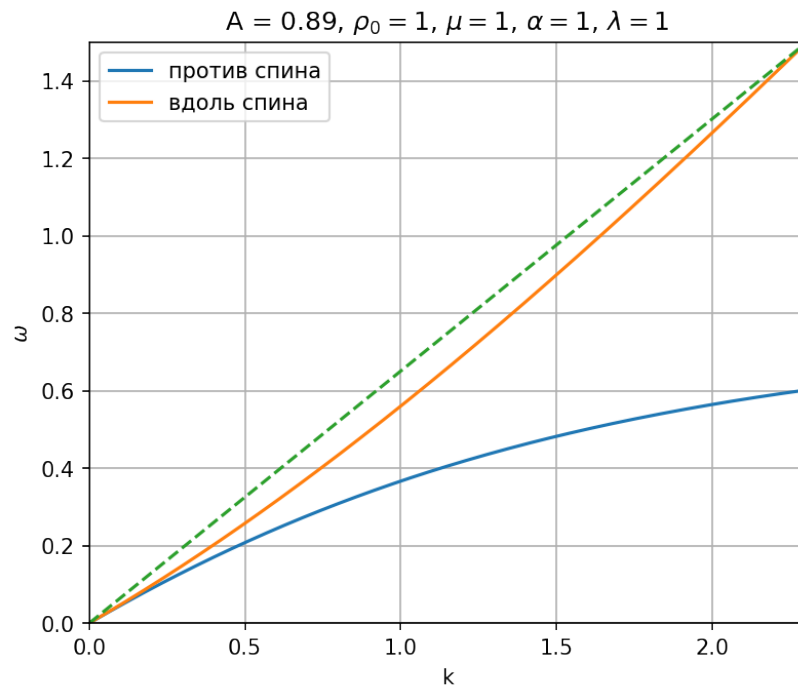


Рис. 4.6: Демонстрация малой дисперсивности волн вдоль спина

Если мы рассматриваем дисперсионные кривые для левой ветки и участка  $\omega^2 < 0$ , то нужно учитывать, что вообще говоря – это зоны неустойчивости.

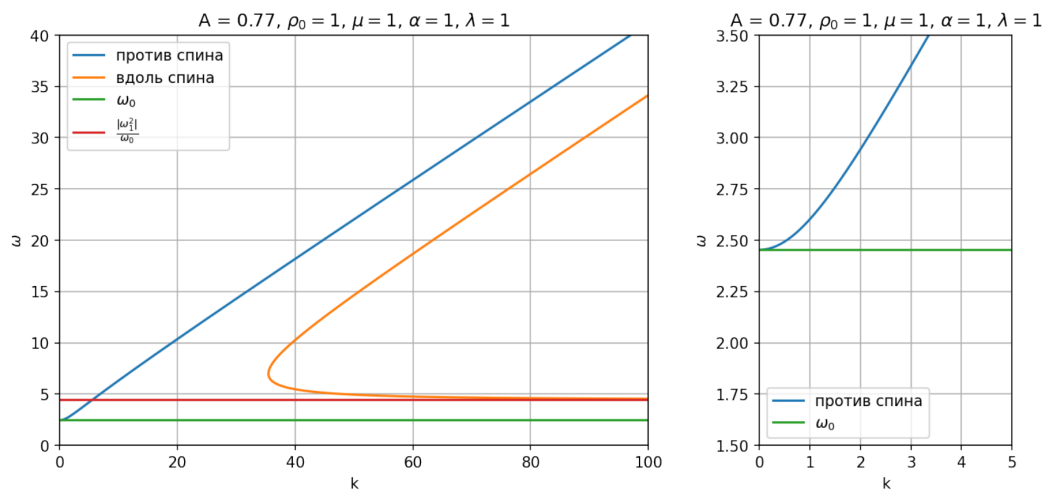


Рис. 4.7: Дисперсионные кривые для участка  $\omega^2 < 0$  правой ветки кривой 4.4 – участок среднего сжатия

