Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа теоретической механики

Работа допущена к защите

Директор в.ш.т.м, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

_____ А.М. Кривцов

«___»_____2020 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

«МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ВЯЗКОГО ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ И НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ»

по направлению 01.04.03 Механика и цифровое математическое моделирование

профиль 01.04.03_03 Механика и цифровое производство

Выполнила
студентка гр. 3640103/80301 М.А. Гусева

Руководитель
Доцент ВШТМ, к. ф.-м. н. М.Б. Бабенков

Санкт-Петербург

2020

РЕФЕРАТ

На 51 с., 26 рисунков, 0 таблиц, 0 приложений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: РАСТЯЖЕНИЕ СТЕКЛЯННОЙ ТРУБКИ, ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОГО ЦИЛИНДРА, ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ, ПОТОКИ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ РЕЙНОЛЬДСА, МЕЖФАЗНЫЕ ПОТОКИ.

Тема выпускной квалификационной работы: «Моделирование поведения вязкого толстостенного цилиндра при осевом растяжении и неравномерном нагреве».

Данная работа посвящена разработке модели вязкого толстостенного цилиндра, поведение которой при осевом растяжении и неравномерном нагреве визуально соответствовало бы поведению реальной стеклянной трубки в соответствующих условиях. Задачи, которые решались в ходе исследования:

1. Разработка модели вязкого толстостенного цилиндра, поведение которой при неравномерном нагреве и осевом растяжении соответствует в визуальном приближении реальному процессу.

2. Изучение области применения такой модели.

3. Проведение анализа поведения модели при меняющихся входных параметрах.

4. Описание метода будущей оптимизации такой модели и расширения границ её применения.

Работа выполнялась не в рамках преддипломной практики, однако существующие требующие решения задачи, связанные с моделированием стеклянного цилиндра, были изучены по смежной с ней областью. Разработка и анализ проводился с помощью программного обеспечения Wolfram Mathematica 12.0, оснащенного всеми необходимыми инструментами математического моделирования.

В результате была разработана дискретная модель поведения вязкого толстостенного цилиндра. Исследовано влияние входных параметров модели на поведение её решений, проведено сравнение полученного решения с реальным процессом. Также был предложен метод по будущей оптимизации модели.

ABSTRACT

51 pages, 26 figures, 0 tables, 0 appendices

KEYWORDS: GLASS TUBE PULLING, DISCRETE MODEL OF VISCOUS CYLINDER, SURFACE TENSION, LOW-REYNOLDS-NUMBER FLOWS, INTERFACIAL FLOWS

The subject of the graduate qualification work is “Modeling the behavior of a viscous thick-walled cylinder under axial tension and uneven heating”.

This work is devoted to the development of a model of a viscous thick-walled cylinder whose behavior under axial tension and uneven heating would visually correspond to the behavior of a real glass tube under appropriate conditions. Tasks that were solved during the study:

1. Development of model of viscous thick-walled cylinder, the behavior of which with uneven heating and axial tension corresponds in visual approximation to the real process.
2. Studying of the scope of such a model.
3. Analysis of the model behavior in changing input parameters.
4. Description of the possible model optimization method

The work was not carried out within the framework of undergraduate practice, however, the existing problems requiring solutions related to the modeling of a glass cylinder were studied in the adjacent field. Development and analysis were carried out with the use of Wolfram Mathematica 12.0 software, equipped with all the necessary tools for mathematical modeling.

The study resulted into developed discrete model of the viscous thick-walled cylinder behavior. The influence of the input parameters of the model on the behavior of its decisions was investigated, and the obtained solution was compared with the real process. A possible optimization method was also proposed for future study.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача о растяжении цилиндра под действием заданной силы, приложенной к нему с одного конца, и разрабатывается модель его поведения. Другой конец цилиндра жёстко зафиксирован. Такая задача встречается в ряде промышленных применений, например, в производстве бутылочек для лекарств, пробирок, флаконов для проб духов, пипеток и др. Вытягивание стеклянных и полимерных волокон для оптической микроскопии и стеклянных микроэлектродов в работах [9], [16] и [17] также рассматривается как частный случай задачи о растяжении осесимметричного цилиндра. Он также применим к измерению вязкости при растяжении путем растяжения жидкостного (капиллярного) мостика, что обычно используется для неньютоновских жидкостей, например, в работах [4], [20], [22] и [31].

В нашей работе уклон будет скорее на промышленное производство стеклянных флаконов небольшого диаметра, однако применение данной модели при желании может быть расширено с целью применения и в других отраслях.

Цель данной работы – разработка модели вязкого толстостенного цилиндра, поведение которой при осевом растяжении и неравномерном нагреве соответствовало бы поведению реальной стеклянной трубки в соответствующих условиях. Критерием успешно выполненной задачи будем считать визуальное соответствие, а также близкие значения полученного коэффициента поверхностного натяжения модели к реальным значениям соответствующей характеристики жидкого стекла.

Таким образом, объект данного исследования – поведение стеклянного флакона при его растяжении и нагреве.

Актуальность данной задачи подтверждается её широким потенциальным применением, а именно возможностью моделировать и исследовать процессы производства, не проводя дополнительных ресурсозатратных экспериментов.

В первой главе приведён обзор интересующей нас отрасли, описание промышленного процесса изготовления стеклянных флаконов, а также представлен обзор существующей литературы, связанной с моделированием и изучением схожих процессов.

Вторая глава посвящена разработке модели вязкого толстостенного цилиндра и описанию выбранной дискретной модели. В ней приведено её энергетическое описание, а также сформулированы уравнения движения частиц цилиндра и границы действия модели.

В третьей главе проводится анализ разработанной модели, рассматривается влияние изменения характеризующих её коэффициентов на её поведение, приведён расчёт коэффициента поверхностного натяжения модели, сравнение его с реальными значениями для жидкого стекла.

Четвёртая глава описывает теоретические исследования по будущей оптимизации модели, а также расширению её применения. В ней рассмотрен метод, являющийся на взгляд автора эффективными для этих задач.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРОЦЕССА И СУЩЕСТВУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ

1.1 Обзор отрасли

Стекло – это универсальный материал, который остается востребованным и сегодня в различных сферах и отраслях благодаря разнообразию своих свойств. История возникновения данного материала насчитывает около пяти тысяч лет, именно этой эпохой датируется древнейший образец из искусственного стекла, найденный археологами недалеко от древней столицы Египта Фив. Однако, есть предположение, что его родиной может являться Восточное Средиземноморье, Месопотамия или Финикия, а сам материал может быть много старше.

Отличительной особенностью древнего стекла является его не прозрачность, поскольку, для получения прозрачного стекла необходима была постоянная высокая температура (примерно 1500 °C), а существовавшие в то время печи не позволяли добиться соответствующих условий. Основным сырьем для стекольного производства служила любая щелочь, известь и обычный песок [25].

Уже в 11 веке немецкими стеклодувами было изобретено листовое стекло. Они надували полый цилиндр, обрезали его дно, после чего раскатывали материал в тонкий лист, придавая ему прямоугольную форму. «Цилиндры» имели длину от 6 до 8 футов (от 180 до 240 см) и диаметр от 10 до 14 дюймов (от 25 до 36 см), что ограничивало ширину, на которую можно разрезать стеклянные панели, и в результате окна делились перекладинами на несколько частей. Такое стекло имело название термополированное, также известное, как флоат-стекло или наплывное стекло.

Первые достижения в области автоматизации производства стекла были запатентованы в 1848 году Генри Бессемером [5]. Его система производила

непрерывную ленту из плоского стекла путем формирования ленты между роликами. Это был дорогой процесс, так как поверхности стекла нуждались в полировке. Если бы стекло можно было установить на идеально гладкое, плоское тело, например, на поверхность открытой кастрюли с неподвижной жидкостью, это значительно сократило бы расходы. Были предприняты попытки сформировать листовое стекло в ванне с расплавленным оловом - одной из немногих жидкостей, более плотных, чем стекло, которые были бы неподвижны при высоких температурах, необходимых для изготовления стекла. Было выдано несколько патентов, но этот процесс в то время не работал.

В период с 1953 по 1957 год сэр Аластер Пилкингтон и Кеннет Бикерстафф из британской компании «Pilkington Brothers» разработали первое успешное коммерческое приложение для формирования непрерывной стеклянной ленты с использованием ванны из расплавленного олова, по которой расплавленное стекло беспрепятственно протекает под действием силы тяжести. [24] Успех этого процесса заключался в тщательном балансе объема стекла, подаваемого в ванну, где он был сплющен своим собственным весом. Полномасштабные прибыльные продажи флоат-стекла были впервые достигнуты в 1960 году, а в 1960-х годах процесс получил лицензию во всем мире, заменив прежние методы производства [21].

Появлялись новые технологии, и со временем стекло приобретало дополнительные свойства за счет изменения своего химического состава. Современное стекло приобрело такие новые качества, как устойчивость к высоким температурам, способность проводить электрический ток и дополнительная прочность. Это позволило использовать разные виды стекла в самых различных сферах.

На протяжении многих столетий производство из стекла осуществлялось специально обученными мастерами и было очень трудозатратным. Но со

временем процесс был автоматизирован, что позволило выпускать стеклянные изделия массово.

На данный момент существует несколько основных сфер, где стекло широко применяется, это: строительство, оптическая промышленности, медицина, машиностроение, приборостроение, интерьер, современная архитектура, электротехника и использование в быту. Также с помощью стекла стало возможным создание сверхтонких оптических приборов различного назначения, таких как микроскопы, фотоаппаратуру, телескопы и, конечно же, очки.

В лабораторных условиях часто используются стеклянная посуда и оборудование. Эти изделия изготовлены из химически стойкого стекла, термостойкого стекла или термически и химически стойкого стекла. В зависимости от необходимости используется стеклянное оборудование того или иного типа. Стеклянные трубки, например, должны иметь оплавленные края, поэтому такого рода изделия нельзя изготавливать методом холодной обработки. На производстве для обеспечения таких краёв разрез трубок производится с помощью нагревательных горелок. Также флакончики и пробирки для лекарств нельзя выдувать для предотвращения нарушения стерильности их внутренних стенок. Такая стеклянная посуда устойчива к воздействию большинства химических веществ, легко моется и, что важно, прозрачна.

Одним из известных процессов изготовления стеклянных флаконов различного применения является промышленный метод, применяемый на заводах компании «Pacific Vial». Краткое описание процесса производства описано ниже.

1.2 Процесс изготовления стеклянных флаконов

Высококачественные стеклянные трубки длиной более четырёх футов (около 1.3 метра) помещаются в машины для производства стеклянных флаконов (Рис. 1.1).

Рис. 1.1. Пример машины для производства стеклянных флаконов.
Производитель: компания «AMBEG»
(Изображение взято с сайта https://www.ambeg.de/)

Процесс производства делится на несколько последовательных этапов: предварительный нагрев желаемого места разреза (разрыва), (рис. 1.2), разделение (от стеклянной трубки отделяется часть, из которой впоследствии формируется флакон) (рис. 1.3), прокол (прожигается отверстие со стороны горлышка флакона) (рис. 1.4), формирование горлышка и формирование донышка (рис. 1.5).

