

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ,  
д.ф.-м.н., доцент, чл.-корр. РАН  
\_\_\_\_\_ А. М. Кривцов  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

### **Уравнения механики и электродинамики в случае подвижной точки наблюдения**

по направлению подготовки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

направленность

01.03.03\_01 Механика и математическое моделирование сред с микроструктурой

Выполнил  
студент гр. 5030103/90101

С. А. Быкова

Руководитель  
профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н., доцент

Е. А. Иванова

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Быковой Софье Андреевне, гр. 5030103/90101

1. Тема работы: Уравнения механики и электродинамики в случае подвижной точки наблюдения
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации по теме работы, основные балансовые соотношения (уравнение баланса количества движения, уравнение баланса момента количества движения), уравнения Максвелла
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): сравнение интегральной формы уравнений механики сплошных сред и интегральной формы уравнений Максвелла; континуум Коссера, основанный только на вращательных степенях свободы, математическое описание которого сводится к уравнениям Максвелла в неподвижных средах; континуум Коссера, обладающий как вращательными, так и трансляционными степенями свободы, в случае материального описания, пространственного описания с неподвижной точкой наблюдения и пространственного описания с подвижной точкой наблюдения; сравнение полученных уравнений континуума Коссера с уравнениями Максвелла в подвижных средах; сравнение определяющих уравнений континуума Коссера с уравнениями Минковского в подвижных средах.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ Е. А. Иванова, профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н., доцент

Задание принял к исполнению 27.02.2023

Студент \_\_\_\_\_ С. А. Быкова

## РЕФЕРАТ

На 73 с., 3 рисунка, 8 таблиц

БАЛАНСОВЫЕ УРАВНЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА, ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ, ПОДВИЖНАЯ ТОЧКА НАБЛЮДЕНИЯ, КОНТИНУУМ КОССЕРА, ДВИЖУЩИЕСЯ СРЕДЫ, ОПЕРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ, УРАВНЕНИЯ ГЕРЦА, УРАВНЕНИЯ МИНКОВСКОГО

Тема выпускной квалификационной работы: «Уравнения механики и электродинамики в случае подвижной точки наблюдения».

Данная работа посвящена исследованию уравнений механики и электродинамики в подвижных средах. Уравнения получены в материальном описании, пространственном описании с неподвижной точкой наблюдения и пространственном описании с подвижной точкой наблюдения. Проводится сравнение уравнений в интегральной и локальной форме. Предложено обобщение механической модели электромагнитного поля на случай подвижных сред путем добавления трансляционных степеней свободы. В рамках данной модели получены дифференциальные уравнения, совпадающие с уравнениями Максвелла и законами Гаусса, получены определяющие уравнения.

## ABSTRACT

73 pages, 3 figures, 8 tables

KEYWORDS: BALANCE EQUATIONS, MAXWELL'S EQUATIONS, SPATIAL DESCRIPTION, MOVING OBSERVATION POINT, COSSERAT CONTINUUM, MOVING CONTINUUM, CONSTITUTIVE RELATIONS, HERTZ EQUATIONS, MINKOVSKI RELATIONS

The subject of the graduate qualification work is «The equations of mechanics and electrodynamics in the case of the moving observation point».

The given work is devoted to the study of equations of mechanics and electrodynamics in a moving continuum. The equations are derived in the material description, the spatial description with a fixed observation point and the spatial description with a moving observation point. The equations are compared in the integral and differential forms. In this paper we propose the generalization of the mechanical model of electromagnetic field in the case of a moving continuum by adding translational degrees of freedom. Differential equations coinciding with Maxwell's equations and Gauss's laws are derived within this model and the constitutive equations are obtained.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ.....	8
1.1. Введение к первой главе.....	8
1.2. Сравнение интегральной формы уравнений механики сплошных сред и интегральной формы уравнений Максвелла .....	9
1.1.1 Уравнение баланса количества движения .....	9
1.1.2. Уравнение баланса количества движения в интегральной форме, аналогичной электродинамике .....	11
1.1.3. Уравнение баланса кинетического момента .....	13
1.1.4. Уравнение баланса кинетического момента в интегральной форме, аналогичной уравнениям электродинамики.....	14
1.1.5. Первое уравнение Максвелла .....	17
1.1.6. Первое уравнение Максвелла в интегральной форме, аналогичной механике.....	18
1.1.7. Второе уравнение Максвелла .....	19
1.1.8. Второе уравнение Максвелла в интегральной форме, аналогичной механике.....	20
1.1.9. Уравнения Гаусса.....	21
1.1.10. Обсуждение результатов .....	22
1.1.11. Способы сопоставления величин .....	24
1.3. Заключение к первой главе .....	29
ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В МАТЕРИАЛЬНОМ И ПРОСТРАНСТВЕННОМ ОПИСАНИЯХ.....	32
2.1. Введение ко второй главе.....	32
2.2. Понятие полной и материальной производной в механике .....	35
2.3. Материальное описание .....	37
2.3.1. Уравнение баланса количества движения в материальном описании .....	37
2.3.2. Уравнение баланса кинетического момента в материальном описании.....	43
2.4. Пространственное описание с неподвижной точкой наблюдения .....	44

2.4.1. Уравнение баланса количества движения в пространственном описании.....	44
2.4.2. Уравнение баланса кинетического момента в пространственном описании.....	47
2.5. Пространственное описание с подвижной точкой наблюдения .....	48
2.5.1. Уравнение баланса количества движения .....	48
2.5.2. Уравнение баланса кинетического момента .....	49
2.6. Уравнения Максвелла в пространственном описании с подвижной точкой наблюдения .....	50
2.7. Сравнение уравнений Максвелла с уравнениями Герца для подвижных сред .....	53
<b>ГЛАВА 3. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕД</b> .....	<b>55</b>
3.1. Континуум Коссера, основанный только на вращательных степенях свободы, математическое описание которого сводится к уравнениям Максвелла в неподвижных средах .....	55
3.1.1. Инерционные характеристики и динамические структуры континуума Коссера.....	55
3.1.2. Сравнение уравнений континуума Коссера с уравнениями Максвелла в неподвижных средах. Определяющие уравнения .....	57
3.2. Континуум Коссера, обладающий как вращательными, так и трансляционными степенями свободы, математическое описание которого сводится к уравнениям Максвелла в подвижных средах.....	58
3.2.1. Инерционные характеристики и динамические структуры континуума Коссера.....	58
3.2.2. Уравнение, связывающее тензор деформаций и угловую скорость..	60
3.2.3. Уравнение баланса кинетического момента .....	63
3.2.4. Сравнение полученных уравнений континуума Коссера с уравнениями Максвелла в подвижных средах.....	66
3.2.5. Сравнение полученных определяющих уравнений в терминах электродинамических величин с уравнениями Лоренца и Минковского...	68
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	<b>71</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	<b>72</b>

## ВВЕДЕНИЕ

До начала XX века все физические процессы описывались механическими моделями, основанными на представлении эфира как субстанции, заполняющей пространство и реализующей взаимодействия между материальными телами [19]. В XIX веке механические модели играли важную роль в построении физических теорий. Основываясь на данных моделях, ученые XIX века (Коши, Грин, Стокс, Навье, Гаусс, Максвелл, Френель и др.) создавали электродинамику, которая остается актуальной и значимой в настоящее время. В конце XX и начале XXI веков возрождается интерес к механическим моделям физических процессов, использующим механику сплошной среды для описания электромеханических, магнитомеханических и электромагнитных эффектов. Были созданы континуальные модели, основанные на трансляционных степенях свободы [18], континуальные модели, основанные на вращательных степенях свободы [2, 15], континуальные модели с микроструктурой, основанные на вращательных степенях свободы [2], двухкомпонентные континуальные модели [17]. Рассмотрение механических аналогий электродинамических величин и построение механических моделей электромагнитных процессов может быть полезно для дальнейшего научного прогресса и модификации уравнений Максвелла для описания электромагнитных процессов в микромире.

Данная работа продолжает исследования, проведенные в работах [13-15]. В этих работах авторы развивают континуальные модели Коссера, предлагают механические аналогии физических величин. В работе [12] вводится понятие подвижной точки наблюдения и обобщается понятие материальной производной, в работах [8, 11, 12] описываются материальное описание и пространственное описание с неподвижной и с подвижной точкой наблюдения.

Основной целью данной работы является получение уравнений механики, которые могут быть применены для описания движущихся сред в

электродинамике. Для достижения поставленной цели в ходе работы будут решены следующие задачи:

1. Сравнить интегральные формы уравнений механики сплошных сред и интегральные формы уравнений Максвелла.
2. Получить уравнения механики и электродинамики в случае материального описания, пространственного описания с неподвижной точкой наблюдения и пространственного описания с подвижной точкой наблюдения.
3. Изучить континуум Коссера, основанный только на вращательных степенях свободы, математическое описание которого сводится к уравнениям Максвелла в неподвижных средах.
4. Обобщить данную модель на случай подвижных сред с помощью добавления трансляционных скоростей.
5. Сравнить полученные уравнения континуума Коссера с уравнениями Максвелла в подвижных средах.
6. Сравнить полученные определяющие уравнения континуума Коссера с уравнениями Минковского в подвижных средах.

# ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

## 1.1. Введение к первой главе

Известно, что в механике в трехмерной теории интегральные балансовые уравнения формулируются: скорость изменения свойства (количества движения, кинетического момента) равняется сумме внешних воздействий, действующих на замкнутую поверхность. Количество движения, кинетический момент и энергия определяется как интегралы по объёму, объёмные силы определяются как интеграл по объёму, поверхностные силы определяются как интеграл по поверхности. Поверхностные интегралы с помощью теоремы о дивергенции преобразуются в объёмные интегралы. По свойству аддитивности интегральные уравнения сводятся к локальным уравнениям.