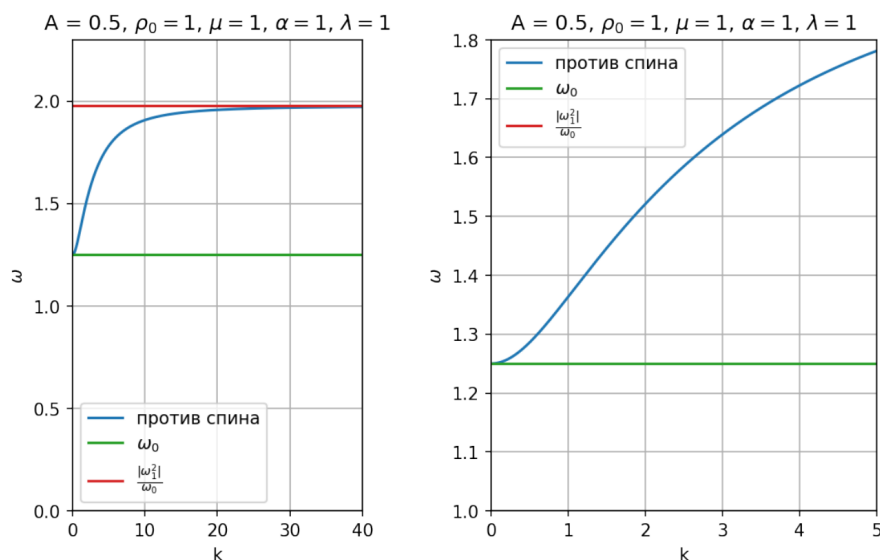


Рис. 4.8: Дисперсионные кривые для левой ветки кривой 4.4 – участок сильного сжатия

Полученные кривые (рис. 4.7 и 4.8) рассматриваются исключительно с точки зрения возможной устойчивости при условии удерживания волн в пределах выше запрещённых зон для рис. 4.7 и между запрещёнными зонами для рис. 4.8. В последнем случае (при сильном сжатии) волны, поляризованные вдоль спина, всегда неустойчивы.

### 4.3 Продольные волны,

распространяющиеся ортогонально спину ( $\mathbf{u} \parallel \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} \perp \mathbf{m}_0$ ).

Для продольных волн, распространяющихся ортогонально спину, дисперсионное соотношение 3.18 можно записать в форме:

$$\omega = c_p k, \quad (4.1)$$

где

$$c_p^2 = \frac{A^2}{2\rho_0} (A^2(5\lambda + 6\mu) - (3\lambda + 2\mu)) \quad (4.2)$$

Заметим, что квадрат скорости для продольных волн, распространяющихся ортогонально спину, равен квадрату скорости для продольных волн, распространяющихся вдоль спина с точностью до слагаемого с множителем  $\alpha$  – в случае волн, ортогональных спину, оно отсутствует и, как следствие, эти волны всегда имеют участок неустойчивости при  $A < \sqrt{\frac{3\lambda+2\mu}{5\lambda+6\mu}}$  (рис. 4.9).