Рис. 1.2. Станция предварительного нагрева.
Слева – изображение без фильтра, справа – обработанное изображение

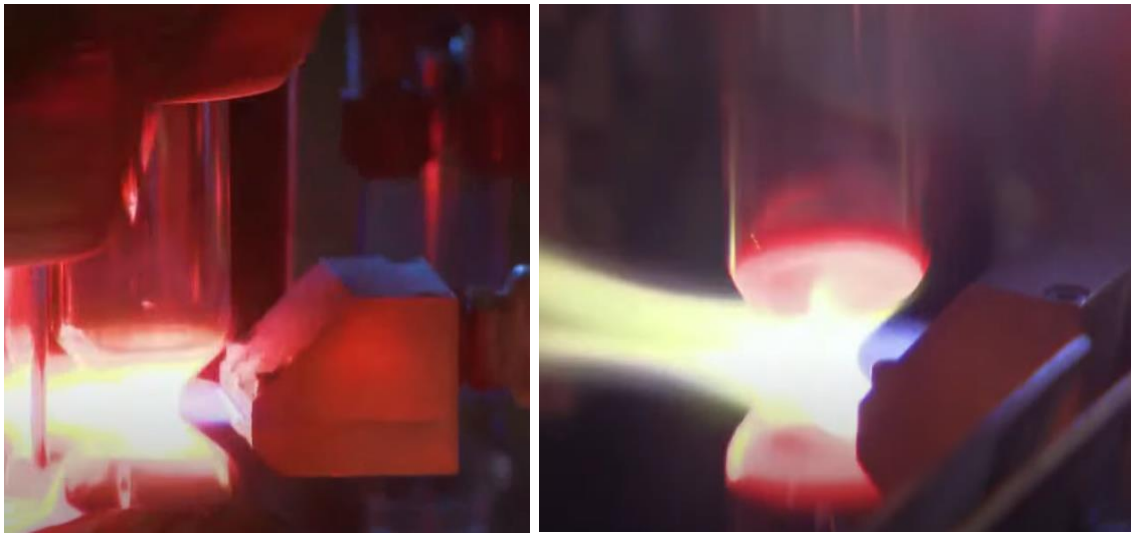

Рис. 1.3. Станция разделения: вид с разных ракурсов

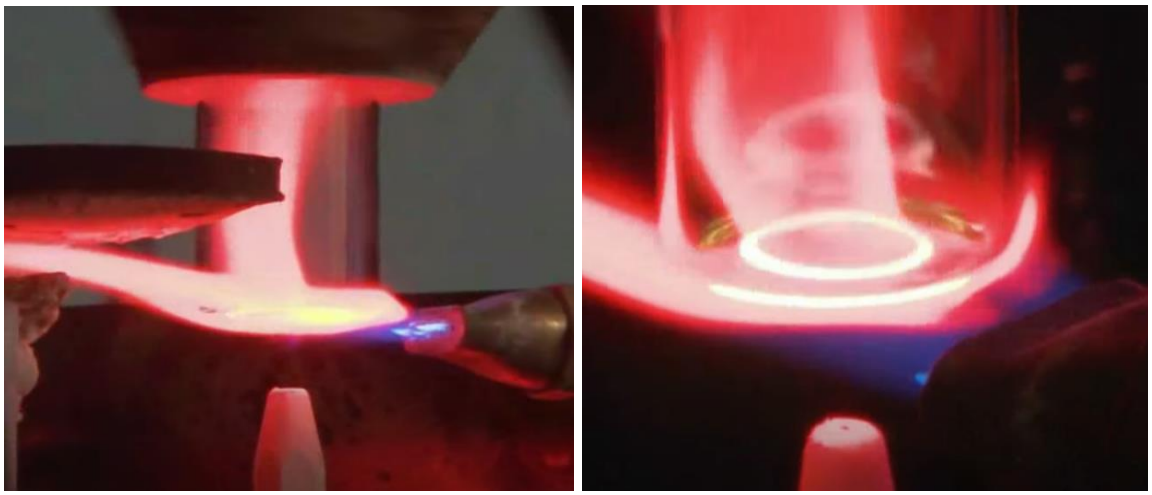

Рис. 1.4. Станция прокалывания: вид с разных ракурсов. С этой стороны цилиндра будет формироваться горлышко флакона

Рис. 1.5. Станции формирования.
Слева – формирование горлышка флакона, справа – формирование донышка
(Рисунки 1.2-1.5 взяты из видео с сайта https://www.pacificvial.com/)

Чтобы обеспечить равномерный нагрев по периметру, трубки вращаются вокруг своей оси. На протяжении всего процесса стеклянные флаконы тщательно проверяются высокотехнологичными компьютеризированными камерами на наличие всех типов дефектов.

Наше внимание привлек этап разделения стеклянной трубки. Во время этого этапа трубка нагревается примерно от 1300°C до 1400°C, рабочей температуры [15], а затем оттягивается манипулятором вниз до момента разделения. Наша модель вязкого цилиндра подходит для описания подобного процесса (до момента разделения). Это делает её пригодной для использования в исследованиях для соответствующего производства.

1.3 Обзор существующих моделей

Существует обширное количество литературы о растяжении потоков высокой вязкости в различных условиях. Для их исследования обычно используются одномерные модели, численное моделирование, а также проведение соответствующих экспериментов. Хороший обзор данной области проводится в [12].

Ряд авторов рассматривали стабильность и разрыв тонких осесимметричных нитей и струй в отсутствие внешнего растяжения и инерции. Теория линейной устойчивости была впервые предложена Рэлеем [26], но прогресс в математическом описании нелинейных эффектов наступил столетие спустя с использованием методов подобия. В своей новаторской работе Эггерс [11] нашел универсальное решение подобия, которое описывает разрыв осесимметричных Ньютоновских нитей, который не зависит от начальных условий. Другие переходные решения подобия для однородных осесимметричных ньютоновских цилиндров были найдены в пределах высокой вязкости [23] и низкой вязкости [6], [7], но в конечном итоге эти решения выглядят достаточно универсальными. Насколько нам известно, роль начальных условий в процессе растяжения и разрыва была впервые исследована Ренарди [30] для однородного осесимметричного жидкого цилиндра путем решения длинноволновых уравнений. Он рассмотрел как ньютоновскую, так и ряд неньютоновских жидкостей с целью объяснить, почему неньютоновские жидкие нити обычно более стабильны, чем ньютоновские, и, действительно, могут практически не

разрушаться. Дальнейшая работа с использованием комбинации асимптотических и численных методов сообщается в его же работе [27]. Далее следуют решения по подобию для различных моделей вязкоупругих жидкостей в [29], а подробный обзор содержится в работе [28]. Дополнительный асимптотический и численный анализ можно найти в статье у Фонтелоса и Ли [13].

В настоящей работе рассматривается проблема, в которой поток жидкости подвергается внешнему растяжению. Такие проблемы также получили значительное внимание в литературе. Для ньютоновских нитей, близких к разрыву, существует достаточно универсальное решение Эггерса [11]. Однако для определения времени и местоположения точки сужения необходимо учитывать как исходную геометрию потока, так и граничные условия.

Некоторые авторы [34], [37] решали аналогичные задачи с помощью численного моделирования, многие характеристики потока, а также его поведение можно изучить с помощью упрощенных моделей, в которых используется гибкость нити. Матович и Пирсон [19], а также Де Винне с коллегами [9] формально вывели соответствующие длинноволновые уравнения для моделирования протяженного потока длинных тонких ньютоновских нитей, которые с тех пор использовались многими авторами. В работах [18] и [30] авторы получили уравнения с общим определяющим законом для исследования неньютоновских жидких нитей. В [35] и [32] была исследована начально-краевая задача для вязкой ньютоновской капли, удлиняющейся под действием силы тяжести, когда инерция незначительна. Роль инерции в этой проблеме была рассмотрена в работе [33].

В заключение отметим, что длинноволновые модели использовались для моделирования потоков, подверженных постоянному тяговому усилию. В своей работе, например, Кей [18] учитывает гравитацию, тем самым решая проблему со слабыми инерционными эффектами, но не исследует случай, когда инерция становится существенной. Хуан и его соавторы в своей работе

[17] обсуждали вытягивание наружно нагретых стеклянных трубок в случае, когда инерция незначительна. В [36] обсуждается роль инерции и изменения вязкости от нагревания в случае, когда поток обращается в длинную тонкую нить.

Прошлые авторы также упоминают ряд преимуществ использования лагранжиана для задач моделирования потока и используют численные методы на его основе.

В рамках нашей задачи также будут использоваться численные методы для решения уравнений движения частиц системы, описываемых заданным лагранжианом. Формирование и поведение тонкой стеклянной нити в настоящей работе рассматриваться не будут. Такую задачу целесообразно рассматривать в отдельном исследовании, ввиду того что она обширна и требует более глубокого рассмотрения.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ВЯЗКОГО ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА

2.1 Постановка задачи

Цель данной работы – разработать модель вязкого толстостенного цилиндра, поведение которой при осевом растяжении и неравномерном нагреве визуально соответствовало бы поведению реальной стеклянной трубки в соответствующих условиях. Материалом объекта было выбрано стекло, поскольку в такой постановке задача является актуальной и может найти своё применение на практике (см. пункт 1.2). Имеется вертикально расположенный стеклянный толстостенный цилиндр с радиусом r и длиной L (Рис. 2.1).

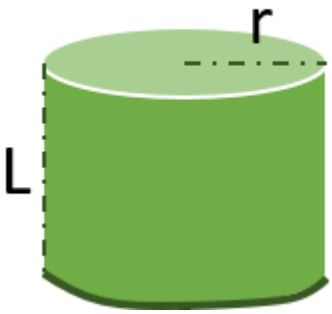

Рис. 2.1. Графическое представление объекта моделирования

Посередине его нагревают по всему периметру равномерно, до определённой температуры. Верхний край цилиндра при этом жёстко закреплён, к нижнему прикладывается сила (или перемещение), направленная вертикально вниз (Рис. 2.2).

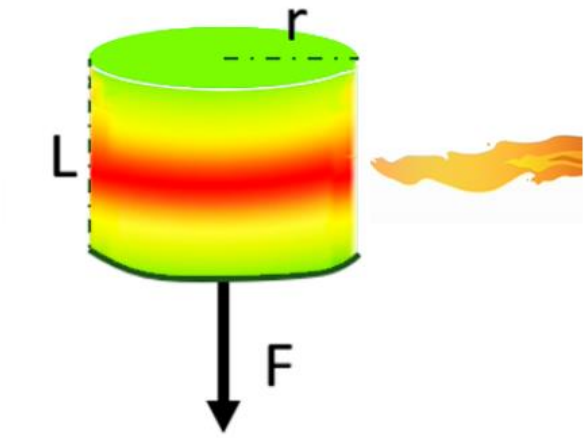

Рис. 2.2. Неравномерный нагрев и представление
граничных условий для цилиндра

Данная задача подразумевает моделирование растяжения стеклянной трубки, нагреваемой с помощью горизонтальной горелки вблизи желаемого места будущего разрыва (разделения).

2.2 Формулировка дискретной модели

Для разработки модели был выбран пакет Wolfram Mathematica 12.0.

Учитывая геометрию модели, расчёты будем производить в цилиндрической системе координат, где ось z проходит через ось симметрии цилиндра. Подробное расположение осей представлено на рисунке 2.3.