Напротив, в электродинамике рассматривается поверхность, которая опирается на контур, то есть поверхность разомкнута. Вычисляется производная по времени от потока, проходящего сквозь поверхность. Поток равен циркуляции по контуру. Контурный интеграл с помощью теоремы Стокса преобразуется в поверхностный интеграл и по свойству аддитивности получаются локальные уравнения.

Таким образом, в механике балансовые уравнения записываются в виде суммы объёмного и поверхностного интегралов, а в электродинамике интегральные уравнения (уравнения Максвелла) записываются в виде суммы поверхностного и контурного интегралов. То есть интегральные уравнения имеют различную форму. Однако, если механическим переменным сопоставить электродинамические переменные, то локальные уравнения механики и уравнения Максвелла можно сопоставить одно другому. Возникает вопрос: можно ли сопоставить уравнения механики и электродинамики в интегральной форме? То есть, можно ли уравнения механики записать в интегральной форме,

аналогичной уравнениям электродинамики, а уравнения электродинамики записать в форме, аналогичной уравнениям механики?

Цель первой части исследования состоит в том, чтобы ответить на вопрос о возможности сопоставления уравнений Максвелла и уравнений механики конкретно в интегральной форме, поскольку традиционно интегральная форма записи уравнений Максвелла и уравнений механики разная.

В настоящей главе рассматриваются уравнения механики и электродинамики относительно неподвижной системы отсчета.

## **1.2. Сравнение интегральной формы уравнений механики сплошных сред и интегральной формы уравнений Максвелла**

### **1.1.1 Уравнение баланса количества движения**

Выбирается произвольный объем в пространстве и окружается поверхностью. Исследуется действие оставшейся континуальной среды на данный объем.

Вводится количество движения:

$$\mathbf{K}_1 = \int_V \rho \mathbf{K}_1 dV, \quad (1.1)$$

где массовая плотность количества движения  $\rho \mathbf{K}_1 = \rho \mathbf{v}$ , плотность  $\rho = const$  и объем  $V = const$ .

Формулируется первый фундаментальный закон механики (уравнение баланса количества движения в интегральной форме для произвольного материального тела, состоящего из материальных объемов): скорость изменения количества движения  $\rho \mathbf{K}_1$  тела равна интегральной сумме внешних объемных  $\mathbf{f}$  и внешних поверхностных сил  $\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}$ , действующих на тело, и описывается формулой:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{K}_1 dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} dS, \quad (1.2)$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  – тензор силовых напряжений Коши,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к замкнутой поверхности  $S$  элементарного объема  $V$ .

Последний интеграл формулы (1.2) преобразуется к объемному интегралу по теореме о дивергенции (теорема Остроградского-Гаусса):

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV. \quad (1.3)$$

Здесь стоит отметить, что формула Остроградского-Гаусса (1.3) справедлива только для замкнутой поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем [6].

Далее равенство (1.3) подставляется в балансовое уравнение (1.2) и используется свойство аддитивности интегралов:

$$\int_V \left( \rho \frac{d\mathbf{K}_1}{dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \right) dV = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) выполняется для произвольного материального тела, состоящего из материальных объемов, и характеризует следующее: интегрирование по произвольному геометрическому объему равняется нулю. Тогда подынтегральное выражение также должно равняться нулю. Иными словами, стягивая объем к бесконечно малому объему, можно перейти к локальной форме балансового уравнения (1.2).

Приходим к уравнению баланса количества движения в локальной форме:

$$\rho \frac{d\mathbf{K}_1}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}. \quad (1.5)$$

### 1.1.2. Уравнение баланса количества движения в интегральной форме, аналогичной электродинамике

Для того, чтобы вывести уравнение баланса количества движения в интегральной форме, аналогичной интегральным уравнениям электродинамики, будет осуществлен переход от локального уравнения количества движения (1.5) к интегральному уравнению.

Необходимо представить тензор напряжений в виде антисимметричного тензора:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{E} \times \mathbf{T}, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{T}$  – сопутствующий вектор тензора силовых напряжений,  $\mathbf{E}$  – единичный тензор. Благодаря такому представлению тензора дивергенция от равенства (1.6) преобразуется в ротор от сопутствующего вектора (только векторному инварианту антисимметричного тензора, а не любого, можно сопоставить вектор):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{T}) = \nabla \times \mathbf{T}. \quad (1.7)$$

Равенство (1.7) подставляется в уравнение баланса количества движения в локальной форме (1.5):

$$\rho \frac{d\mathbf{K}_1}{dt} = \nabla \times \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}. \quad (1.8)$$

Уравнение проецируется на нормаль  $\mathbf{n}$  и интегрируется по поверхности:

$$\frac{d}{dt} \int_S \rho \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.9)$$

К последнему слагаемому (1.9) применяется теорема Стокса:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l \mathbf{T} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.10)$$

где  $\mathbf{l}$  – единичный вектор касательной к незамкнутой поверхности  $S$ , ограниченную контуром  $l$ . Здесь также подчеркивается, что теорема Стокса применима только при рассмотрении двусторонней незамкнутой поверхности.

Слагаемое (1.10) подставляется в (1.9), откуда следует уравнения баланса количества движения в интегральной форме через поверхностный и контурный интегралы:

$$\frac{d}{dt} \int_S \rho \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_l \mathbf{T} \cdot \mathbf{l} dl, \quad (1.11)$$

В таблице (1.1) приведены полученные уравнения для двух случаев тензоров напряжений. В случае, когда тензор напряжений произвольный, уравнений баланса количества движения записывается только в классической интегральной форме, однако, если тензор напряжений антисимметричный, то уравнение баланса количества движения представимо в двух интегральных формах: в виде суммы интегралов по объему и интеграла по поверхности, а также в виде суммы интегралов по поверхности и интеграла по контуру.

Таблица 1.1

Уравнения баланса количества движения

Локальная форма	Интегральная форма, аналогичная электродинамике	Интегральная форма в механике
Если $\boldsymbol{\tau}$ произвольный		
$\rho \frac{d\mathbf{K}_1}{dt}$ $= \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}$	–	$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{K}_1 dV$ $= \int_V \rho \mathbf{f} dV + \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} dS$

Если $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{E} \times \mathbf{T}$		
$\rho \frac{d\mathbf{K}_1}{dt}$ $= \nabla \times \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}$	$\frac{d}{dt} \int_S \rho \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{n} dS$ $= \int_S \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_l \mathbf{T} \cdot \mathbf{l} dl$	$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{K}_1 dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV$ $+ \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{T}) dS$

### 1.1.3. Уравнение баланса кинетического момента

Уравнение баланса кинетического момента (баланса момента количества движения) в интегральной форме для произвольного тела, состоящего из материальных объемов, формулируется так: скорость изменения кинетического момента тела равна интегральной сумме моментов внешних объемных и внешних поверхностных сил, действующих на тело.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V (\rho \mathbf{K}_2 + \mathbf{r} \times \rho \mathbf{K}_1) dV = \\ \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{L}) dV + \int_S (\mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) dS. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Преобразуется подынтегральное слагаемое  $\mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau})$  выражения (1.12):

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) = -(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r} = -\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}). \quad (1.13)$$

Далее к уравнению (1.13) применяется теорема о дивергенции. Здесь также стоит отметить, что использование теоремы возможно только в случае замкнутой поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) dS = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) dV. \quad (1.14)$$

Преобразуется подинтегральное слагаемое выражения (1.14):

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau} \times \cdot (\mathbf{r} \nabla) \\ &= (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau} \times \cdot \mathbf{E} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\tau}_\times,\end{aligned}\quad (1.15)$$

где за  $\boldsymbol{\tau}_\times$  обозначен векторный инвариант тензора напряжений  $\boldsymbol{\tau}$ . Умножение тензоров в слагаемом  $\boldsymbol{\tau} \times \cdot (\mathbf{r} \nabla)$  производится по правилу: векторное умножение внутренних векторов, далее скалярное умножение внешних векторов.

Полученное слагаемое подставляется в уравнение баланса кинетического момента (1.12):

$$\int_V \left[ \rho \frac{d\mathbf{K}_2}{dt} - \rho \mathbf{L} - \boldsymbol{\tau}_\times - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{K}_1}{dt} - \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} - \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \right] dV = 0. \quad (1.16)$$

Преобразуется выражение (1.16):

$$\int_V \left[ \rho \frac{d\mathbf{K}_2}{dt} - \rho \mathbf{L} - \boldsymbol{\tau}_\times - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} \right] dV + \int_V \mathbf{r} \times \left( \rho \frac{d\mathbf{K}_1}{dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \right) dV = 0. \quad (1.17)$$

Второе интегральное слагаемое равно нулю вследствие равенства нулю уравнения баланса количества движения (1.4).