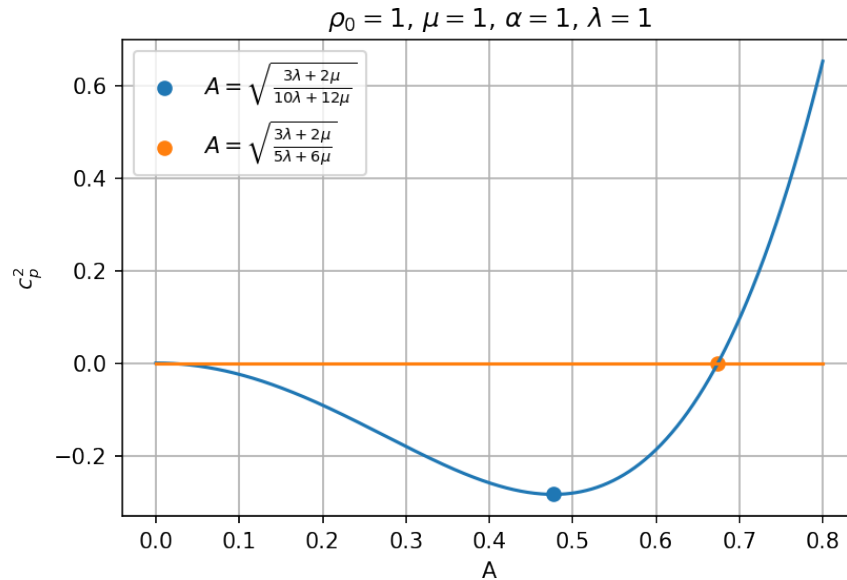


Рис. 4.9: График  $c_p^2(A)$  для продольных волн, распространяющихся ортогонально спину

#### 4.4 Поперечные волны,

распространяющиеся ортогонально спину ( $\mathbf{u} \perp \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} \perp \mathbf{m}_0$ ).

Для поперечных волн, распространяющихся ортогонально спину интерес для анализа представляет компонента вдоль  $\mathbf{m}_0$ . Поэтому будем использовать дисперсионное соотношение 3.29 с константами 3.27 и 3.28.

Наиболее интересное поведение наблюдается для этой категории волн при растяжении: при стремлении степени растяжения  $A$  к 2, расстояние между  $\omega_0$  и  $\omega_1$  уменьшается. При достижении  $A = 2$  размер запрещённой зоны становится равным 0 (также при  $A = 2$ :  $\alpha_{eff} = 0$ ). При  $A > 2$  возникает неустойчивость по отношению к поворотным высокочастотным возмущениям, аналогичная неустойчивости в работе [12]. Демонстрация этого перехода представлена на графиках 4.10 – 4.12.

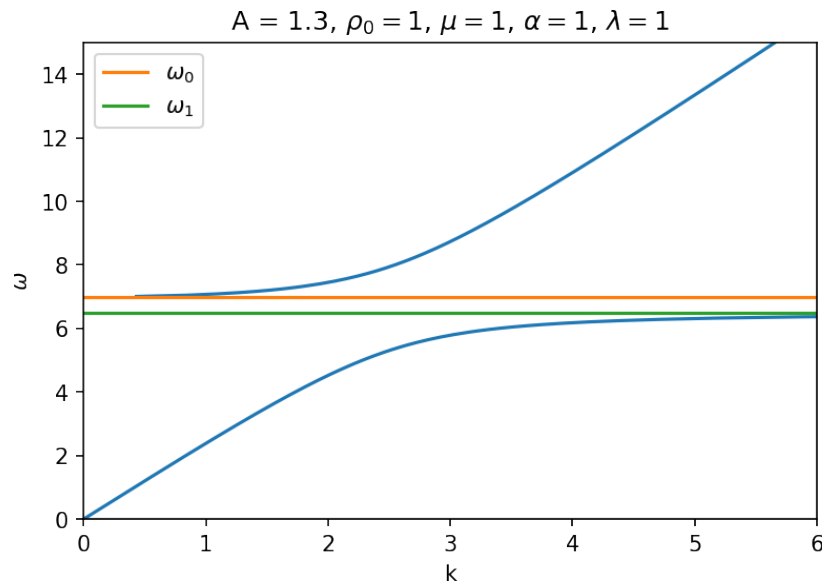


Рис. 4.10: Дисперсионные кривые для волн сдвига, распространяющихся ортогонально спину ( $A < 2$ )

При  $A > 2$  возникает неустойчивость к поворотным высокочастотным возмущениям.