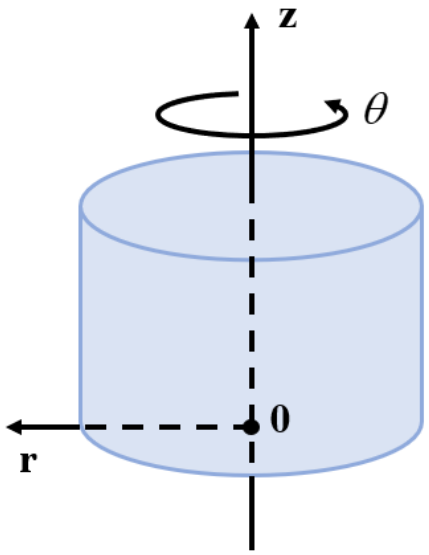

Рис. 2.3. Моделируемое тело в цилиндрической системе координат.
Нулём на оси θ будем считать направление на нас

В течение всей работы будем придерживаться международной системы единиц СИ. В среде Wolfram Mathematica все построения графиков ведутся в декартовой системе координат, для удобства визуализации введём простейшее преобразование из цилиндрической системы координат в прямоугольную с единичными векторами i, j и k, сонаправленными соответственно с осями x, y и z. Вектор k сонаправлен также с осью z цилиндрической системы координат, поскольку в рассматриваемых системах координат они совпадают. Моделируемый цилиндр представим в виде системы частиц с массой m. На рисунке 2.4 изображена система частиц в её начальном положении.

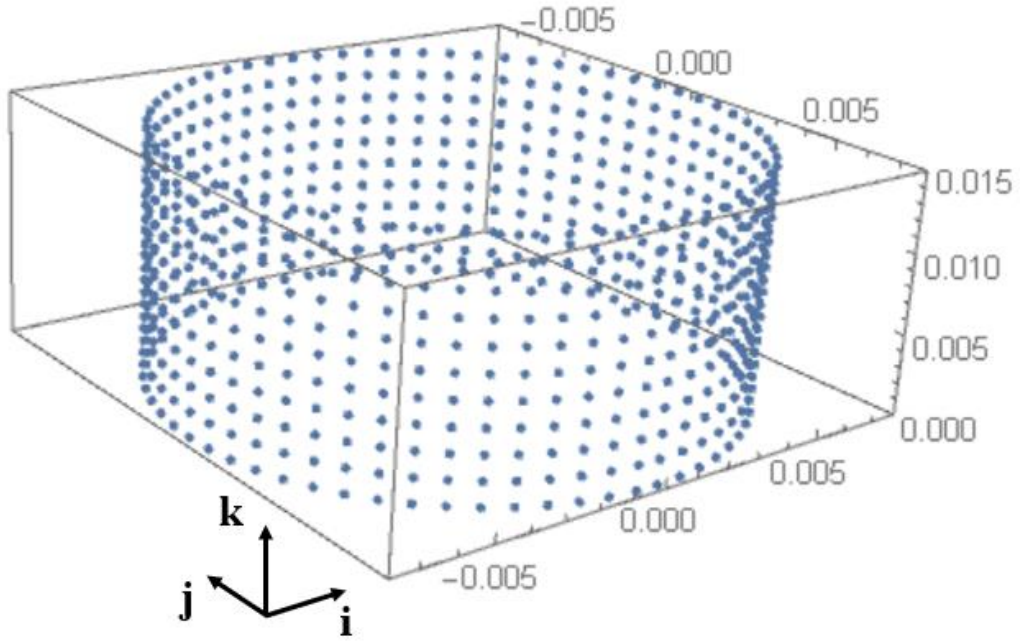

Рис. 2.4. Система в состоянии покоя, размерность по всем осям – метры; ось x сонаправлена с вектором i; y – с вектором j; z – с вектором k

Реальный процесс из пункта 1.2 не является в полной мере осесимметричным, поскольку подразумевает вращение цилиндра вокруг своей оси для обеспечения равномерного нагрева. Для упрощения постановки задачи мы будем пренебрегать эффектами, связанными с этим вращением, модель будем считать симметричной относительно оси z, таким образом понижая размерность задачи от трёхмерной к двумерной.

Количество частиц в системе равно n*m, где n – количество слоёв, m – количество частиц в слое. Координата по оси r одинакова у всех частиц одного слоя из-за осесимметричности модели.

Таким образом радиус вектор положения частицы из центра начала координат выглядит следующим образом:

$$R_{q,p}(t) = i\cos(\theta_p)r_q(t) + j\sin(\theta_p)r_q(t) + kz_q(t), \qquad (2.1)$$

где q – номер слоя; p – номер частицы в слое; t – время в секундах.

Ячейка периодичности изображена на рисунке 2.5.

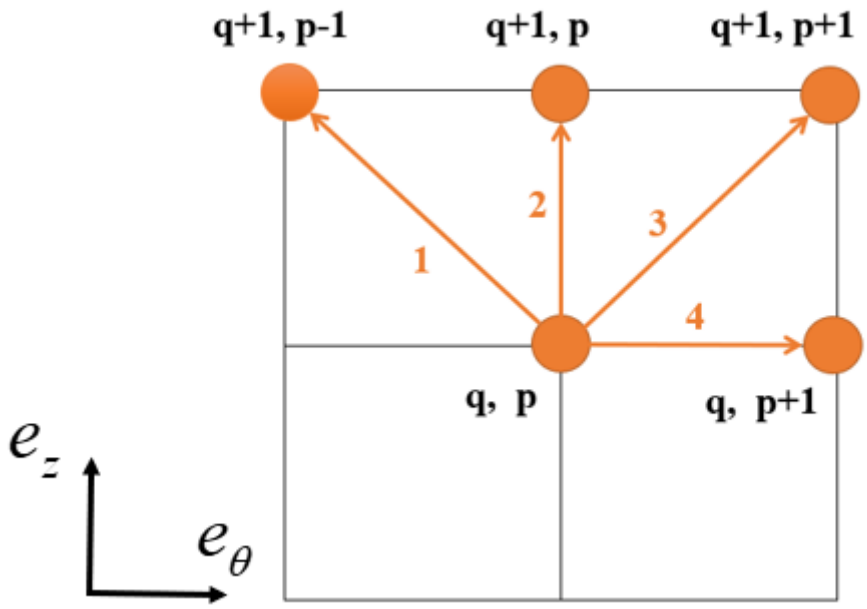

Рис. 2.5. Ячейка периодичности дискретной модели:
q, p – номер частицы, а также и номер ячейки;
e_z и e_θ – единичные вектора осей z и θ соответственно;
1,2,3,4 – номера связей между частицами

Связи 2 и 4 отвечают за растяжение и сжатие цилиндра, в то время как в связях 1 и 3 помимо этого ещё присутствует компонента, отвечающая за сдвиг слоёв относительно друг друга. Подробнее эти связи рассмотрим в следующем пункте.

2.3 Энергия системы

Полная энергия системы это есть сумма её кинетической и потенциальной энергии. В момент времени t=0 система находится в состоянии равновесия. Кинетическая энергия системы формулируется следующим образом:

$$K = \frac{M}{2}\sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\partial(R_{q,p}(t) - R_{q,p}(0))}{\partial t}\right)^2, \tag{2.2}$$

где M – масса одной частицы; $R_{q,p}$ – радиус вектор, представленный в (2.1).

Потенциальную энергию для удобства представим в виде суммы двух слагаемых:

$$P = P_1 + P_2, \tag{2.3}$$

где P_1 – потенциальная энергия связей 2 и 4; P_2 – потенциальная энергия связей 1 и 3. Данные слагаемые выражаются следующим образом:

$$P_1 = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha\in\{2,4\}}\frac{c_\alpha}{2}\left(\Omega_\alpha(q,p) - \Lambda_\alpha(q,p)\right)^2, \tag{2.4}$$

где c_α - коэффициент упругости связи α; $\Omega_\alpha(q,p)$ - длина связи α в ячейке с номером q, p в состоянии покоя; $\Lambda_\alpha(q,p)$ - длина связи α в ячейке с номером q, p в текущий момент времени.

$$\begin{aligned} P_2 = \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{m}\sum_{\alpha\in\{1,3\}}\frac{g_\alpha}{2}\left((\Omega_\alpha(q,p) - \Lambda_\alpha(q,p))\cdot\tau_\alpha(q,p)\right)^2 + \\ + \frac{h_\alpha}{2}\left((\Omega_\alpha(q,p) - \Lambda_\alpha(q,p))\cdot\kappa_\alpha(q,p)\right)^2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где g_α - коэффициент упругости связи α, отвечающий за сдвиг слоёв относительно друг друга; h_α - коэффициент упругости связи α, отвечающий за растяжение-сжатие и сдвиг; $\kappa_\alpha(q,p)$ - единичный вектор, сонаправленный

со связью α в ячейке с номером q, p; $\tau_\alpha(q, p)$ - единичный вектор в ячейке с номером q, p, перпендикулярный связи α, перпендикулярный оси z и направленный внутрь цилиндра.

Длины связей в (2.4) и (2.5) выражаются через радиус векторы положений частиц (2.1) и соответственно зависят от времени.

Коэффициенты жёсткостей связей возьмём равными неким функциям *C0*, *G0* и *H0*, а именно:

$$\begin{aligned} c_\alpha &= C0, \\ g_\alpha &= G0, \\ h_\alpha &= H0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где *α* – номер связи, которую характеризует данный коэффициент, а *C0*, *G0* и *H0* любые необходимые функции.

2.4 Уравнения движения и вязкость

Наша система связанных частиц описывается лагранжианом, который представляет собой разность кинетической и потенциальной энергии системы:

$$L = K - P, \tag{2.7}$$

где K – кинетическая энергия из (2.2); P – потенциальная энергия из (2.3)

.

Для вычисления траекторий частиц системы используются уравнения Эйлера- Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{2.8}$$

где q_i - обобщённые координаты; i=1, 2, … N (число степеней свободы механической системы); штрихом обозначено дифференцирование по времени; L – лагранжиан (2.7). Получаем 2n уравнений, где n – количество слоёв.

Чтобы учесть действие в системе непотенциальных сил, вязкости, добавим в правую часть уравнений (2.8) слагаемое, зависящее от скорости:

$$\eta_q(T)q_i', \tag{2.9}$$

где $\eta_q(T)$ - вязкость системы; T – температура; q_i - обобщённые координаты, q – номер слоя цилиндра.

При этом температура T зависит от времени следующим образом:

$$T(t) = 580*\left(\tanh\left[\left(30t+70\right)/80\right]+1\right)+300, \tag{2.10}$$

где t – время.

На рисунке 2.6 показана выбранная зависимость температуры от времени. Нас интересует система только при температуре, при которой стекло ведёт себя как жидкость. Поэтому система при температуре ниже 1300°C рассматриваться не будет.

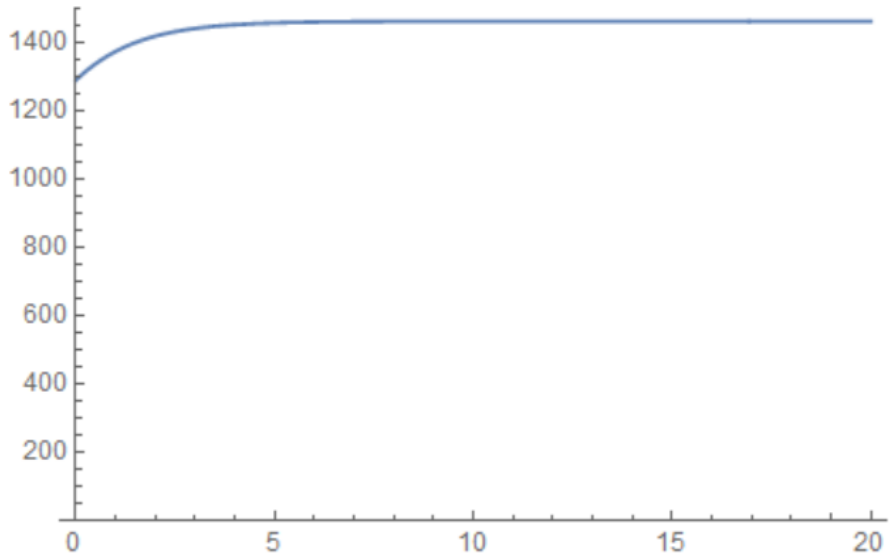

Рис. 2.2. График зависимости температуры от времени T(t).
По оси абсцисс – время в секундах;
по оси ординат – температура в градусах цельсия

В качестве зависимости вязкости от температуры возьмём эмпирическую формулу для натриево-силикатного стекла от температуры из работы [15]:

$$\log_{10} \Psi = -0.40 + 6.66(10^3 / T)^{7/3}, \tag{2.11}$$

где Ψ - вязкость; T – температура в градусах цельсия.