Приходим к уравнению баланса кинетического момента в локальной форме:

$$\rho \frac{d\mathbf{K}_2}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \rho \mathbf{L} + \boldsymbol{\tau}_\times. \quad (1.18)$$

#### 1.1.4. Уравнение баланса кинетического момента в интегральной форме, аналогичной уравнениям электродинамики

Вводится тензор моментных напряжений в виде антисимметричного тензора:

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E} \times \mathbf{M}, \quad (1.19)$$

где  $\mathbf{M}$  – сопутствующий вектор тензора моментных напряжений,  $\mathbf{E}$  – единичный тензор. К равенству (1.19) применяется оператор дивергенции, и оно преобразуется в ротор от сопутствующего вектора:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{M}) = \nabla \times \mathbf{M}. \quad (1.20)$$

Выражение (1.20) подставляется в уравнение баланса кинетического момента в локальной форме (1.18):

$$\rho \frac{d\mathbf{K}_2}{dt} = \nabla \times \mathbf{M} + \rho\mathbf{L} + \boldsymbol{\tau}_\times. \quad (1.21)$$

Равенство (1.21) проецируется на нормаль и интегрируется по поверхности:

$$\frac{d}{dt} \int_S \rho \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\rho\mathbf{L} + \boldsymbol{\tau}_\times) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.22)$$

К последнему слагаемому (1.22) применяется теорема Стокса:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l \mathbf{M} \cdot \mathbf{l} dl. \quad (1.23)$$

Для данного равенства справедливы те же ограничения, которые были введены выше для теоремы Стокса, применяемой для вывода баланса количества движения в интегральной форме (1.10). Итак, уравнение баланса кинетического момента в интегральной форме с использованием поверхностного и контурного интегралов имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_S \rho \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\rho\mathbf{L} + \boldsymbol{\tau}_\times) \cdot \mathbf{n} dS + \oint_l \mathbf{M} \cdot \mathbf{l} dl. \quad (1.24)$$

В таблице (1.2) приведены полученные уравнения для двух случаев тензоров моментных напряжений. Когда тензор моментных напряжений произвольный, уравнений баланса кинетического момента записывается только в классической интегральной форме. В случае, когда тензор моментных

напряжений антисимметричный, уравнение баланса кинетического момента представимо в двух интегральных формах: в виде суммы интегралов по объему и интеграла по поверхности, а также в виде суммы интегралов по поверхности и интеграла по контуру.

Таблица 1.2

Уравнения баланса кинетического момента

Локальная форма	Интегральная форма, аналогичная электродинамике	Интегральная форма в механике
Если $\boldsymbol{\mu}$ произвольный		
$\rho \frac{d\mathbf{K}_2}{dt}$ $= \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \rho \mathbf{L}$ $+ \boldsymbol{\tau}_\times$	-	$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \mathbf{K}_2 + \mathbf{r} \times \rho \mathbf{K}_1) dV$ $= \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{L}) dV$ $+ \int_S (\mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) dS$
Если $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E} \times \mathbf{M}$		
$\rho \frac{d\mathbf{K}_2}{dt}$ $= \nabla \times \mathbf{M} + \rho \mathbf{L}$ $+ \boldsymbol{\tau}_\times$	$\frac{d}{dt} \int_S \rho \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{n} dS$ $= \int_S (\rho \mathbf{L} + \boldsymbol{\tau}_\times) \cdot \mathbf{n} dS$ $+ \oint_l \mathbf{M} \cdot \mathbf{l} dl$	$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \mathbf{K}_2 + \mathbf{r} \times \rho \mathbf{K}_1) dV$ $= \int_V (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{L}) dV$ $+ \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) dS$ $+ \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{M}) dS$

### 1.1.5. Первое уравнение Максвелла

Рассматривается первое уравнение Максвелла в локальной форме: изменение вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  порождает вихревое магнитное поле  $\mathbf{H}$  ( $\mathbf{H}$  – вектор напряженности магнитного поля). Данное уравнение связывает векторы  $\mathbf{H}$  и  $\dot{\mathbf{D}}$  в одной и той же точке пространства:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \nabla \times \mathbf{H}. \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) интегрируется по поверхности и проецируется на нормаль:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.26)$$

При условии, что поверхность рассматривается незамкнутая, применяется теорема Стокса к правой части уравнения (1.26):

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l \mathbf{H} \cdot \mathbf{l} dl. \quad (1.27)$$

Интеграл уравнения (1.27) подставляется в уравнение (1.26), откуда следует первое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l \mathbf{H} \cdot \mathbf{l} dl. \quad (1.28)$$

Первое уравнение Максвелла характеризует изменение потока электрической индукции  $\mathbf{D}$ , проходящего через незамкнутую поверхность  $S$ , пропорционального циркуляции (взятой с обратным знаком) магнитного поля  $\mathbf{H}$  по замкнутому контуру  $l$ , который является границей данной поверхности.

### 1.1.6. Первое уравнение Максвелла в интегральной форме, аналогичной механике

Любой вектор может быть представлен через векторный инвариант антисимметричного тензора. Пусть вектор  $\mathbf{H}$  является сопутствующим вектором некоторого тензора  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ . Тогда в первом уравнении Максвелла в локальной форме (1.25) слагаемое правой части преобразуется к виду:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (1.29)$$

Равенство (1.29) подставляется в уравнение Максвелла:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (1.30)$$

Далее уравнение (1.30) интегрируется по объему:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{D} dV = \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV. \quad (1.31)$$

К последнему слагаемому применяется теорема о дивергенции (при условии, что изначально поверхность задается замкнутой):

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV = \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dS. \quad (1.32)$$

Первое уравнение Максвелла в интегральной форме с использованием объемного и поверхностного интегралов запишется в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{D} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dS. \quad (1.33)$$

### 1.1.7. Второе уравнение Максвелла

Второе уравнение Максвелла (уравнение Максвелла-Фарадея) в локальной форме характеризует изменение вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , которое порождает вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля), и связывает векторы  $\mathbf{E}$  и  $\dot{\mathbf{B}}$  в данной точке пространства:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (1.34)$$

Уравнение (1.34) интегрируется по поверхности и проецируется на нормаль:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.35)$$

Применим теорему Стокса к правой части уравнения (1.35), считая поверхность разомкнутой:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{l} dl. \quad (1.36)$$

Получим второе уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l \mathbf{E} \cdot \mathbf{l} dl. \quad (1.37)$$

Закон электромагнитной индукции Максвелла-Фарадея (1.37) гласит: изменение потока магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , проходящего через разомкнутую поверхность  $S$ , пропорционально циркуляции (взятой с обратным знаком) электрического поля  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру  $l$ , который является границей этой поверхности.

### 1.1.8. Второе уравнение Максвелла в интегральной форме, аналогичной механике

Аналогично, полагая  $\mathcal{E}$  сопутствующим вектором некоторого тензора  $\mathbf{E} \times \mathcal{E}$ , преобразуем слагаемое правой части второго уравнения Максвелла в локальной форме к виду:

$$\nabla \times \mathcal{E} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathcal{E}). \quad (1.38)$$

Тогда второе уравнение Максвелла в локальной форме (1.34) представимо в виде:

$$\frac{d\mathcal{B}}{dt} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathcal{E}). \quad (1.39)$$

Проинтегрируем (1.39) по объему:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{B} dV = - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathcal{E}) dV. \quad (1.40)$$

Правая часть уравнения преобразуется по теореме о дивергенции при условии, что поверхность вводится замкнутой:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathcal{E}) dV = \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathcal{E}) dS. \quad (1.41)$$

Тогда второе уравнение Максвелла в интегральной форме с использованием объемного интеграла и поверхностного интегралов имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathcal{B} dV = - \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathcal{E}) dS. \quad (1.42)$$

### 1.1.9. Уравнения Гаусса

Уравнение Гаусса в локальной форме для электрического поля описывает заряд как источник электрической индукции, а уравнение Гаусса для магнитного поля указывает на отсутствие магнитных зарядов:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.43)$$

где  $q$  – заряд, приходящийся на единицу объема (объемная плотность заряда).

Интегрирование по поверхности и проецирование на нормаль приводит уравнения (1.43) к классическому интегральному виду:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q, \quad \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (1.44)$$

где  $Q$  – заряд.

Ниже в таблице (1.3) приведены полученные формулы. Уравнения Максвелла всегда могут быть представлены в двух интегральных формах: через интеграл по поверхности и интеграл по контуру, а также в виде интеграла по объему и интеграла по поверхности. Уравнения Гаусса получаются одинаковыми в интегральной форме, аналогичной механике, и в классической форме.

## Уравнения Максвелла

Локальная форма	Интегральная форма в электродинамике	Интегральная форма, аналогичная механике
$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \nabla \times \mathbf{H}$	$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$	$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{D} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dS$
$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\nabla \times \mathbf{\epsilon}$	$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\oint_l \mathbf{\epsilon} \cdot d\mathbf{l}$	$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{B} dV = -\int_S \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{\epsilon}) dS$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = q$	$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q$	
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$	

## 1.1.10. Обсуждение результатов

Получено, что каждому локальному дифференциальному уравнению соответствуют две разных формы интегральных уравнений. Дифференциальные уравнения характеризуют изменения свойств величины в некоторой точке и ее малой окрестности, а интегральные уравнения характеризуют изменения на поверхности / в объеме, то есть во множестве точек.

При записи интегральных уравнений, говорят, что первый и второй фундаментальные законы справедливы для произвольного тела. В качестве такого тела можно рассматривать любой объём (большой, маленький или суженный в точку), выделенный в сплошной среде. Именно этим предположением пользуются при переходе от интегральных уравнений к локальным. Вместо интегрального уравнения, записанного для континуального тела, который верен в любой точке, можно рассмотреть предел сумм, то есть

рассматривать дискретное тело, а можно рассматривать одну частицу, или устремить объём к нулю и получить локальные уравнения.