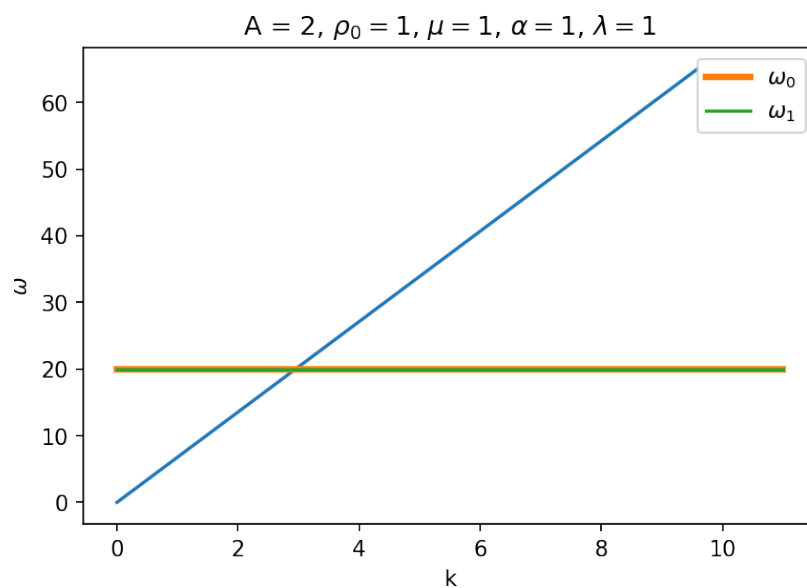


Рис. 4.11: Дисперсионные кривые для волн сдвига, распространяющихся ортогонально спину ( $A=2$ )

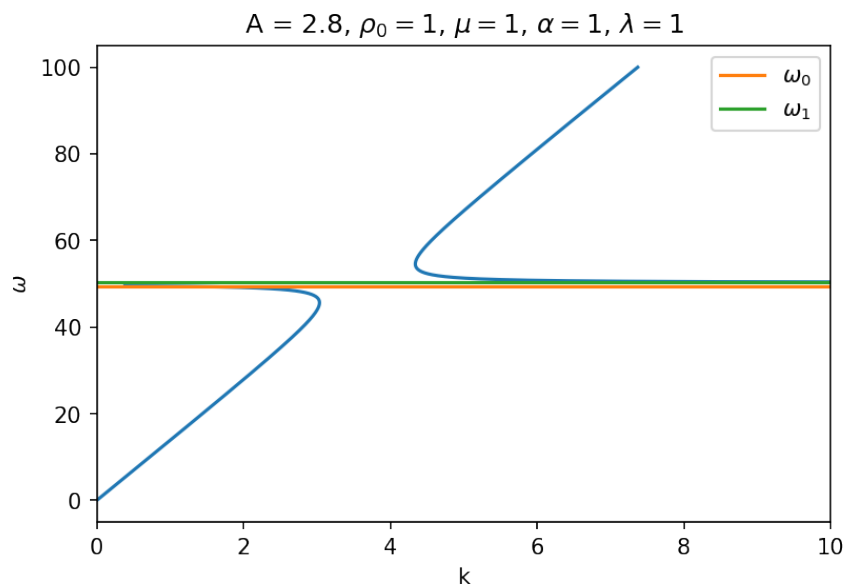


Рис. 4.12: Дисперсионные кривые для волн сдвига, распространяющихся ортогонально спину ( $A>2$ )

## Заключение

Предметом данной работы было рассмотрение простейшей среды Кельвина вблизи состояния всестороннего однородного растяжения-сжатия и оценка влияния деформации на поведение волн.

Для линеаризации вблизи деформированного состояния мы выбрали форму энергии, удобную для построения определяющих соотношений в редуцированной среде Кельвина и получили уравнения баланса в перемещениях.

В третьей главе были рассмотрены волны, распространяющиеся вдоль и ортогонально собственному динамическому спину, а в четвёртой был произведён анализ дисперсионных соотношений для этих волн и выявлены зоны неустойчивости.