Поскольку модель должна будет описывать неравномерный нагрев, выражение вязкости $\eta_q(T)$ также будет зависеть от номера слоя цилиндра: чем дальше от места нагрева слой, тем выше характеризующая его вязкость цилиндра. Эта зависимость будет описана далее.

Подставив (2.9) в правую часть (2.8) получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \eta_q q_i', \tag{2.12}$$

Вязкость $\eta_q = \Psi$ таким образом будет зависеть от времени. Важно помнить, что вязкость характеризует силу поверхностного натяжения поверхности цилиндра совместно с коэффициентами упругости.

2.5 Энергетический критерий разрыва

Как было упомянуто ранее, в пункте 1.2, настоящая модель не будет описывать поведение системы после разрыва, а также не рассматривает описание поведения стеклянной нити в окрестности момента разрыва.

По достижении в одном из слоёв максимума потенциальной энергии $P = P_{\max}$ считаем, что в этом месте произойдёт разрыв, соответственно далее область действия модели распространяться не будет.

Для примера рассмотрим расчёт при вязкости $\eta_q = 0.00001\Psi$, жёсткостях *C0=0.0004, G0=0.000005, H0=0.0015* и прикладываемой силе F=60sin(t/8), где t – время, количество слоёв n=20, количество частиц в слое m=50. Радиус цилиндра здесь и далее равен 0.0075, расстояние между слоями 0.0015.

Единицы измерения здесь и далее подразумеваются в СИ.

На рисунке 2.7 приведён график полной потенциальной энергии системы от времени.

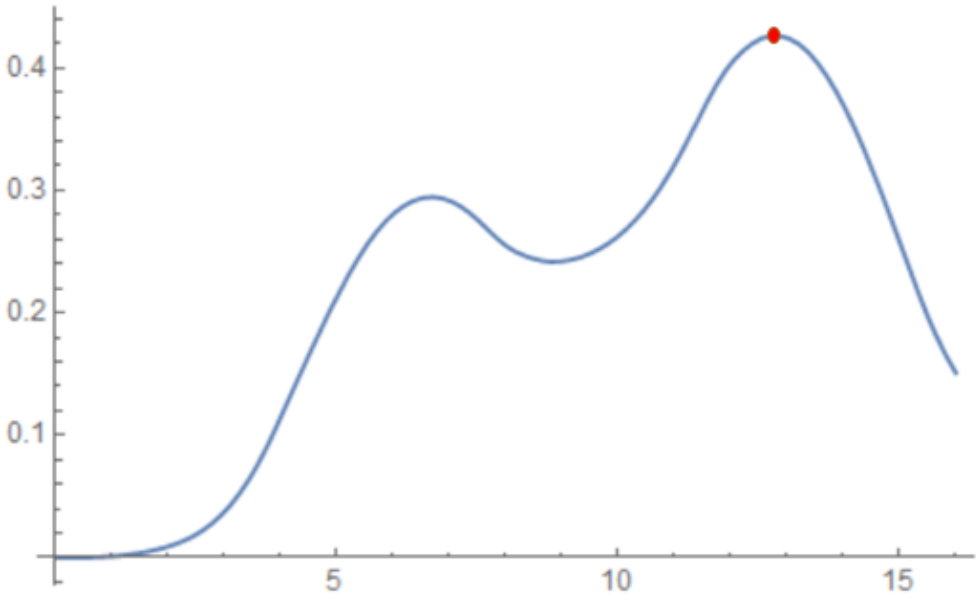

Рис. 2.7. График зависимости потенциальной энергии от времени.
По оси абсцисс – время в секундах;
по оси ординат – потенциальная энергия, Дж;
красным обозначен максимум функции в точке (12.7798, 0.426647)

Максимум потенциальной энергии приходится на момент времени 12.7798 секунд. На графике, однако, видно два пика потенциальной энергии, это явление вызвано тем, что сила, которую мы прикладываем к нижнему краю цилиндра растёт недостаточно медленно, чем вызывает колебания. Такое поведение решения больше соответствует тому, что мы предполагаем получить при реальном процессе. Посмотрим на рисунок 2.8, там можно видеть график распределения потенциальной энергии по слоям цилиндра в момент времени предполагаемого разрыва.

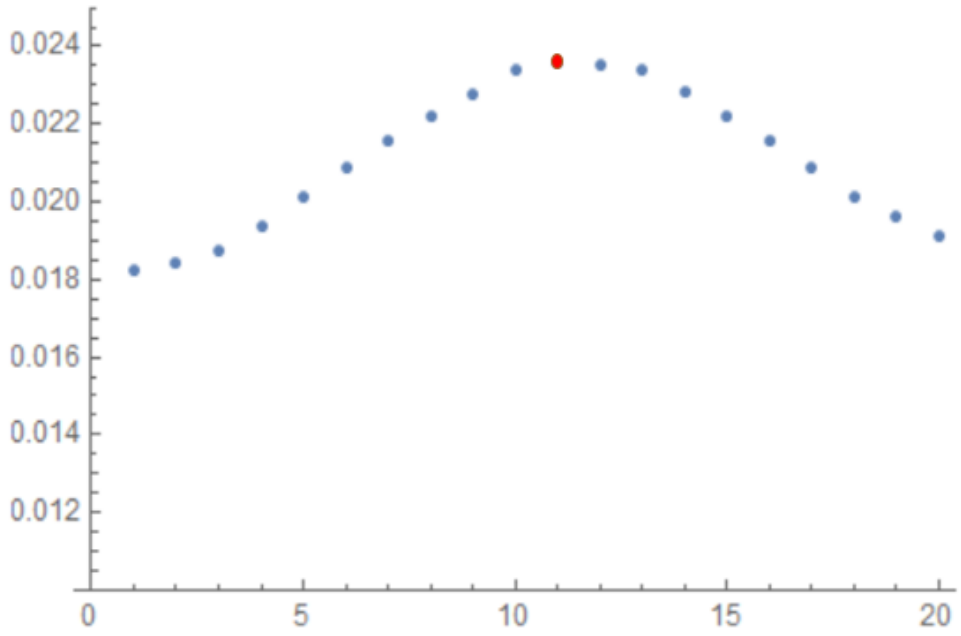

Рис. 2.8. График зависимости потенциальной энергии от номера слоя
в момент времени 12.7798 секунд.
По оси абсцисс – номер слоя, безразмерная величина;
по оси ординат – потенциальная энергия, Дж;
красным обозначен максимум функции в точке (11, 0.02362)

Максимум потенциальной энергии приходится на 11-й слой, а значит именно там предполагаемое место разрыва. На рисунке 2.9 представлен цилиндр в момент времени предполагаемого разрыва в трёхмерном виде.

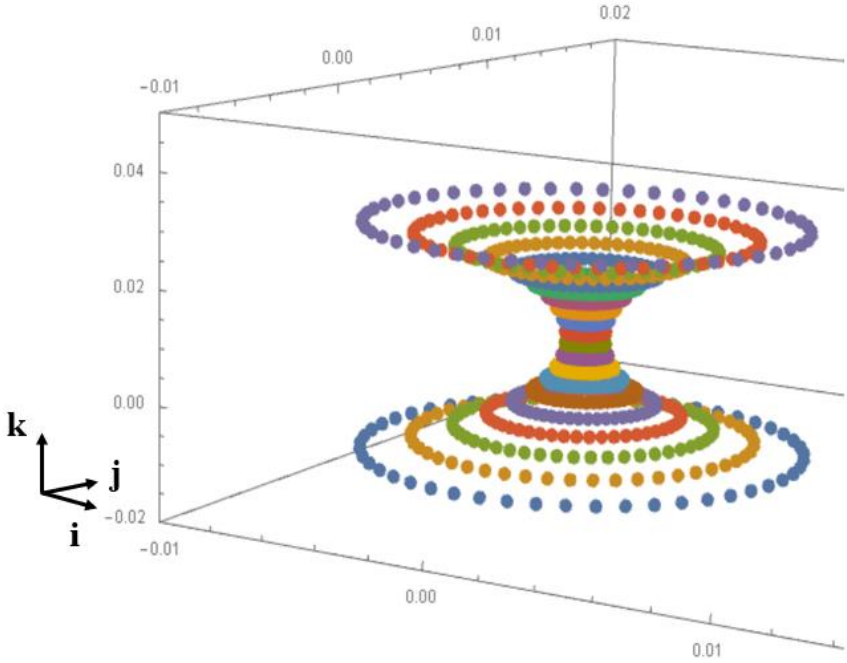

Рис. 2.9. Координаты положений частиц
в момент времени предполагаемого разрыва

Поскольку процесс симметричен относительно оси z, можно также представлять его в двухмерном виде, как на рисунке 2.10.

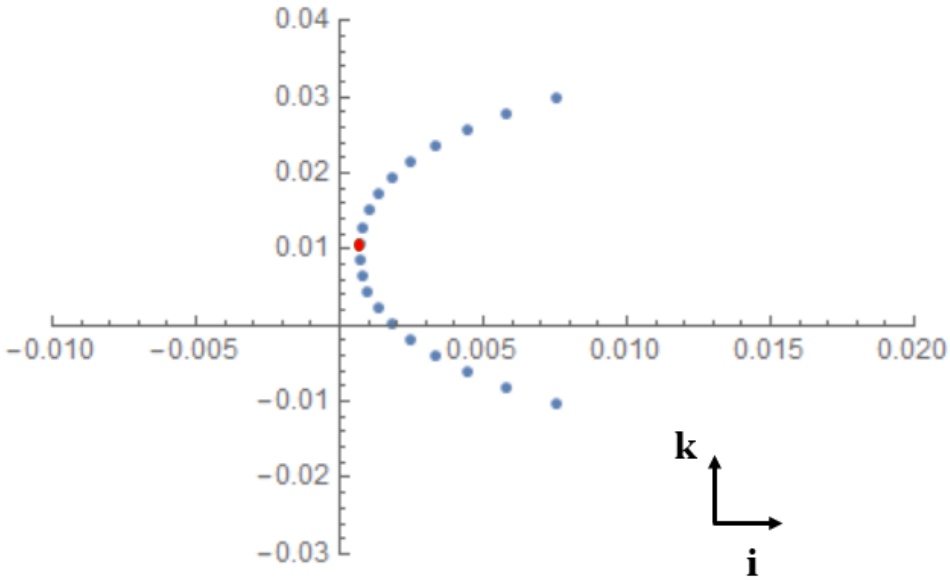

Рис. 2.10. Полусечение цилиндра в момент времени разрыва;
красным обозначена точка 11-го слоя, где предполагаемо произойдёт разрыв

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ МОДЕЛИ

3.1 Влияние коэффициентов жесткости и вязкости

Как было упомянуто ранее, коэффициенты жёсткости и вязкость совместно определяют поведение решения, описывают силу поверхностного натяжения цилиндра, которая в свою очередь определяет форму «шейки» и скорость её образования. В этой части работы рассмотрим, каким образом коэффициенты c_α, h_α, g_α и вязкость $\eta_q(T)$ влияют на поведение цилиндра. Подробнее о них см. в пунктах 2.3 и 2.4.