Для уравнений механики именно интегральные уравнения по объёму (не по контуру) будут исходными, потому что именно так формулируются фундаментальные законы динамики. Интегральные уравнения могут быть записаны по-разному в зависимости от того, как и по чему производится интегрирование. Это в свою очередь связано со способом проведения опыта: в электродинамике обычно измерения производят на замкнутом контуре (проводе) и плоской поверхности, а в механике – на замкнутой поверхности, ограничивающей объём.

Тогда можно ли интегральные уравнения механики, записанные с помощью контурного и поверхностного интегралов, трактовать как фундаментальные законы? Полученные уравнения (1.11 и 1.23) характеризуют не все количество движения (кинетический момент), распределённое по поверхности, а лишь его проекцию на нормаль. То есть, количество движения определяется скоростью движения в направлении по нормали, а влияние движения в касательной плоскости пренебрегается. В интегральных уравнениях электродинамики составляющая по касательной плоскости также отсутствует.

Считаем, что получена некоторая форма записи уравнения баланса количества движения, но только для частного случая тензора напряжений – антисимметричного. Общность закона (мы считаем его общим) определяется выбором произвольной поверхности, то есть заданием произвольной к ней нормали. Как бы ни располагалась поверхность с каким-то количеством движения, уравнение выполняется. Несмотря на то, что в уравнении учитывается только нормальная составляющая количества движения, уравнение можно считать фундаментальным законом в силу произвольности выбора поверхности. Единственное накладываемое ограничение – антисимметричность тензора напряжений.

Значит, в силу произвольности нормали и общности закона в интегральной форме можно обратно перейти к локальному уравнению, в котором присутствует все количество движения.

Итак, выбранные антисимметричные тензоры напряжений позволяют получить фундаментальные законы механики в той же форме, что и уравнения электродинамики, и при этом их физический смысл сохраняется.

Проводя аналогии и сопоставления между величинами, можно сравнивать электродинамику и механику, находить общности и выявлять закономерности.

### 1.1.11. Способы сопоставления величин

Антисимметричные части могут быть как у тензора напряжений, связанного с трансляционными степенями свободы – тензора силовых напряжений, так и у тензора напряжений, связанного с вращательными степенями свободы – тензор моментных напряжений. Поэтому как в первом, так и во втором балансовом уравнении механики величины представимы через ротор некоторого вектора. Форма уравнений механики получается схожей с формой уравнений Максвелла. Значит уравнения механики сопоставимы с первым и вторым уравнениями Максвелла.

В классической теории упругости тензор напряжений  $\tau$  является симметричным (отсутствует антисимметричная часть), а тензор моментных напряжений  $\mu$  отсутствует полностью. В классической теории возможно вращение частиц, однако оно не попадает в уравнения динамики. Классическая теория является безмоментной: в ней нет вращательных степеней свободы и нет моментных взаимодействий. В пределах данной теории получение уравнений механики, аналогичных уравнениям электродинамики, возможно (теории XIX века: теория Коши, теория Грина), однако эти теории описывают не все эксперименты. Кроме того, в классической теории получение интегральных

уравнений механики, аналогичных интегральным уравнениям электродинамики, на данный момент невозможно.

Существует теория МакКулага, в которой моментные напряжения отсутствуют, а аналогия производится между вектором силовых напряжений и некоторой электродинамической величины. Из теории получаются уравнения Максвелла, и теория согласуется с электродинамическими экспериментами. Но с точки зрения механики данная теория некорректна, потому что в отсутствие моментных напряжений нарушается второй закон механики.

Эту проблему можно решить, введя в рассмотрение механическую модель электродинамики – континуум Коссера, в котором есть вращательные степени свободы и моментные взаимодействия. Тогда электродинамические величины будут сопоставимы с моментными напряжениями, как было сделано в теориях Жилина [2. Глава 7] и Ивановой [15]. Использование антисимметричного тензора напряжений позволяет распространить механические аналогии на более сложные модели. Возможно, именно антисимметричная часть тензора напряжений отвечает за электродинамические взаимодействия.

Рассмотрим уравнения движения в моментной теории:

$$\rho \frac{d\mathbf{K}_1}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}, \quad \rho \frac{d\mathbf{K}_2}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \rho \mathbf{L}. \quad (1.45)$$

Массовая плотность кинетической энергии складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии движения относительно центра масс:

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.46)$$

где  $\mathbf{v}$  – трансляционная скорость,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость,  $\mathbf{J}$  – тензор инерции вращения (для сплошной среды тензор инерции вращения может зависеть от поворотов).

Массовая плотность количества движения и собственно кинетический момент вычисляются соответственно:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{K}_2 = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.47)$$

Если предполагать, что  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ , то  $\forall \boldsymbol{\omega}: \mathbf{K}_2 = \mathbf{0}$ . То есть инерция вращения (собственно кинетический момент) отсутствует, но само вращение частиц и их угловые скорости не исключаются.

Если предполагать, что  $\rho \mathbf{L} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , то из второго закона динамики следует, что  $\boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}^T = \boldsymbol{\tau}$ . То есть из отсутствия моментных взаимодействий следует, что тензор напряжений симметричен.

Остановимся на втором предположении и отметим, что в классической линейной теории из равенства нулю тензора моментных напряжений не следует равенство нулю деформаций по трансляционным степеням свободы и деформаций по вращательным степеням свободы:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \nabla \boldsymbol{\psi}. \quad (1.48)$$

Это видно из определяющих соотношений для тензора напряжений и тензора моментных напряжений:

$$\boldsymbol{\tau} = {}^4\mathbf{C}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\mu} = {}^4\mathbf{C}_2 \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad (1.49)$$

в которых считаем, что тензор коэффициентов жесткости на вращение  ${}^4\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$ , а тогда  $\forall \boldsymbol{\Phi}: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ .

Итак, может быть рассмотрен случай, при котором  $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi} \neq \mathbf{0}$ , но только  $\mathbf{J} = \mathbf{0}, {}^4\mathbf{C}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_2 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ . Отсюда следует тривиальность второго закона  $\boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}^T = \boldsymbol{\tau}$ , что дает классическую теорию. Таким образом, из моментной теории можно перейти в классическую.

Локальное уравнение количества движения можно сопоставить с первым или вторым уравнением Максвелла, но только в том случае, если тензор силовых

напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  антисимметричный. Также локальное уравнение момента количества движения можно сопоставить с первым или вторым уравнением Максвелла в том случае, если тензор моментных напряжений  $\boldsymbol{\mu}$  антисимметричный.

Например, любой антисимметричный тензор можно представить в виде векторного произведения единичного тензора на вектор, например:  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{E} \times \mathbf{T} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_\times \neq \mathbf{0}$ , при этом перед векторным произведением может быть выбран как знак плюс, так и минус. Тогда  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla \times \mathbf{T}$ . Положим в первом уравнении динамики  $\rho \mathbf{f} = \mathbf{0}, \rho = const$ . Тогда  $\frac{d(\rho \mathbf{K}_1)}{dt} = \nabla \times \mathbf{T}$ . Далее можно выбрать сопоставления для первого уравнения динамики из приведенных в таблице (1.4).

Таблица 1.4

Способы сопоставления величин для первого уравнения динамики

Первый способ	Второй способ
$\rho \mathbf{K}_1 \leftrightarrow \mathbf{D}$	$\rho \mathbf{K}_1 \leftrightarrow \mathbf{B}$
$\mathbf{T} \leftrightarrow \mathbf{H}$	$\mathbf{T} \leftrightarrow -\boldsymbol{\varepsilon}$
Первое уравнение Максвелла $\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \nabla \times \mathbf{H}$	Второе уравнение Максвелла $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}$

Здесь возникает проблема: так как  $\boldsymbol{\tau}_\times \neq \mathbf{0}$ , то, чтобы выполнялся второй закон, должны быть моментные напряжения  $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$  или  $\rho \mathbf{K}_2 \neq \mathbf{0}$ . Можно положить моментные напряжения, равные нулю  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , но тогда  $\boldsymbol{\tau}_\times$  должен присутствовать во втором законе, и иметь физическое значение, так как оба уравнения должны выполняться. С этой проблемой столкнулась теория МакКулага: в среде присутствуют трансляционные степени свободы, исключаются симметричные части,  $\boldsymbol{\tau}_\times \neq \mathbf{0}$ , но в среде отсутствуют вращательные степени свободы, и уравнение баланса кинетического момента не выполняется (динамическое слагаемое, тензоры моментных напряжений и

внешний момент отсутствуют, следовательно  $\boldsymbol{\tau}_\times$  должен быть равен нулю), значит теория противоречива.

В классической теории упругости данной проблемы не возникает, ведь тензор напряжений симметричный  $\boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}$ , нет моментных взаимодействий,  $\rho\mathbf{K}_2 = \mathbf{0}, \rho\mathbf{L} = \mathbf{0}$ , и оба уравнения движения удовлетворяются автоматически. Сопоставления локальных уравнений осуществимы и описаны в [2. Глава 7], где предложена модель, основанная исключительно на трансляционных степенях свободы. Интегральные уравнения в данной теории не обсуждаются. Анализируя локальные уравнения, можно прийти к выводу, что интегральные уравнения в данной теории несопоставимы: в данной работе ранее получено, что для сопоставления уравнений механики и электродинамики в интегральной форме необходимо, чтобы тензоры напряжений были антисимметричными.

Пусть теперь  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{E} \times \mathbf{T}$ , тогда  $\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} = \nabla \times \mathbf{M}$ . Положим во втором уравнении динамики  $\rho\mathbf{L} = \mathbf{0}, \rho = const$ . Тогда  $\frac{d(\rho\mathbf{K}_2)}{dt} = \nabla \times \mathbf{M} + \boldsymbol{\tau}_\times$ .