Подведем краткие итоги работы:

- Получены аналитические решения дисперсионного соотношения для продольных волн и волн сдвига-вращения, распространяющихся вдоль и против спина в редуцированной среде Кельвина при однородном всестороннем растяжении-сжатии;
- Получены аналитические решения дисперсионного соотношения для продольных волн и волн сдвига, распространяющихся ортогонально спину в редуцированной среде Кельвина при однородном всестороннем растяжении-сжатии;
- При растяжении среды в два раза, она теряет устойчивость относительно волн сдвига, распространяющихся ортогонально спину. Результат, соответствующей потере устойчивости в средах Коссера и отсутствующий в

классических средах;

- Получен новый тип неустойчивости: для продольных волн при сжатии среда теряет устойчивость, но в случае волн, распространяющихся вдоль спина, может снова её обрести при достаточно высокой степени этого сжатия, а также для них можно избежать потери устойчивости при увеличении  $\alpha$ .

Отметим, что данная тема может найти весьма широкое применение в области ферромагнитных сред. Даже при незначительном растяжении-сжатии среды наблюдаются значительные изменения параметров. Это может использоваться для управления волновыми свойствами материала. В данной работе мы лишь коснулись исследования редуцированной среды Кельвина, и более подробный анализ откроет ещё больший спектр возможностей.

Параллельно с написанием выпускной работы результаты первой части работы были представлены на конференции “Advanced Problems in Mechanics” 2021 г.

Результаты второй части планируется опубликовать в журнале *Continuum Mechanics of Solids*.

## Список использованной литературы

- [1] Грекова Е.Ф., Иванова Е.А. Механика деформируемого твердого тела. Среда Кельвина и ферромагнетизм: учебное пособие. — 2019.
- [2] Жилин П.А. Основы теории оболочек // Санкт-Петербург, Изд-во Политехнического ун-та. — 2006.
- [3] Жилин П.А. Рациональная механика сплошных сред // Санкт-Петербург: Изд-во политехн. ун-та. — 2012.
- [4] Иванова Е.А. Моделирование термоупругих процессов в трехмерных средах и оболочках посредством среды Коссера с микроструктурой // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. — 2013. — Vol. 5, no. 1. — P. 98–110.
- [5] Cosserat E., Cosserat F. Sur la théorie de l'élasticité. Premier mémoire // Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques. — 1896. — Vol. 10. — P. I1–I116.
- [6] Cosserat E. Théorie des corps déformables. — Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909.
- [7] Gilabert F.A, Roux J-N, Castellanos A. Computer simulation of model cohesive powders: Plastic consolidation, structural changes, and elasticity under isotropic loads // Physical Review E. — 2008. — Vol. 78, no. 3. — P. 031305.

- [8] Grekova E.F., Abreu R. Isotropic Linear Viscoelastic Reduced Cosserat Medium: an Acoustic Metamaterial and a First Step to Model Geomedium // *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics*. — Springer, 2019. — P. 165–185.
- [9] Grekova E.F., Zhilin P.A. Basic equations of Kelvin’s medium and analogy with ferromagnets // *Journal of elasticity and the physical science of solids*. — 2001. — Vol. 64, no. 1. — P. 29–70.
- [10] Grekova E.F. Harmonic waves in the simplest reduced Kelvin’s and gyrostatic media under an external body follower torque // *2018 Days on Diffraction (DD) / IEEE*. — 2018. — P. 142–148.
- [11] Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // *Bulletin of the Seismological Society of America*. — 2009. — Vol. 99, no. 2B. — P. 1423–1428.
- [12] Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced and full Cosserat media: waves and instabilities // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. — 2019. — Vol. 31, no. 6. — P. 1805–1824.
- [13] Grekova E.F. Simplest linear homogeneous reduced gyrocontinuum as an acoustic metamaterial // *Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1*. — Springer, 2018. — P. 375–386.
- [14] Ieşan D. A theory of prestressed thermoelastic Cosserat continua // *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*. — 2008. — Vol. 88, no. 4. — P. 306–319.