Для начала рассмотрим поведение решения без вязкости: $\eta_q(T) = 0$.

Напомним, в данной модели коэффициент c_α характеризует вертикальные и горизонтальные связи решётки, коэффициенты h_α и g_α характеризуют диагональные связи. Приложим к нижнему слою цилиндра постоянную силу 50Н. Коэффициенты, характеризующие диагональные связи поставим близкими к нулю, *C0 (см.* (2.6)) поставим равным *0.001 Н/м.* Из соответствующего расчета (рис. 3.1) видно, что оставшийся ненулевым коэффициент c_α характеризует растяжение-сжатие цилиндра.

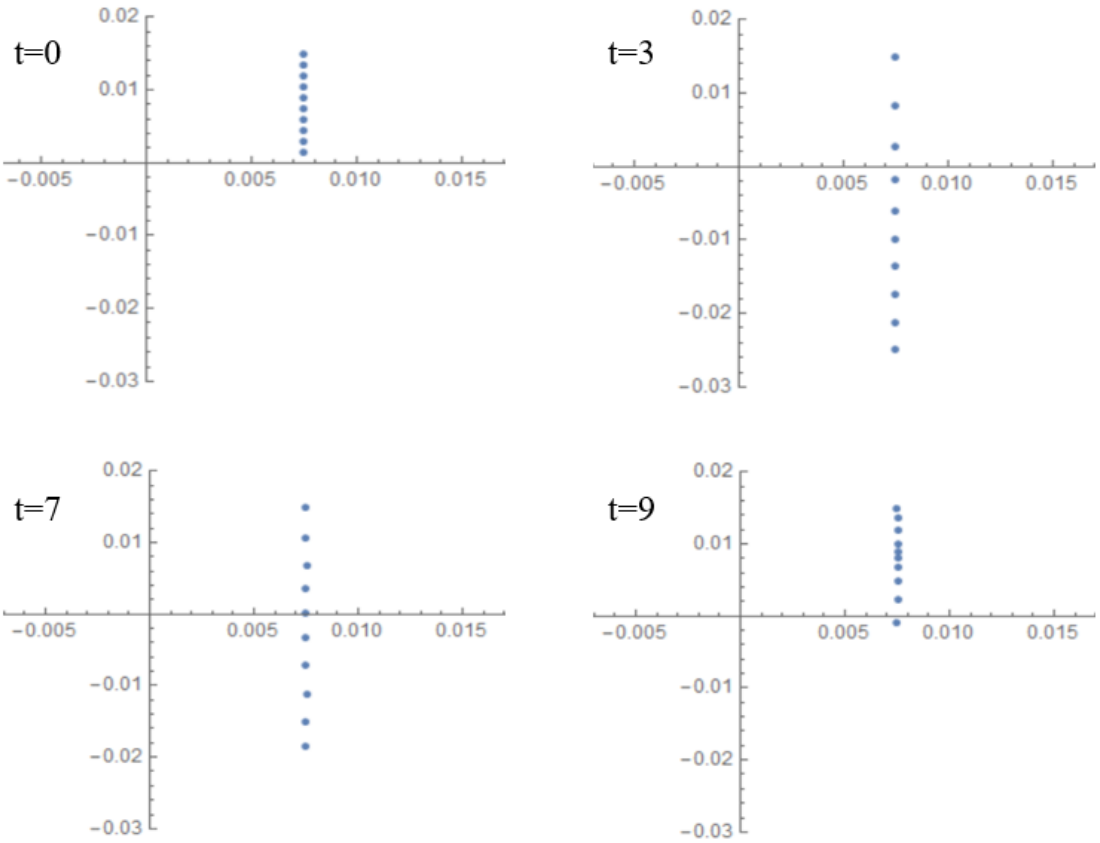

Рис. 3.1. Эволюция решения при C0=0.001, H0=0, G0=0, $\eta_q = 0$; t – время в секундах

Цилиндр в таких условиях растягивается и сжимается только вдоль своей оси. За сдвиг слоёв относительно друг друга отвечают перекрёстные, диагональные, связи решётки дискретизации. Рассмотрим решение при ненулевых коэффициентах h_α и g_α, отвечающих за эти связи. Такое решение представлено на рисунке 3.2.

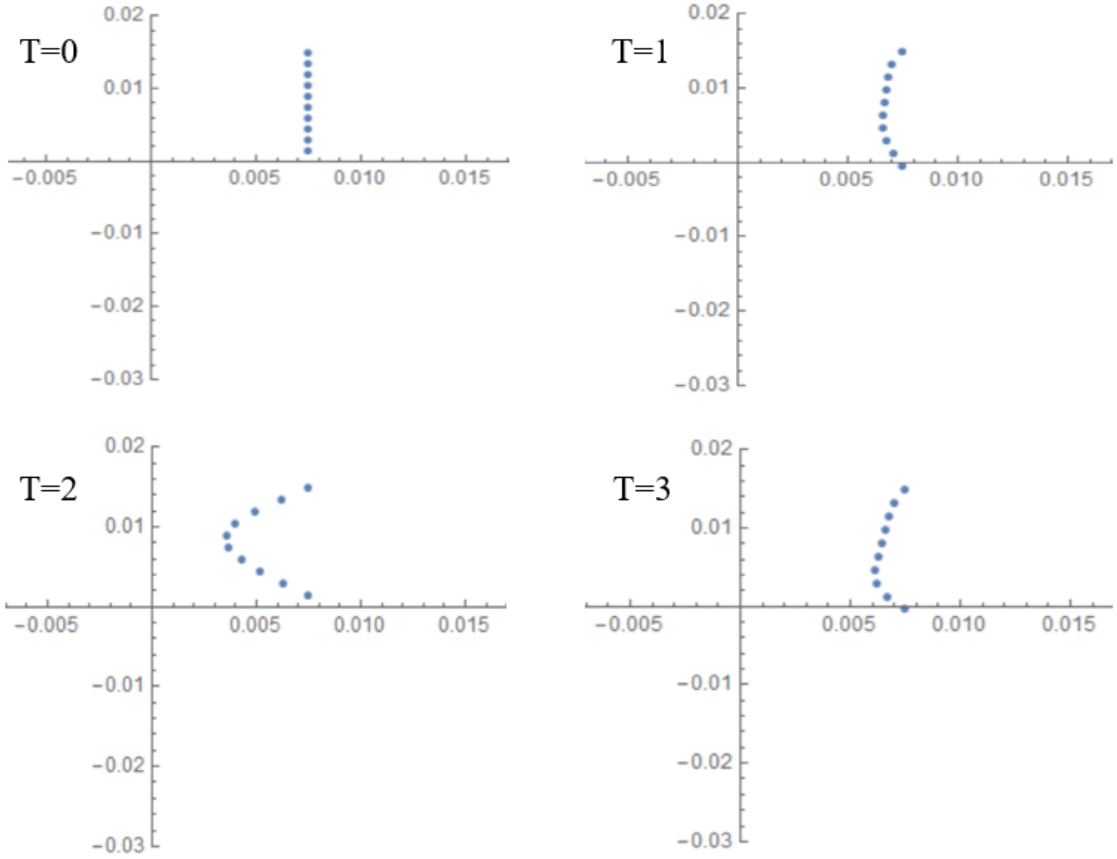

Рис. 3.2. Эволюция решения при C0=0.001, H0=0.1, G0=0.0001, $\eta_q = 0$; t – время в секундах

h_α и g_α характеризуют сдвиговые деформации цилиндра. Проекция действия сил, характеризуемых коэффициентом g_α, на ось z также равна нулю. В связи с этим, g_α также характеризует и в данном случае компенсирует растяжение цилиндра вдоль оси z.

Интересно отметить, что и в первом, и во втором расчетах цилиндр совершает колебательные движения. Это связано с тем, что в системе отсутствуют диссипативные силы, достаточные для того, чтобы затушить колебания системы достаточно быстро.

Диссипативными силами в системе является вводимая вязкость. Она компенсирует действие деформирующих сил цилиндра и постепенно приво-

дит систему в равновесие. Положим вязкость равной 0.000001 Ψ для деформаций вдоль оси r и 0.1 Ψ вдоль оси z (см. рис. 2.3). Результаты расчета при таких значениях представлены на рисунке 3.3.

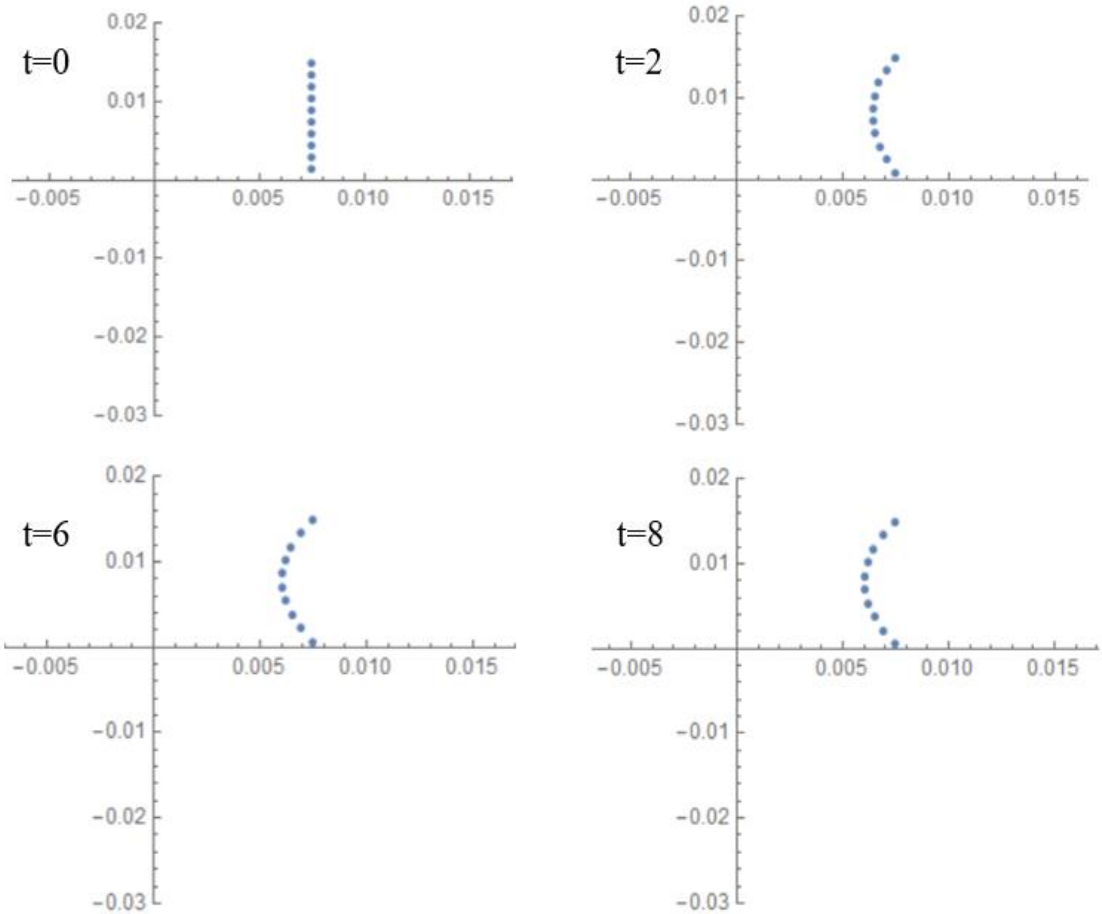

Рис. 3.3. Эволюция решения при C0=0.001, H0=0.1, G0=0.0001, $\eta_q \cdot e_r = 0.000001\Psi$; $\eta_q \cdot e_z = 0.1\Psi$; t – время в секундах

Система приходит в равновесие к моменту времени t=8. Колебания в ней затухают.