Далее, если среда чисто моментная, то  $\boldsymbol{\tau}_\times = \mathbf{0}$  и можно выбрать сопоставления для второго уравнения динамики, приведенный в таблице 1.5.

Таблица 1.5

Способы сопоставления величин для второго уравнения динамики

Первый способ (теория Жилина)	Второй способ (теория Ивановой)
$\rho\mathbf{K}_2 \leftrightarrow \mathbf{D}$	$\rho\mathbf{K}_2 \leftrightarrow \mathbf{B}$
$\mathbf{M} \leftrightarrow \mathbf{H}$	$\mathbf{M} \leftrightarrow -\boldsymbol{\varepsilon}$
Первое уравнение Максвелла $\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \nabla \times \mathbf{H}$	Второе уравнение Максвелла $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}$

Данные модели имеют преимущество: сопоставление с тензором моментных напряжений позволяет проигнорировать трансляционные степени свободы. Такие теории построены Жилиным и Ивановой. Кроме того, эти теории позволяют произвести сопоставления не только локальных, но и интегральных уравнений.

Между сопоставляемыми величинами можно поставить знак равенства, если добавить фундаментальную константу некоторой размерности, независимую от свойств материала. Так  $D$  – это момент количества движения с точностью до размерного множителя. При этом в линейных уравнениях размерный множитель сократится, а в общем случае для нелинейных уравнений может оставаться.

Также стоит отметить, что полученные уравнения Максвелла могут быть записаны через частные производные конкретно в случае неподвижной системы координат. Далее будут рассматриваться уравнения Максвелла для подвижной системы координат, где могут быть использованы только полные производные, потому что именно они удовлетворяют принципу материальной объективности [2].

### 1.3. Заключение к первой главе

Мы задавались вопросом о возможности записать уравнения механики и электродинамики в двух интегральных формах.

В общем случае, когда тензоры силовых и моментных напряжений произвольные, балансовые уравнения можно записать только в классическом интегральном виде. Однако, если тензоры силовых и моментных напряжений антисимметричные, то они имеют сопутствующие векторы, и балансовые уравнения записываются в двух интегральных формах.

При переходе от локальных уравнений первое и второе уравнения Максвелла всегда записываются в двух интегральных формах: в классической и аналогичной механике. Это становится возможным благодаря тому, что любой из векторов напряженности представляется через векторный инвариант антисимметричного тензора. Законы Гаусса для электрического и магнитного полей, выводимые в механике и электродинамике, в интегральной форме получаются идентичными.

Таким образом, чтобы сравнить уравнения механики и электродинамики не только в локальном, но и в интегральном виде, необходимо, чтобы тензоры напряжений были антисимметричными. Если тензоры напряжений симметричные, то можно сравнивать только локальные уравнения. Из вида уравнений Максвелла следует, что они всегда могут быть записаны в любой из рассмотренных интегральных форм.

На данный момент существуют механические модели электромагнитного поля, основанные на классической теории упругости (модель Жилина, модели XIX века). Уравнения динамики моделей, основанных на континууме с трансляционными степенями свободы (классический упругий континуум), сводятся к уравнениям электродинамики в локальной форме: механическим переменным ставятся в соответствие электродинамические переменные. Однако наличие только трансляционных степеней свободы (без вращательных) приводят к тому, что тензор напряжений должен быть симметричным. В отсутствие вращательных степеней свободы тензор напряжений не может быть антисимметричным, так как не будет выполняться уравнение баланса кинетического момента. Следовательно, в безмоментных моделях сопоставить интегральные уравнения не представляется возможным.

Из механических моделей, основанных на трансляционных и вращательных степенях свободы последние имеют преимущество, так как в них можно сопоставлять не только локальные уравнения, но и интегральные. Таким образом, необходима механическая модель, частицы которой имеют либо только

вращательные степени свободы, либо одновременно и вращательные, и трансляционные степени свободы, а также антисимметричные тензоры силовых напряжений (тензор напряжений, связанный с вращательными степенями свободы) и моментных напряжений (тензор напряжений, связанный с вращательными степенями свободы).

## ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ И ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В МАТЕРИАЛЬНОМ И ПРОСТРАНСТВЕННОМ ОПИСАНИЯХ

### 2.1. Введение ко второй главе

Движущиеся среды начали рассматривать в XIX веке. Уравнения движения вводились в одном из двух описаний: с помощью материального описания, при котором точка наблюдения жёстко связана с материалом, или с помощью пространственного (гидродинамического) описания, при котором используется неподвижная точка наблюдения, а среда движется мимо. При этом уравнения в каждом из описаний получались разными. В то время математический аппарат не позволял записать уравнения движения в случае подвижной точки наблюдения, движение которой отличается от движения материи, то есть скорость материи и скорость точки наблюдения различны.

Рассмотрим пример: лодка, в которой находится наблюдатель, движется с некоторой ненулевой скоростью, течение реки также имеет некоторую скорость, в общем случае неравную скорости лодки.

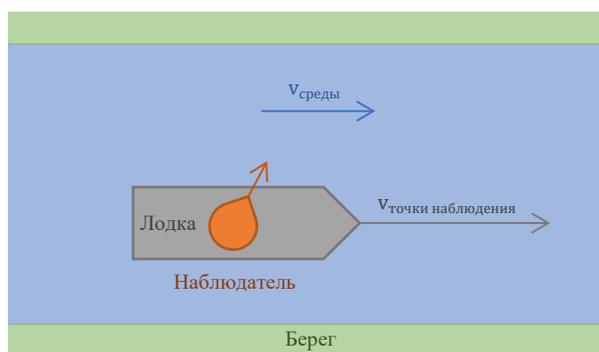


Рисунок 2.1. Пример подвижной точки наблюдения

Скорость точки наблюдения (лодки) отлична от скорости среды (воды):

$$\mathbf{v}_{\text{лодки}} \neq \mathbf{v}_{\text{воды}}, \quad \mathbf{v}_{\text{лодки}} \neq \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

Тогда для того, чтобы охарактеризовать изменения свойств среды в данный момент времени в данной точке пространства, в механике вводят материальную производную:

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v}_{\text{среды}} - \mathbf{v}_{\text{лодки}}) \cdot \nabla. \quad (2.2)$$

В электродинамике ситуация аналогичная: рассматривается наблюдатель, находящийся на Земле, которая движется в пространстве вокруг Солнца, Солнце тоже движется в Галактике, Галактика также движется. Точка наблюдения подвижна относительно некоторой абсолютной системы отсчета. Среда, под которой понимается электромагнитное поле, тоже может двигаться относительно абсолютной системы отсчета. При этом скорость электромагнитного поля может отличаться от скорости наблюдателя, находящегося на Земле.

Пусть имеется некоторая система отсчёта, которая должна быть инерциальной, а скорости электромагнитного поля и наблюдателя могут задаваться непостоянными. Введем материальную производную:

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v}_{\text{эл.поля}} - \mathbf{v}_{\text{Земли}}) \cdot \nabla. \quad (2.3)$$

Определение абсолютных скоростей в электродинамике затруднительно. Поэтому возникает вопрос о том, какова скорость эфира относительно Земли. На этом основан опыт Майкельсона.

Классические уравнения Максвелла записаны для неподвижных сред. В этом случае в механике пишут, что материальная производная совпадает с полной:

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} \quad (2.4)$$

Как записать уравнение Максвелла для подвижных сред? В электродинамике были предложены следующие теории:

Теория Герца основывается на предположении, что точка наблюдения (т.н.) движется со скоростью движения среды, и интегрирование производится по подвижной поверхности с контуром. В ходе чего получаются уравнения Максвелла для подвижных сред. Можно предположить, что Герц использовал материальное описание:

$$\mathbf{v}_{\text{среды}} = \mathbf{v}_{\text{т.н.}} \Rightarrow \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt}. \quad (2.5)$$

На данном предположении основывается гипотеза полностью увлекаемого Землей эфира. Аналогично тому, как атмосфера полностью увлекается Землей. Теория согласуется с явлением абберации, но не согласуется с экспериментами первого порядка, к примеру, опытом Роуланда.

Рассмотрим теперь случай пространственного описания с неподвижной точки наблюдения:

$$\mathbf{v}_{\text{лодки}} = \mathbf{0}, \quad \Rightarrow \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + \mathbf{v}_{\text{среды}} \cdot \nabla. \quad (2.6)$$

На этом основывается гипотеза неподвижного эфира (или Земля неподвижна, а эфир движется относительно Земли) и классическое гидродинамическое описание. Однако данное предположение также нас не устраивает, так как измерение абсолютной скорости электромагнитного поля вызывает затруднения. Более того, предположение также не согласуется с явлением абберации.

Лоренц считал, что эфир неподвижен, и сквозь него движутся дискретные частицы, создающие электромагнитные поля. Гипотеза Лоренца согласовалась с экспериментами первого порядка, но не согласовалась с экспериментом Майкельсона в эффектах второго порядка  $(v/c)^2$ .

Перейдем к рассмотрению последней теории. Гипотеза Френеля утверждает, что эфир движется с некоторой скоростью, но попадая в материю, его скорость изменяется: частично замедляется, либо, если предмет движется, а

эфир покоится, то внутри материи он приобретает скорость. В своих рассуждениях Френель использует понятие относительной скорости. Скорость эфира и скорость точки наблюдения отличны:

$$\mathbf{v}_{\text{эфира}} \neq \mathbf{v}_{\text{т.н.}} \quad (2.7)$$

Данная гипотеза о частично увлекаемом эфире согласуется со многими опытами [5], но на момент XIX века математический аппарат не позволял получить уравнения для сплошной среды, описывающих модель частично увлекаемого эфира.