- [15] Ivanova E.A., Krivtsov A.M., Morozov N.F. Peculiarities of the bending-stiffness calculation for nanocrystals // Doklady Physics / Nauka/Interperiodica. — 2002. — Vol. 47. — P. 620–622.
- [16] Kafadar C.B., Eringen A.C. Micropolar media—I the classical theory // International Journal of Engineering Science. — 1971. — Vol. 9, no. 3. — P. 271–305.
- [17] Maugin G. Configurational forces: thermomechanics, physics, mathematics, and numerics. — CRC Press, 2016.
- [18] Maugin G.A., Miled A. Solitary waves in micropolar elastic crystals // International journal of engineering science. — 1986. — Vol. 24, no. 9. — P. 1477–1499.
- [19] Müller W.H., Vilchevskaya E.N. Micropolar theory with production of rotational inertia: A rational mechanics approach // Generalized Models and Non-classical Approaches in Complex Materials 1. — Springer, 2018. — P. 581–606.

# Приложения

## А Приложение. Код библиотек и функций на Python

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

def OMEGA_0(alpha, A, rho_0):
    I, fi_dot = 1, 1
    return 2 * alpha * A * (A**2 + 1) / rho_0 / I / fi_dot

def OMEGA_S(alpha, A, rho_0):
    I, fi_dot = 1, 1
    return 2 * alpha * A * (3 * A - 1) * (A - 1) / rho_0 / I / fi_dot

def CSA(mu_eff, alpha_eff, rho_0):
    return np.sqrt((mu_eff + alpha_eff) / rho_0)
# square omega CSA

def CSA_2(mu_eff, alpha_eff, rho_0):
    return (mu_eff + alpha_eff) / rho_0

def OMEGA1(omega0, mu_eff, alpha_eff):
    return np.sqrt(omega0**2 * mu_eff / (mu_eff + alpha_eff))
# square omega 1

def OMEGA1_2(omega0, mu_eff, alpha_eff):
    return omega0**2 * mu_eff / (mu_eff + alpha_eff)

def C_1_p(A):
    return A/rho_0*(lambda_*A*(5*A**2-3)/2+mu*A*(3*A**2-1)+2*alpha*(A-1)**2*(2*A+1))

def C_1_p_r(A):
    return A**2/rho_0*(lambda_*(5*A**2-3)/2+mu*(3*A**2-1))

def C_1_p_r_2(A):
    return A/rho_0*(2*alpha*(A-1)**2*(2*A+1))

# along spin
def K_1_1(omega, omega0, omega1, c_sa):
    return omega/c_sa*np.sqrt((omega+omega0)/(omega+omega1**2/omega0))
def K_1_plus(omega, omega0, omega12, c_sa2):
    return omega*np.sqrt(1/c_sa2*(omega+omega0)/(omega+omega12/omega0))
```

```

# against spin
def K_1_2(omega, omega0, omega1, c_sa):
    return omega/c_sa*np.sqrt((omega-omega0)/(omega-omega1**2/omega0))

def K_1_minus(omega, omega0, omega12, c_sa2):
    return omega*np.sqrt(1/c_sa2*(omega-omega0)/(omega-omega12/omega0))

def MU_EFF_1(lambda_, mu, alpha, A):
    return 3*lambda_*A**2*(A**2-1)/2+2*mu*A**2*(A**2-1/2)+alpha*A*(4*(A-1)**2*(A-1/2)+A**3)-ALPHA_EFF_1(alpha, A)
def ALPHA_EFF_1(alpha, A):
    return 2*alpha*A*(A**2+(A-1)**2)*(2*A**2-2*A+1)/(A**2+1)

def C_2_p(A, lambda_, mu):
    return A**2/2*(A**2*(5*lambda_+6*mu)-(3*lambda_+2*mu))

def MU_EFF_2(lambda_, mu, alpha, A):
    return 3*lambda_*A**2*(A**2-1)/2+2*mu*A**2*(A**2-1/2)+alpha*A*(A**2-2*A+2)*(2-A)-ALPHA_EFF_2(alpha, A)
def ALPHA_EFF_2(alpha, A):
    return 2*alpha*A**2*(A**2-2*A+2)*(2-A)/(A**2+1)

def K_2(omega, omega0, omega1, csa):
    return np.sqrt(omega**2/csa**2*(omega**2-omega0**2)/(omega**2-omega1**2))

```

## Б Приложение. Код примеров отрисовки графиков на Python