Чтобы имитировать неравномерный нагрев системы, возьмём функцию вязкости, зависящую не только от температуры, но и от номера слоя $\Psi * TNH$
.

$$TNH(q)=((\tanh(-(q-\frac{n}{2})-3)+1.05)+(\tanh((q-\frac{n}{2})-3)+1.05))*10e^{6}\ , \quad (3.1)$$

где q – номер слоя; n – количество слоёв.

На рисунке 3.4 изображено, что вязкость верхнего и нижнего краёв цилиндра возросла. Высота формирующейся шейки меньше, чем в случае с вязкостью, не зависящей от номера слоя.

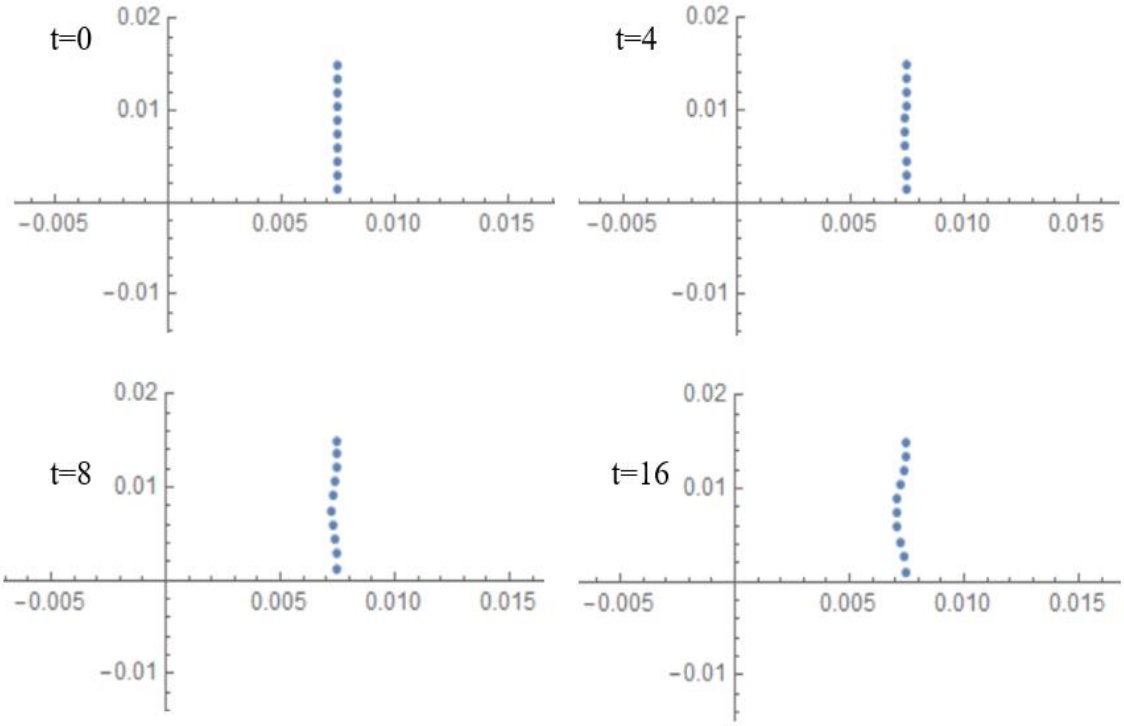

Рис. 3.4 Эволюция решения при C0=0.001, H0=0.1, G0=0.0001, $\eta_q \cdot e_r = 0.00001\Psi * TNH;\ \eta_q \cdot e_z = 0.0001\Psi * TNH;$; t – время в секундах

Таким образом изучено влияние каждого из параметров модели на результат. Варьируя данные параметры, можно сопоставлять поведение решения с экспериментальными данными. Например, с коэффициентом поверхностного натяжения материала, из которого состоит цилиндр.

3.2 Расчет коэффициента поверхностного натяжения

Поверхностное натяжение — это свойство жидких поверхностей сжиматься до минимально возможной площади. Поверхностное натяжение позволяет насекомым (например, водомеркам) плавать и скользить по поверхности воды.

Поверхностное натяжение обусловлено межмолекулярным взаимодействием на поверхности жидкости, оно и создаёт такого рода эффект на поверхности. Силы между отдельными парами молекул очень малы, поэтому при определении поверхностного натяжения мы учитываем влияние большого количества молекул на линию на поверхности.

Представим линию единичной длины, проведенную на поверхности жидкости, и подумаем о силах, действующих на молекулы в этой линии. Очевидно, что силы будут действовать во всех направлениях на поверхности, но мы будем рассматривать только те компоненты силы, которые действуют под прямым углом к линии (см. рис. 3.5).

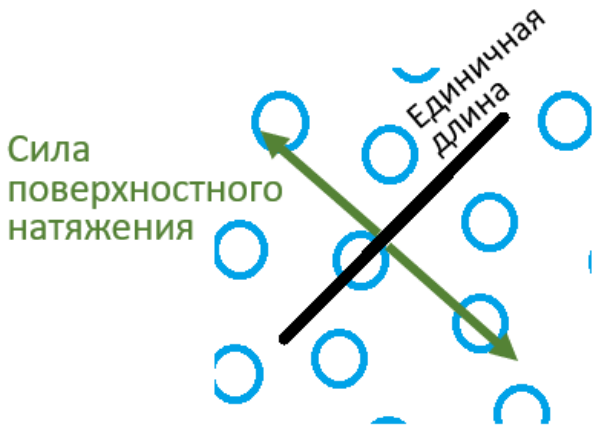

Рис. 3.5. Действие поверхностного натяжения

Сила на всей линии является суммой всех сил на отдельные молекулы. Величина силы поверхностного натяжения на поверхности жидкости определяется свойством, называемым коэффициентом поверхностного натяжения для этой жидкости.

Коэффициент поверхностного натяжения жидкости — это сила, действующая на поверхности жидкости под прямым углом к линии единичной длины на поверхности жидкости.

Коэффициент поверхностного натяжения для жидкого стекла σ_{glass} при температуре 1000-1400 градусов цельсия составляет около 0,22-0,38 Н/м, сведения взяты из работы [2].

Для расчёта поверхностного натяжения решения σ_{sol} используется формула:

$$\sigma_{sol} = \frac{\Delta Wp}{\Delta S}, \tag{3.2}$$

где ΔS - изменение площади поверхности цилиндра; ΔWp - количество энергии, затраченное на изменение площади поверхности (изменение потенциальной энергии).

Рассчитаем коэффициент поверхностного натяжения для случая C0=0.0002, G0=0.0001, H0=0.01. Для лучшей точности расчета вязкость поставим не зависимую от номера слоя, таким образом будем анализировать всю имеющуюся поверхность. В окрестности t=15.2 секунд (рис. 3.6) значение коэффициента попадает в диапазон экспериментального.

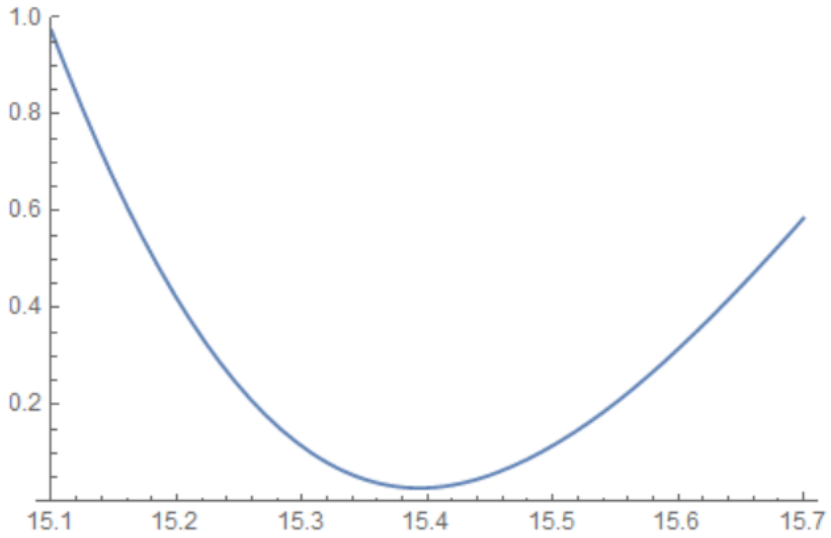

Рис. 3.6. Коэффициент поверхностного натяжения решения
при C0=0.0002, G0=0.0001, H0=0.01, $\eta_q = 0.00001\Psi$, F=50sin(t/5)

На рисунке 3.7 можно видеть эволюцию профиля цилиндра при данных параметрах модели.

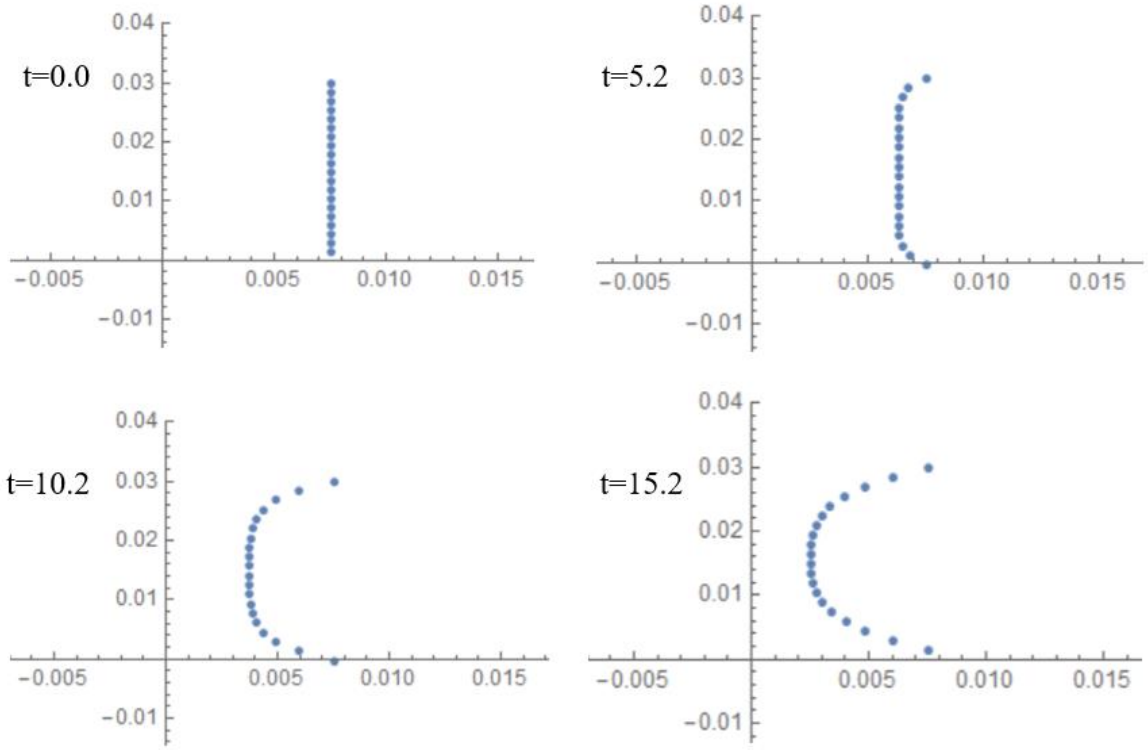

Рис. 3.7. Эволюция решения при заданных параметрах:
C0=0.0002, G0=0.0001, H0=0.01, $\eta_q = 0.00001\Psi$,
F=50sin(t/5), t - время в секундах

3.3 Сравнение с реальным процессом

Проведём визуальный сравнительный анализ поведения численного решения с реальным процессом. Поведение цилиндра на рисунке 3.8 достаточно близко соответствует поведению стекла при образовании шейки (в сравнении с видео процесса производства, упомянутом в пункте 1.2). В качестве функции зависимости вязкости от номера слоя была выбрана:

$$TNH_1 = \left(\tanh\left[-\left(q - \frac{n}{2} \right) - 7 \right] + 1.5 + \tanh\left[\left(q - \frac{n}{2} \right) - 7 \right] + 1.5 \right) * 10, \quad (3.3)$$

где q – номер слоя; n – количество слоёв.