Целью второй и третьей глав является исследование электродинамики в подвижных средах и получение уравнений, которые могли бы математически формализовать идею Френеля о частично увлекаемом эфире. Для этого необходимо ввести понятие материальной производной, определения которой не существовало в XIX веке.

## 2.2. Понятие полной и материальной производной в механике

Полная производная в механике для случая неподвижной точки наблюдения характеризует то, как меняются свойства среды в данной точке пространства, и определяется пределом:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}. \quad (2.8)$$

Материальная производная в случае неподвижной точки наблюдения определяется пределом:

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) - \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)}{\Delta t}, \quad (2.9)$$

где перемещение  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \Delta t$ .

Материальная производная показывает, как меняются свойства среды, которая в данный момент времени оказалась в данной точке пространства, а в следующий момент времени уже оттуда переместилась (рис. 2.2).

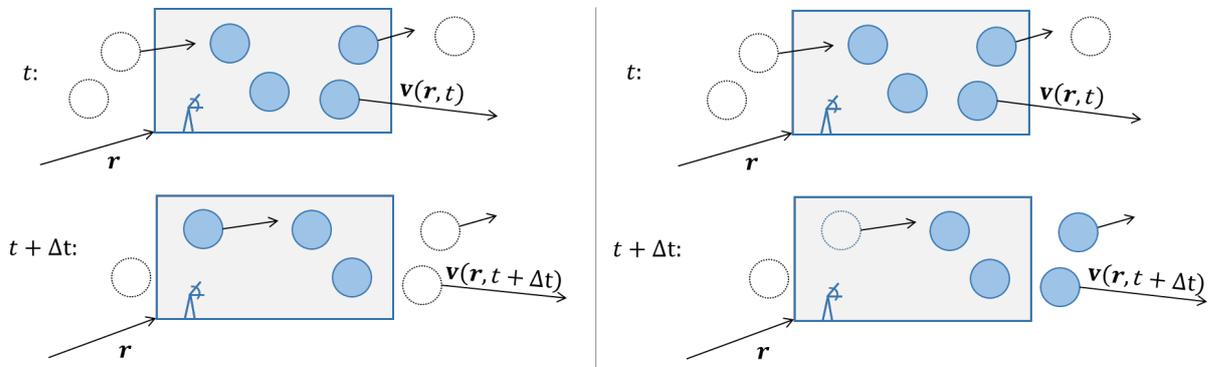


Рисунок 2.2. Полная и материальная производные при неподвижной точке наблюдения

В случае подвижной точки наблюдения полная производная определяется:

$$\frac{d}{dt} F(\mathbf{r}(t), t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - F(\mathbf{r}(t), t)}{\Delta t}. \quad (2.10)$$

Материальная производная в случае подвижной точки наблюдения:

$$\frac{\delta}{\delta t} F(\mathbf{r}(t), t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{r}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) - F(\mathbf{r}(t), t)}{\Delta t}, \quad (2.11)$$

где перемещение  $\Delta \mathbf{s} = [\mathbf{v}(\mathbf{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \mathbf{v}_*(t + \Delta t)] \Delta t$ .

Особенности производных в случае подвижной точки наблюдения и, соответственно, подвижного контрольного объема проиллюстрированы на рисунке 2.3.

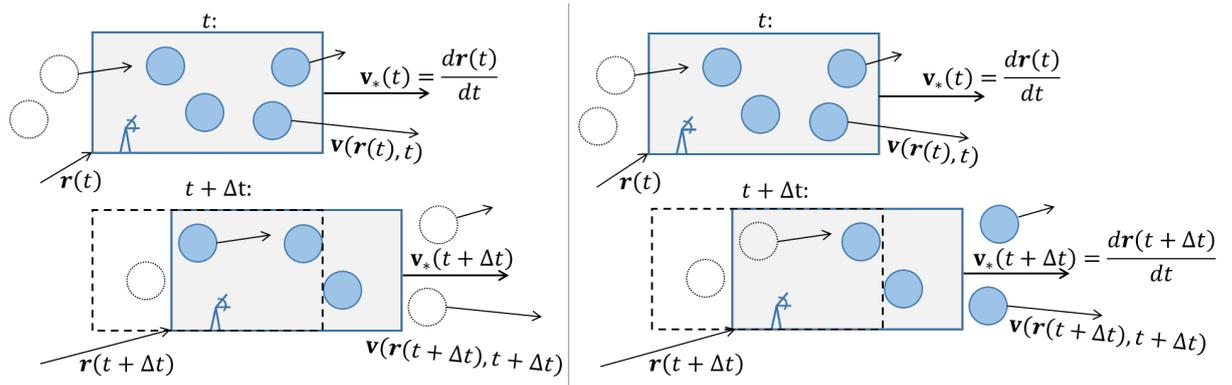


Рисунок 2.3. Полная и материальная производные в случае подвижной точки наблюдения

## 2.3. Материальное описание

### 2.3.1. Уравнение баланса количества движения в материальном описании

В первой главе рассматривались фиксированные объём, поверхность и контур в трёхмерном пространстве. При материальном описании за область наблюдения принимается движущаяся относительно системы отсчета деформируемая область заданных материальных частиц.

Пусть положение отчётной конфигурации  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$  не зависит от времени (то есть радиус-вектор фиксирован), а радиус-вектор актуальной конфигурации  $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ .

Любая функция  $f = f_*(\mathbf{R}, t)$  может быть заменена функцией пространственных переменных  $\tilde{f}(\mathbf{r}, t)$ , которая имеет то же значение  $f$  на актуальном векторе  $f = f_*(\mathbf{R}, t) = \tilde{f}(\mathbf{r}_*(\mathbf{R}, t), t)$ .

Полная производная функции при условии, что  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$  постоянен:

$$\frac{d_r \tilde{f}}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_*(\mathbf{R}, t)}{\partial t} \cdot \nabla \tilde{f}(\mathbf{r}, t), \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.12)$$

Скорость изменения физической величины не должна зависеть от выбора переменных, поэтому

$$\frac{\partial f_*(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \frac{d_r \tilde{f}(\mathbf{r}, t)}{dt}, \quad \frac{d_r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{r=const} + \frac{\partial \mathbf{r}_*(\mathbf{R}, t)}{\partial t} \cdot \nabla. \quad (2.13)$$

В случае, если происходит движение системы координат вместе с телом, радиус-вектор отчётной конфигурации подвижен  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{*0}(\mathbf{R}_0, t)$ , а  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0(x_1, x_2, x_3)$  постоянен.

В материальном описании полная производная от актуального радиус-вектора равна скорости материальной точки:

$$\mathbf{v} = \frac{d_0 \mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_*(\mathbf{R}_{*0}(\mathbf{R}_0, t), t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{R}_{*0}(\mathbf{R}_0, t)}{\partial t} \cdot \nabla^0 \mathbf{r}(\mathbf{R}_{*0}(\mathbf{R}_0, t), t), \quad (2.14)$$

$$\nabla^0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_{*0}(\mathbf{R}_0, t)}.$$

Полная производная функции в отсчётной конфигурации:

$$\frac{d^0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{R}=const} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \nabla^0. \quad (2.15)$$

Полная производная функции в актуальной конфигурации:

$$\frac{d_r \tilde{f}}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \Big|_{r=const} + \frac{d^0 \mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla \tilde{f}(\mathbf{r}, t), \quad \frac{d_r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{r=const} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (2.16)$$

Конвективное слагаемое связано с  $\mathbf{v}$  – скоростью контрольного объема.

Отсчётный объем  $V_0$  со временем деформируется и переходит в актуальный объем  $V(t)$ , ограниченный поверхностью  $S(t)$ , движется в пространстве с известной скоростью. Вектор отчётной конфигурации  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3)$ . Движение точек объема в любой момент времени  $t$  описывает вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$  актуальной конфигурации.

Массовая плотность количества движения задается:

$$\mathbf{K}_1^0(\mathbf{R}^*) = \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{R}) \mathbf{K}_1^0(\mathbf{R}) dV_0, \quad (2.17)$$

где  $\mathbf{R}^*$  – вектор положения точки внутри области  $V_0$  в отсчетной конфигурации.

Уравнение баланса количества движения в отсчетной конфигурации:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{R}) \mathbf{K}_1^0(\mathbf{R}) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{R}) \mathbf{f}_0(\mathbf{R}) dV_0 + \int_{S_0} \boldsymbol{\tau}_n^0(\mathbf{R}) dS_0. \quad (2.18)$$

По теореме о дивергенции имеем:

$$\int_{S_0} \boldsymbol{\tau}_n^0(\mathbf{R}) dS_0 = \int_{V_0} \nabla^0 \cdot \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{R}) dV_0. \quad (2.19)$$

Подставляем в баланс количества движения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{R}) \mathbf{K}_1^0(\mathbf{R}) dV_0 &= \int_{V_0} \rho_0(\mathbf{R}) \mathbf{f}_0(\mathbf{R}) dV_0 + \int_{V_0} \nabla^0 \cdot \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{R}) dV_0, \\ \nabla^0 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Массовая плотность количества движения в актуальной конфигурации, когда тело занимает объем  $V(t)$ :

$$\tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}^*, t) = \int_{V(t)} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) dV, \quad (2.21)$$

где  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}(\mathbf{R}^*, t)$ .