```

# EXAMPLE of drawing
### A>2 for shear-wave orthogonal to spin

A=2.8
rho_0 = 1
omega0 = OMEGA_0(alpha, A, rho_0)

alpha_eff = ALPHA_EFF_2(alpha, A)
mu_eff = MU_EFF_2(lambda_, mu, alpha, A)

csa = CSA(mu_eff, alpha_eff, rho_0)
omega1 = OMEGA1(omega0, mu_eff, alpha_eff)

plt.figure(dpi=150)
plt.title(f'A={A}, \rho_0={rho_0}, \omega_0={omega0}, \omega_1={omega1}')

```



```

'$\\mu_{=} '$ + \
f '{mu} , ' + \
'$\\alpha_{=} '$ + \
f '{alpha} , ' + \
'$\\lambda_{=} '$ + \
f '{lambda_}'

omega = np.linspace(0,100,10000)
plt.plot(K_2(omega, omega0, omega1, csa), omega)
plt.plot([0,10],[omega0, omega0], label='$\omega_0$')
plt.plot([0,10],[omega1, omega1], label='$\omega_1$')
plt.xlim(0, 10)
plt.legend()
plt.ylabel('$\omega$')
plt.xlabel('k')

# Example of drawing
### polarized waves - middle branch
rho_0 = 1
mu = 1
alpha = 1
lambda_ = 1
A = 0.77
omega = np.linspace(0,100,4000)
omega0 = OMEGA_0(alpha, A, rho_0)
mu_eff = MU_EFF_1(lambda_, mu, alpha, A)
alpha_eff = ALPHA_EFF_1(alpha, A)

omega1 = OMEGA1(omega0, mu_eff, alpha_eff)
omega12 = OMEGA1_2(omega0, mu_eff, alpha_eff)

c_sa = CSA(mu_eff, alpha_eff, rho_0)
c_sa2 = CSA_2(mu_eff, alpha_eff, rho_0)

plt.figure(figsize=(7,5), dpi=150)

K1 = K_1_minus(omega, omega0, omega12, c_sa2)
K2 = K_1_plus(omega, omega0, omega12, c_sa2)
plt.plot(K1, omega, label='against_spin')
plt.plot(K2, omega, label='along_spin')
plt.xlim(0, 100)
plt.ylim(0, 40)

plt.plot([0,100],[omega0, omega0], label='$\omega_0$')
plt.plot([0,100],[np.abs(omega12)/omega0, np.abs(omega12)/omega0], label='$\frac{|\omega_1|^2}{\omega_0}$')

```

```

plt.legend()
plt.title(f'A_{\omega}'+\
          '\rho_0=${\rho_0},\omega'+\
          '\mu=${\mu},\omega'+\
          '\alpha=${\alpha},\omega'+\
          '\lambda=${\lambda}_\omega')
plt.ylabel('\omega')
plt.ylabel('\omega')
plt.xlabel('k')
plt.grid()

# Example of drawing
### P-waves
rho_0 = 1
mu = 1
alpha = 1
lambda_omega = 1

plt.figure(dpi=150)
plt.title('\rho_0=${\rho_0},\omega'+\
          '\mu=${\mu},\omega'+\
          '\alpha=${\alpha},\omega'+\
          '\lambda=${\lambda}_\omega')
for A in np.linspace(0.1,0.7,7):
    c_p = C_1_p(A)
    print(A,c_p)
    k = np.linspace(0,10,100)
    plt.plot(k,np.sqrt(c_p)*k,label='A_{\omega}'+str(A)+' ,\omega$c_p$_{\omega}'+str(round(c_p**(1/2),2)))
plt.legend()
plt.grid()
plt.ylabel('\omega')
plt.xlabel('k')

```