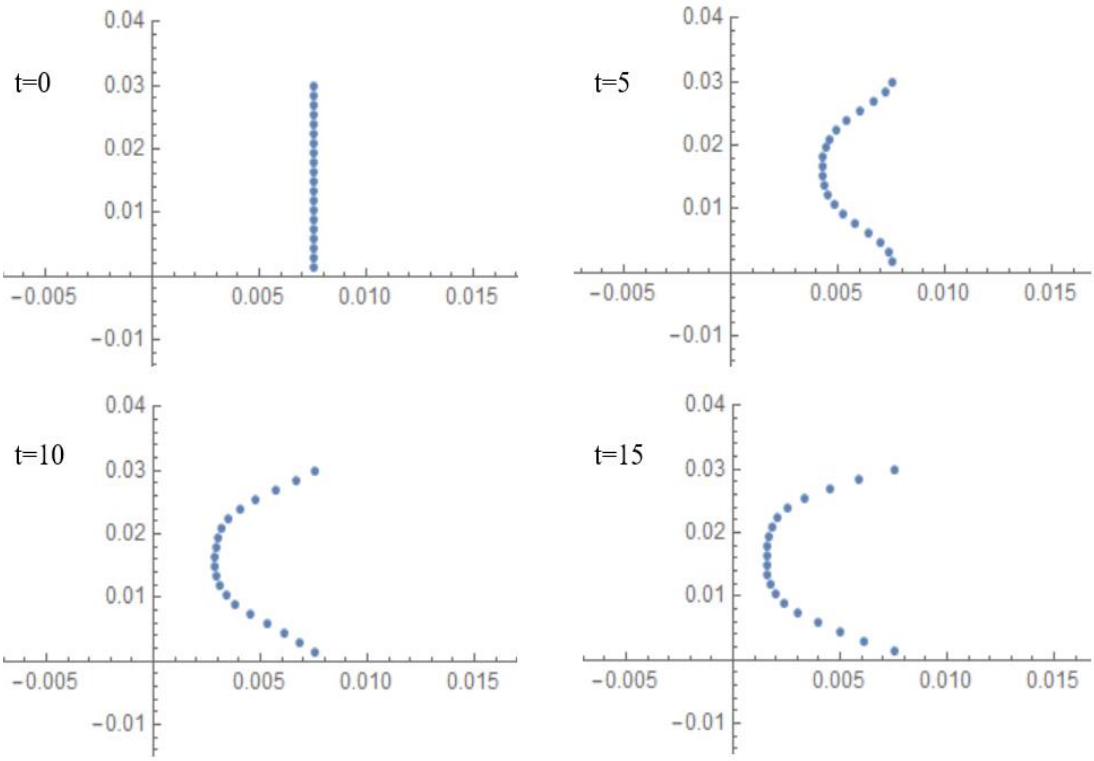

Рис. 3.8. Эволюция решения при заданных параметрах:
C0=0.0002, G0=0.0001* TNH_1, H0=0.01* TNH_1, $\eta_q = 0.00001\Psi$,
F=100sin(t/5), t - время в секундах

Рисунок 3.9 также позволяет провести визуальный сравнительный анализ формы и пропорций шейки, образовавшейся у цилиндра.

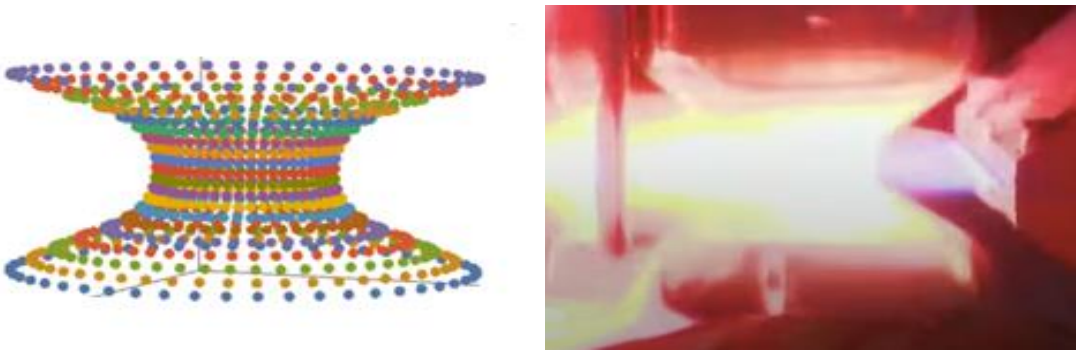

Рис. 3.9. Сравнение формы шейки,
полученной с помощью разработанной модели
и шейки, образовавшейся в реальном процессе

Форма шейки выглядит достаточно пропорционально эталонной форме, однако процесс образования происходит заметно медленнее. По результатам расчёта для образования такого вида шейки требуется около 15 секунд, в то время как на видео этот процесс занимает около 5 секунд. Однако нам неизвестны ни точные размеры флаконов с видео, ни вид силы, прикладываемый к нижнему краю цилиндра, ни тип стекла, из которого изготовлен цилиндр.

Исходя из вышеперечисленного будем считать, что модель работает достаточно корректно, хоть и требует отдельного исследования на предмет оптимизации и эффективного подбора параметров под конкретные нужды.

Следующая глава посвящена теоретическому описанию оптимизирующего метода, достойного на взгляд автора для этих целей.

ГЛАВА 4. МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ РАЗРАБОТАННОЙ МОДЕЛИ

4.1 Описание проблемы

Полученная модель поведения стеклянной трубки имеет несколько входных параметров. Имеется два направления развития и использования данной модели.

1. Зависимость вязкости от температуры, а также коэффициенты жёсткости модели являются эмпирическими параметрами, которые подбираются под экспериментально полученные данные о конкретном стекле.
2. Выбранная сила, с которой вытягивается цилиндр, а также её изменение во времени влияют на будущее место разрыва и могут быть подобраны в зависимости от желаемого результата.

Из этого следует, что влияние изменения параметров модели на ожидаемый результат может быть представлено как нахождение минимума на поверхности решений некой оптимизирующей функции. Соответствующую задачу с несколькими оптимизируемыми параметрами можно решать методами искусственного интеллекта.

Ниже будет описан метод, который в будущем может позволить провести качественную оптимизацию данной модели, а также расширить границу её применения.

4.2 Краткий план процесса оптимизации

Помимо самого нахождения минимума оптимизирующей функции методами искусственного интеллекта, следует провести предварительный общий анализ поведения модели в интересующих условиях.

Этапы оптимизации:

1. Определиться с объектом исследования (первое или второе направление использования модели из пункта 4.1).
2. Исследовать вид поверхности минимизирующей функции. Варьируя входные параметры модели, искать и анализировать корреляции между параметрами модели и её поведением. Обращать внимание на параметры, оказывающее наибольшее влияние.
3. Искать оптимальный набор параметров, используя методы искусственного интеллекта. Ниже будет предложен к рассмотрению генетический алгоритм, метод нахождения минимума плохо исследуемой поверхности.

4.3 Коэффициент корреляции Пирсона

Пусть есть заданный набор интересуемых параметров модели, требующих оптимизации. Для измерения влияния параметров на её поведение предлагается использовать коэффициент корреляции Пирсона [3].

Рассмотрим данные $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ состоящие из n пар входных и выходных данных. Коэффициент корреляции r_{xy} для такой выборки данных определен как:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \tag{3.4}$$

где n - размер выборки; x_i, y_i - точки в i-ой паре выборки; $\overline{x}, \overline{y}$ - средние арифметические по входным и выходным данным соответственно.

Затем мы получаем тепловую карту корреляции Пирсона, пример такой карты можно видеть на рисунке 4.1. С помощью неё можно удобно проанализировать влияние каждого из оптимизируемых параметров. Красные цвета тепловой карты указывают на положительную корреляцию (положительные значения коэффициента Пирсона), синие цвета представляют отрицательную корреляцию (отрицательные значения коэффициента Пирсона).

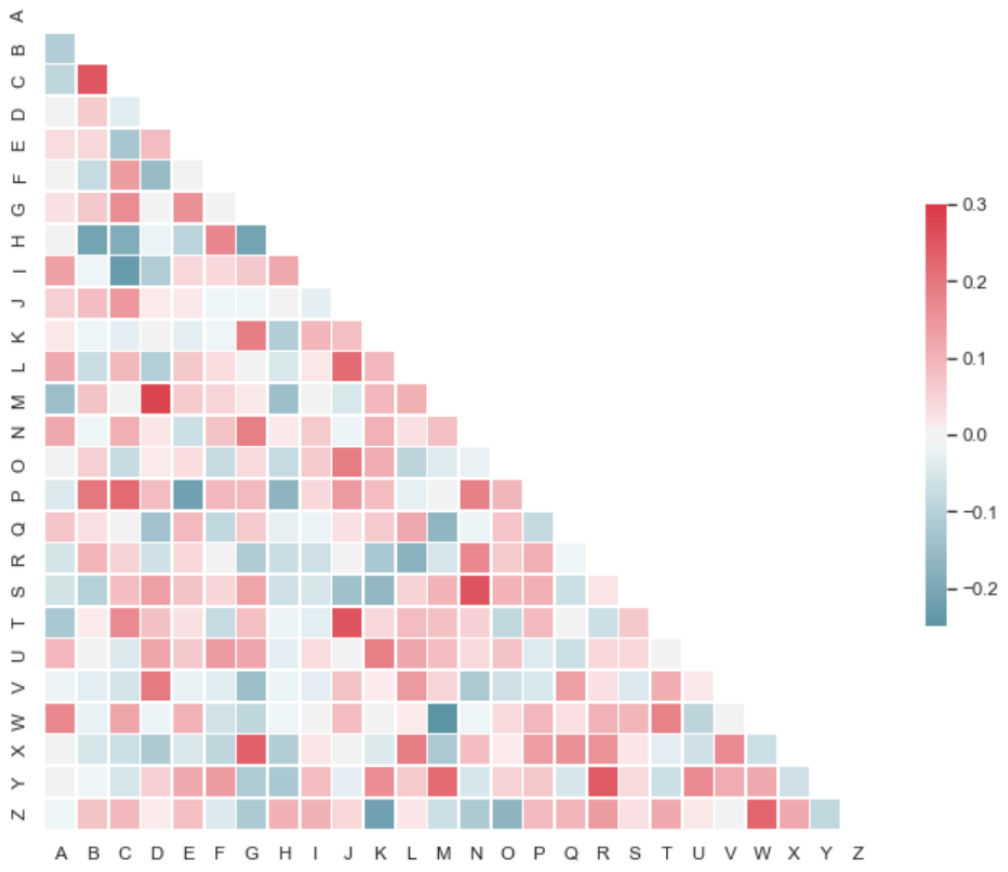

Рис. 4.1. Пример тепловой карты корреляций Пирсона,
построенной с помощью библиотеки seaborn языка Python.
A-Z - попарно исследуемые параметры

При увеличении значений положительно коррелирующих параметров выходные значения также растут, в то время как увеличение отрицательно коррелирующих параметров напротив приводит к уменьшению значения исследуемых выходных параметров модели. Чем больше абсолютное значение коэффициента Пирсона, тем большее влияние оказывают соответствующие параметры модели.

4.4 Генетический алгоритм

Для решения поставленной задачи оптимизации предлагается использовать метод искусственного интеллекта, который называется эволюционный или генетический алгоритм.

Описание метода

Данный алгоритм использует концепцию эволюционной биологии для поиска глобального минимума в задаче оптимизации.

Основные идеи алгоритма основаны на теории эволюции Чарльза Дарвина, этапы работы алгоритма можно видеть на рисунке 4.2.

Рис. 4.2. Этапы работы генетического алгоритма

Алгоритм принимает на вход начальную популяцию («нулевое» поколение) параметров-кандидатов, которые оцениваются сформулированной функцией оценки. Последующие поколения (точек, числовых или иных значений,

в нашем случае параметров модели) затем генерируются из предыдущего поколения с помощью таких приёмов, как отбор, скрещивание и мутация. Рассмотрим данные приёмы на нашем примере.

Параметры в задаче оптимизации изначально могут принимать значение заданного (заранее определенного) диапазона. В соответствии с теорией эволюции у каждого человека (индивидуума) есть набор генов: в нашем случае в качестве «гена» принимаем входные параметры модели. В первоначальной и каждой последующей популяции есть индивиды с высокими показателями функции оценки, «альфа-индивиды».

Отбор означает сохранение лучших особей из поколения в поколение. Другими словами, у нас может быть индивид-родитель «1» из предыдущего поколения и индивид-родитель «2» из предыдущего поколения (и это значения переменных в задаче оптимизации), которые благодаря отбору попадают в следующее поколение только потому, что они хорошо себя показали в предыдущем поколении. Также они могут быть использованы для скрещивания.

При скрещивании выбираются и сохраняются одинаковыми сходства между различными родительскими генами для создания дочерних индивидов, которые будут частью следующего поколения.

Еще один приём генетического алгоритма называется мутацией: случайно выбирается индивид из текущего поколения, и некоторые его гены (параметры) слегка видоизменяются в зависимости от выбранной функции мутации. Таким образом мы создаем ребенка для следующего поколения на основе мутации.

Обзор алгоритма

Для реализации генетического алгоритма предлагается воспользоваться фреймворком для эволюционных алгоритмов DEAP языка Python [14]. Python имеет большое количество библиотек, облегчающих анализ и визуализацию

данных, поэтому является эффективным инструментом для задач оптимизации, связанной с обработкой данных. Предложенный модуль DEAP имеет открытый исходный код и имеет достаточно небольшой порог вхождения.

У DEAP достаточно много преимуществ, например, поддержка ряда эволюционных алгоритмов и содержание большинства основных функций, необходимых для эволюционных вычислений. Он может использоваться с другими библиотеками Python для обработки данных и машинного обучения и является гибким для вычислений на GPU. Другими словами, DEAP позволяет самостоятельно создать необходимый генетический алгоритм, используя существующие модули.

Ключевым моментом любого применения алгоритма оптимизации/машинного обучения является определение верной функции оценки.

Существует возможность изменить её в зависимости от оптимизации желаемого поведения модели. Например, мы можем найти такие параметры коэффициентов жёсткости модели, при которых коэффициент поверхностного натяжения материала совпадает с экспериментально измеренным или такую функцию действия силы, при которой разрыв цилиндра происходит в желаемом месте. Эволюционные алгоритмы, созданные при помощи DEAP, принимают на вход любую функцию оценивания и этим достаточно гибки.

Инструмент Hall_Of_fame, встроенный в DEAP, помогает определить фронт Парето, в который вошли лучшие индивиды всех поколений, отсортированные по значению оценивающей функции. Таким образом, мы можем определить лучших из лучших после всего процесса эволюции.

Пару слов хочется сказать о задачах эволюционной оптимизации в целом. Некоторые модели требуют значительного времени вычислений для получения выходных значений. Для того, чтобы генетический алгоритм был эф-

фективен, в среднем потребуется сгенерировать 40 популяций по 100 индивидов [1] в каждой, что может занять большое количество времени. Применение эволюционных алгоритмов для оптимизации таких моделей потребует включения в весь оптимизационных процесс дополнительного шага. Этим шагом является «прогнозирование» выходных значений модели. Метод прогнозирования стоит выбирать исходя из вида поверхности функции оптимизации, им может быть как обычный метод линейной интерполяции, так и более сложные методы машинного обучения, решающие задачу регрессии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В течении работы была разработана дискретная модель поведения вязкого толстостенного цилиндра. По результатам её исследования, проделанного в третьей главе, можно сделать несколько выводов:

- Модель имеет несколько входных параметров, оказывающих различное влияние на поведение её решений. Варьируя данные параметры возможно настраивать поведение цилиндра под экспериментальные данные, таким образом получая решения для разных видов материалов и геометрии моделируемого тела.
- Поведение решений модели соответствуют физическим представлениям об изучаемом процессе, отсюда можно сделать вывод, что энергетическое описание аппроксимирующей системы частиц близко соответствует реальному.
- Параметры модели, подбираемые эмпирически в данной работе, желательно подбирать автоматическими методами. Из этого соображения появилась четвёртая глава данной работы, в будущем заслуживающая и практической реализации.

В результате работы поставленные задачи были успешно выполнены. Однако появились и новые занимательные направления, открывающие возможности к последующим исследованиям:

- Оптимизация разработанной модели методами искусственного интеллекта;
- Исследование поведения стеклянной нити до момента разрыва;
- Влияние выбора функции воздействующей силы на место разрыва.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Глебов А.В., Стрикелев Д.А. Влияние размера популяции на скорость сходимости генетического алгоритма при древовидном представлении хромосом // Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

[2] Мельников И. Стекло и его свойства. Сырьевые материалы для стекловарения. Приготовление шихты // Электронный ресурс, электронная библиотека ЛибФокс, https://www.libfox.ru/, 23.05.2020

[3] Asuero A.G., Sayago A., González A.G.) The Correlation Coefficient: An Overview (2006). // Critical Reviews in Analytical Chemistry, 36(1), pp. 41–59

[4] Berg C.P., Kröger R., Rath H.J. Measurement of extensional viscosity by stretching large liquid bridges in microgravity (1994). // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 55, pp. 307–319.

[5] Bessemer H. British patent no. 12,101 (issued: Sept. 22, 1848)

[6] Chen Y.J., Steen P.H. Dynamics of inviscid capillary breakup: collapse and pinchoff of a film bridge (1997). // J. Fluid Mech. 341, pp. 245–267.

[7] Day R.F., Hinch E.J., Lister J.R. Self-similar capillary pinchoff of an inviscid fluid (1998).

[8] De Wynne J., Ockendon J.R., Wilmott P. A systematic derivation of the leading-order equations for extensional flows in slender geometries (1992). // J. Fluid Mech. 244, 323–338

[9] Dewynne J., Ockendon J.R., Wilmott P. On a mathematical model for fiber tapering (1989). // SIAM J. Appl. Maths 49, pp. 983–990.

[10] Eggers J. Drop formation: an overview (2005). // Z. Angew. Math. Mech. 85, pp. 400–410.

[11] Eggers J. Universal pinching of 3D axisymmetric free surface flow (1993). // Phys. Rev. Lett. 71, pp. 3458–3460.

[12] Eggers J., Villermaux E. Physics of liquid jets (2008). // Rep. Prog. Phys. 71, 036601.

[13] Eggers J., Villermaux E. Physics of liquid jets (2008). // Rep. Prog. Phys. 71, 036601.

[14] Fontelos M.A., Li J. On the evolution and rupture of filaments in giesekus and fene (2004) // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 118(1), pp. 1-16

[15] Fortin F.-A., De Rainville F.M., Gardner M.-A., Parizeau M., Gagné C., DEAP: A Python Framework for Evolutionary Algorithms, // EvoSoft Workshop, Companion proc. of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO 2012), July 07-11 2012

[16] Fulcher, G. S. Analysis of recent measurements of the viscosity of glasses (1925). // Journal of the American Ceramic Society, 8(6), 339–355

[17] Huang H., Miura R.M., Ireland W., Puil E. Heat-induced stretching of a glass tube under tension: application to glass microelectrodes (2003). // SIAM J. Appl. Maths 63, pp. 1499–1519.

[18] Huang H., Wylie J.J., Miura R.M., Howell, P.D. On the formation of glass microelectrodes (2007). // SIAM J. Appl. Maths 67, pp. 630–666.

[19] Kaye A. Convective coordinates and elongational flow (1991). // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 40, pp. 55–77.

[20] Matovich M.A., Pearson J.R.A. Spinning a molten threadline (1969). // Ind. Engng Chem. Fundam. 8, pp. 512–520.

[21] Matta J.E., Titus R.P. Liquid stretching using a falling cylinder (1990). // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 35, pp. 215–229.

[22] Nascimento M. Brief history of the flat glass patent – Sixty years of the float process (September 2014) // World Patent Information. 38: pp. 50–56

[23] Olagunju D.O.A. 1-D theory for extensional deformation of a viscoelastic filament under exponential stretching (1999). // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 87, pp. 27–46.

[24] Papageorgiou D.T. On the breakup of viscous liquid threads (1995). // Phys. Fluids 7, pp. 1529–1544.

[25] Pilkington L.A.B. Review Lecture. The Float Glass Process // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences: journal. — The Royal Society, 1969., Vol. 314, no. 1516., pp. 1-25

[26] Rasmussen S.C., How Glass Changed the World. The History and Chemistry of Glass from Antiquity to the 13th Century // SpringerBriefs in Molecular Science: History of Chemistry, Springer, Heidelberg, 2012

[27] Rayleigh L. On the instability of jets (1879). // Proc. R. Soc. Lond. 10, pp. 4–9.

[28] Renardy M. A numerical study of the asymptotic evolution and breakup of Newtonian and viscoelastic jets (1995). // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 59, pp. 267–282.

[29] Renardy M. Self-similar breakup of non-Newtonian liquid jets (2004). // In Rheology Reviews (ed. D. M. Binding & K. Walters), pp. 171–196. British Society of Rheology.

[30] Renardy M. Similarity solutions for jet breakup for various models of viscoelastic fluids (2002). // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 104, pp. 65–74.

[31] Renardy M. Some comments on the surface-tension driven break-up (or the lack of it) of viscoelastic jets (1994). // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 51, pp. 97–107.

[32] Sridhar T., Tirtaatmadja V., Nguyenand D.A., Gupta R.K. Measurement of extensional viscosity of polymer solutions (1991). // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 40, pp. 271–280.

[33] Stokes Y.M., Tuck E.O., Schwartz L.W. Extensional fall of a very viscous fluid drop (2000). // Q. J. Mech. Appl. Maths 53, pp. 565–582.

[34] Stokes Y.M., Tuck, E.O. The role of inertia in extensional fall of a viscous drop (2004). // J. Fluid Mech. 498, pp. 205–225.

[35] Wilkes E.D., Phillips S.D., Basaran O.A. Computational and experimental analysis of dynamics of drop formation (1999). // Phys. Fluids 11, pp. 3577–3598.

[36] Wilson S.D.R. The slow dripping of a viscous fluid (1988). // J. Fluid Mech. 190, pp. 561–570.

[37] Wylie J.J., Huang H. Extensional flows with viscous heating (2007). // J. Fluid Mech. 571, pp. 359–370.

[38] Yao M., McKinley G.H. Numerical simulation of extensional deformations of viscous liquid bridges in filament stretching devices (1998). // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 49, pp. 47–88.