Воспользуемся соотношением для определителя:

$$\frac{dV}{dV_0} = \det \frac{\partial \mathbf{r}^*(\mathbf{R}, t)}{\partial \mathbf{R}} = J_*(\mathbf{R}, t). \quad (2.22)$$

При материальном описании в отчётной и в актуальной конфигурации элементарный объём содержит одну и ту же материю, поэтому масса этой материи не меняется – сохраняется (хотя объём и плотность могут меняться). Поэтому для баланса масс справедливо соотношение:

$$\rho_0 dV_0 = \rho dV. \quad (2.23)$$

Тогда можно преобразовать объемный интеграл из актуальной конфигурации в отсчетную (перейти от интеграла по актуальному объему к интегралу по отсчетному объему):

$$\tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}^*, t) = \mathbf{K}_*(\mathbf{r}^*, t) = \int_{V_0} \rho_*(\mathbf{R}, t) \mathbf{K}_1^*(\mathbf{R}, t) J_*(\mathbf{R}, t) dV_0. \quad (2.24)$$

В балансе количества движения переходим от интеграла по актуальному объему к интегралу по отсчетному объему:

$$\begin{aligned} \frac{d_*}{dt} \int_{V(t)} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) dV &= \int_{V(t)} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, t) dV + \int_{V(t)} \nabla_* \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}, t) dV, \\ \frac{d_*}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}^* = \text{const}} + \frac{d_*^0 \mathbf{r}^*}{dt} \cdot \nabla_*, \quad \nabla_* = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^*}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Это эквивалентно выражению:

$$\begin{aligned} &\frac{d_*^0}{dt} \int_{V_0} \rho_*(\mathbf{R}, t) \mathbf{K}_1^*(\mathbf{R}, t) J_*(\mathbf{R}, t) dV_0 \\ &= \int_{V_0} \rho_*(\mathbf{R}, t) \mathbf{f}_*(\mathbf{R}, t) J_*(\mathbf{R}, t) dV_0 + \int_{V_0} \nabla_*^0 \cdot \boldsymbol{\tau}_* J_*(\mathbf{R}, t) dV_0, \\ &\frac{d_*^0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{R}^* = \text{const}} + \frac{\partial \mathbf{R}^*}{\partial t} \cdot \nabla_*^0, \quad \nabla_*^0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}^*}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

В актуальной конфигурации операторы дифференцирования и интегрирования не перестановочны. А в отсчетной конфигурации операторы дифференцирования и интегрирования перестановочны.

Если здесь  $\mathbf{R} = \text{const}$ , то  $d/dt = \partial/\partial t$ , и знаки интегрирования и дифференцирования перестановочны. В противном случае имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{d_*^0}{dt} \int_{V_0} \rho_*(\mathbf{R}, t) \mathbf{K}_1^*(\mathbf{R}, t) J_*(\mathbf{R}, t) dV_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho_{*0}(\mathbf{R}_0, t) \mathbf{K}_1^{*0}(\mathbf{R}_0, t) J_{*0}(\mathbf{R}_0, t) dV_0 \\
&= \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} [\rho_{*0}(\mathbf{R}_0, t) \mathbf{K}_1^{*0}(\mathbf{R}_0, t) J_{*0}(\mathbf{R}_0, t)] dV_0 \\
&= \int_{V_0} \frac{d^0}{dt} [\rho_*(\mathbf{R}, t) \mathbf{K}_1^*(\mathbf{R}, t) J_*(\mathbf{R}, t)] dV_0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Здесь определитель обозначен:

$$J_*(\mathbf{R}, t) = \text{Det} \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \right)^{-1} = \tilde{J}(\mathbf{r}, t). \tag{2.28}$$

Верно соотношение:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{J}^{-1}(\mathbf{r}, t) \frac{d_r}{dt} \tilde{J}(\mathbf{r}, t). \tag{2.29}$$

Произведем дифференцирование левой части и обратный переход к  $V(t)$ , используя также баланс масс из статьи [12]:

$$\frac{d_r \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)}{dt} + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{2.30}$$

Приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
\frac{d_*}{dt} \int_{V(t)} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) dV &= \frac{d_*^0}{dt} \int_{V_0} \rho_*(\mathbf{R}, t) \mathbf{K}_1^*(\mathbf{R}, t) J_*(\mathbf{R}, t) dV_0 = \\
&= \int_{V_0} \frac{d^0}{dt} [\rho_*(\mathbf{R}, t) \mathbf{K}_1^*(\mathbf{R}, t) J_*(\mathbf{R}, t)] dV_0 \\
&= \int_{V(t)} \frac{d_r}{dt} [\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) \tilde{J}(\mathbf{r}, t)] \tilde{J}^{-1}(\mathbf{r}, t) dV
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{V(t)} \left[ \frac{d_r \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)}{dt} \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \frac{d_r \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t)}{dt} \right. \\
&\quad \left. + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{r}, t) \frac{d_r \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t)}{dt} \right] dV \\
&= \int_{V(t)} \left[ \frac{d_r \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)}{dt} \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \frac{d_r \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t)}{dt} + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) \right] dV \\
&= \int_{V(t)} \left[ \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{d_r \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)}{dt} + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) \right] + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \frac{d_r \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t)}{dt} \right] dV \\
&= \int_{V(t)} \left[ \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \frac{d_r \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t)}{dt} \right] dV. \tag{2.31}
\end{aligned}$$

Подставив последнее равенство в уравнение баланса, получим:

$$\int_{V(t)} \left[ \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \frac{d_r \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t)}{dt} - \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, t) - \nabla_* \cdot \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, t) \right] dV = 0. \tag{2.32}$$

Так как это верно для любого объема, то верно для бесконечно малого объема, тогда приходим к локальному уравнению баланса количества движения:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \frac{d_r \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t)}{dt} &= \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, t) + \nabla_* \cdot \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{r}, t), \\
\frac{d_r}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{r=const} + \mathbf{v} \cdot \nabla.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Конвективное слагаемое отсутствует, как и должно быть при материальном описании, остается полная производная. Здесь полная производная по времени является объективным оператором, она не зависит от выбора системы отсчета.

После раскрытия полной производной приходим к аналогичному выражению, но через частную производную:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{K}}_1(\mathbf{r}, t) \right] = \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, t) + \nabla_* \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}, t). \quad (2.34)$$

### 2.3.2. Уравнение баланса кинетического момента в материальном описании

Уравнение баланса кинетического момента в материальном описании в интегральной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V(t)} [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)] dV \\ &= \int_{V(t)} [\mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{L}(\mathbf{r}, t)] dV \\ & \quad + \int_{S(t)} [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\mu}_n(\mathbf{r}, t)] dS. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Используя соотношение связи объемов в отсчетной и актуальной конфигурациях  $\rho_0 dV_0 = \rho dV$ , баланс масс и баланс количества движения, аналогично получается уравнение баланса момента количества движения в локальной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) \frac{d_r (\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t))}{dt} &= \nabla_* \cdot \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\tau}_\times(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{L}(\mathbf{r}, t), \\ \frac{d_r}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}=\text{const}} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \end{aligned} \quad (2.36)$$

## 2.4. Пространственное описание с неподвижной точкой наблюдения

### 2.4.1. Уравнение баланса количества движения в пространственном описании

При пространственном описании за область наблюдения принимается фиксированная в пространстве открытая область, сквозь которую движутся материальные частицы.

Положение объема задается фиксированным в пространстве вектором  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ , независимым от времени, который в данном случае идентичен отсчетному. Скорость материи задается как  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ . Поверхность  $S$ , ограничивающая контрольный объем  $V$ , является замкнутой и недеформируемой.

Массовая плотность количества движения в любой момент времени:

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{r}^*, t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t) dV, \quad (2.37)$$

где  $\mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)$  – количество движения в момент времени  $t$ ,  $\mathbf{r}^*$  – вектор положения фиксированной точки в пределах объема с поверхностью  $S$ .

Баланс количества движения в пространственном описании в интегральной форме будет иметь слагаемое, характеризующее подвод через поверхность:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)] dV \\ &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV + \int_S \boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{r}, t) dS - \int_S [\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dS. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Знаки интегрирования и дифференцирования перестановочны, и скорость изменения количества движения в объеме:

$$\frac{d\mathbf{K}_1(\mathbf{r}^*, t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}_1(\mathbf{r}^*, t + \Delta t) - \mathbf{K}_1(\mathbf{r}^*, t)}{\Delta t} = \int_V \frac{d\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)}{dt} dV. \quad (2.39)$$

В отсутствие источника массы внутри объема изменение массы равно потоку массы через поверхность, тогда баланс количества движения в пространственном описании:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{d}{dt} [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)] dV \\ &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV + \int_S \boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{r}, t) dS - \int_S [\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}, t)]\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dS. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Здесь последнее слагаемое характеризует поток материальных частиц со скоростью  $\mathbf{v}$  через поверхность  $S$  с единичной внешней нормалью  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ .

После применения теоремы о дивергенции:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{d}{dt} [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)] dV \\ &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t) dV - \int_V \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] dV. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Рассмотрев в последнем слагаемом действие оператора дивергенции, как  $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho\mathbf{v})\mathbf{v} + \rho\mathbf{v} \cdot (\nabla\mathbf{v})$ , и  $\rho\mathbf{v} = \rho\mathbf{K}_1$ , получим:

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ \frac{d\rho(\mathbf{r}, t)}{dt} \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)]\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t) \frac{d\mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)}{dt} \right] dV \\ & + \int_V [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot (\nabla\mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)) - \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t)] dV \end{aligned} \quad (2.42)$$

Преобразуем к более удобному виду:

$$\begin{aligned} & \int_V \left[ \frac{d\rho(\mathbf{r}, t)}{dt} + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \right] K_1(\mathbf{r}, t) dV \\ & + \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\partial K_1(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot (\nabla K_1(\mathbf{r}, t)) \right] dV \\ & - \int_V [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t)] dV = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Уравнение верно для произвольно выбранного объема  $V$ , в том числе для бесконечно малого. Используем баланс масс

$$\frac{d\rho(\mathbf{r}, t)}{dt} + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = 0. \quad (2.44)$$

Тогда локальная форма баланса количества движения в пространственном описании:

$$\rho(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{dK_1(\mathbf{r}, t)}{dt} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot (\nabla K_1(\mathbf{r}, t)) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{f}(\mathbf{r}, t). \quad (2.45)$$

Таким образом, конвективное слагаемое остается:

$$\rho(\mathbf{r}, t) \frac{\delta K_1(\mathbf{r}, t)}{\delta t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (2.46)$$

Оператор  $\frac{\delta}{\delta t}$  является материальной производной в пространственном описании и описывает перемещение относительно точки наблюдения частицы, которая в данный момент времени находилась в данной точке. При пространственном описании актуальный вектор  $\mathbf{r}$  не зависит от времени, полная производная по времени совпадает с частной производной.

## 2.4.2. Уравнение баланса кинетического момента в пространственном описании

Аналогично уравнению баланса количества движения рассматривается недеформируемый фиксированный в пространстве объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Точки материи движутся относительно объема. Вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$  задает положение объема.

Баланс кинетического момента при пространственном описании с учетом подвода через поверхность:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{d}{dt} [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)] dV \\ &= \int_V [\mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{L}(\mathbf{r}, t)] dV + \int_S [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\mu}_n(\mathbf{r}, t)] dS \quad (2.47) \\ & \quad - \int_S \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)] dS. \end{aligned}$$

Далее для постоянного объема используется баланс масс, баланс количества движения и равенство  $\mathbf{K}_2(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  – тензор инерции. Аналогично переходим к локальному уравнению и преобразуем слагаемое:

$$\rho(\mathbf{r}, t) \frac{\delta \mathbf{K}_2(\mathbf{r}, t)}{\delta t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\delta (\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t))}{\delta t}. \quad (2.48)$$

Окончательно получим локальную форму баланса момента количества движения в пространственном описании:

$$\rho(\mathbf{r}, t) \frac{\delta (\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t))}{\delta t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\tau}_\times(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{L}(\mathbf{r}, t). \quad (2.49)$$

## 2.5. Пространственное описание с подвижной точкой наблюдения

### 2.5.1. Уравнение баланса количества движения

В случае подвижной точки наблюдения рассматривается движущийся с заданной скоростью в пространстве объем, ограниченный поверхностью  $S$ . Вектор положения задается  $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3, t)$ , где  $x_1, x_2, x_3$  координаты в отсчетной конфигурации. Скорость материи задается как  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , скорость точки наблюдения задается как  $\mathbf{v}_*(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ .

Тогда баланс количества движения в интегральной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t) dV \\ &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV + \int_S \boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{r}, t) dS \\ & - \int_S \left[ \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \left( \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \right] \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dS. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Для вычисления производной левой части воспользуемся теоремой переноса: скорость изменения некоторой физической величины в бесконечно малой окрестности точки внутри объема определяется скоростью изменения этой физической величины внутри контрольного объёма и изменения формы этого контрольного объёма:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \left[ \frac{d\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}_*(t) \right] dV. \quad (2.51)$$

Отметим связь операторов градиента в отсчетной и актуальной конфигурациях:

$$\boldsymbol{\nabla}^o = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\nabla} \mathbf{s})^{-1} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \quad \boldsymbol{\nabla}^o \frac{d}{dt} = \frac{d \boldsymbol{\nabla}^o}{dt}. \quad (2.52)$$

Далее используется баланс масс в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = - \int_S [\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_*(t))] \rho(\mathbf{r}, t) dS. \quad (2.53)$$

Также используя теорему о дивергенции, перепишем правую часть балансового уравнения и перенесем ее в левую часть. Тогда уравнение баланса в локальной форме примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)] + \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}_*(t) \\ & + \nabla \cdot [(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}_*(t)) \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Приходим к локальной форме баланса количества движения при подвижной точке наблюдения:

$$\rho(\mathbf{r}, t) \frac{\delta \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)}{\delta t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla. \quad (2.55)$$

### 2.5.2. Уравнение баланса кинетического момента

Баланс кинетического момента при пространственном описании в интегральной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_2(\mathbf{r}, t) + \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{K}_1(\mathbf{r}, t)] dV \\ & = \int_V [\mathbf{r} \times \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{L}(\mathbf{r}, t)] dV + \int_S [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\mu}_n(\mathbf{r}, t)] dS \\ & \quad - \int_S \left[ \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \left( \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \rho(\mathbf{r}, t) \right] \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dS \end{aligned} \quad (2.56)$$

Далее используется баланс масс и баланс количества движения. И приходим к локальной форме уравнения:

$$\rho(\mathbf{r}, t) \frac{\delta(\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t))}{\delta t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\tau}_\times(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}, t)L(\mathbf{r}, t), \quad (2.57)$$

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla.$$

Итак, в каждом описании при переходе от интегральных уравнений к локальным естественным образом возникают разные производные, и получаются разные уравнения движения (Табл. 2.1).

Таблица 2.1

Виды описаний подвижных сред в механике

Материальное описание, актуальная конфигурация	Пространственное описание с неподвижной точкой наблюдения	Пространственное описание с подвижной точкой наблюдения
$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt}$	$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla$	$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla$
$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}$	$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}$	$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}$
$\rho \frac{d(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \rho L$	$\rho \frac{d(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})}{dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \rho L$	$\rho \frac{d(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})}{dt} + \rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \rho L$

## 2.6. Уравнения Максвелла в пространственном описании с подвижной точкой наблюдения

Уравнения механики в локальной форме, записанные через материальную производную, в разных описаниях имеют одинаковый вид. Применим это предположение к уравнениям Максвелла, то есть запишем их через материальную производную. К данным локальным уравнениям можно перейти от интегральных уравнений, записанных через объемный и поверхностный

интегралы (1.33) и (1.42) с учетом подвода через поверхность в пространственном описании с подвижной точкой наблюдения.

Запишем первое уравнение Максвелла, заменив полную производную на материальную:

$$\frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t} = \nabla \times \mathbf{H}, \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla. \quad (2.58)$$

Перепишем уравнение, раскрывая материальную производную в пространственном описании с подвижной точкой наблюдения, получим:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{H}. \quad (2.59)$$

Преобразуем второе слагаемое левой части, учитывая, что скорости постоянны  $\mathbf{v} = \text{const}$ ,  $\mathbf{v}_* = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla \mathbf{D} &= \nabla \cdot \left( (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \mathbf{D} \right) - \underbrace{(\nabla \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*))}_{=0} \mathbf{D} \\ &= \nabla \cdot \left( \mathbf{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) + 2((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \mathbf{D})^A \right) \\ &= \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{D}}_{\substack{=q \\ \text{по закону Гаусса} \\ \text{для эл. поля}}} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \nabla \times \left( (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{D} \right) \\ &= q(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \nabla \times \left( (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{D} \right), \end{aligned} \quad (2.60)$$

где  $(\dots)^A$  обозначает антисимметричную часть тензора.

Получим первое уравнение Максвелла для подвижных сред:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} + q(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) = \nabla \times (\mathbf{H} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{D}) \quad (2.61)$$

Сделаем аналогичное предположение и запишем второе уравнение Максвелла с использованием материальной производной:

$$\frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} = -\nabla \times \mathcal{E}, \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla. \quad (2.62)$$

Перепишем уравнение, раскрывая материальную производную, получим:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla \mathbf{B} = -\nabla \times \mathcal{E}. \quad (2.63)$$

Преобразуем второе слагаемое, учитывая, что скорости постоянны  $\mathbf{v} = \text{const}$ ,  $\mathbf{v}_* = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla \mathbf{B} &= \nabla \cdot \left( (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \mathbf{B} \right) - \underbrace{(\nabla \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*))}_{=0} \mathbf{B} \\ &= \nabla \cdot \left( \mathbf{B} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) + 2((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \mathbf{B})^A \right) \\ &= \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \nabla \times \left( (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B} \right) \\ &\quad \text{по закону Гаусса} \\ &\quad \text{для магн. поля} \\ &= -\nabla \times \left( (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B} \right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Приходим ко второму уравнению Максвелла для подвижных сред:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\nabla \times (\mathcal{E} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}). \quad (2.65)$$

Итак, уравнения Максвелла для подвижных сред получены в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{D}}{dt} + q(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) &= \nabla \times (\mathbf{H} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{D}), \\ \frac{d\mathbf{B}}{dt} &= -\nabla \times (\mathcal{E} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

## 2.7. Сравнение уравнений Максвелла с уравнениями Герца для подвижных сред

Рассмотрим, как Герц выводит уравнения Максвелла для подвижных сред. Согласно [5] Герц записывает интегральные уравнения Максвелла для неподвижных сред, а затем переходит к локальным уравнениям, учитывая движение поверхности с контуром. Можно сделать вывод, что Герц использовал материальное описание.

Уравнения Герца имеют вид:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times [\mathbf{D} \times \mathbf{v}] + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{j} \right], \\ \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} &= -\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times [\mathbf{B} \times \mathbf{v}] \right].\end{aligned}\tag{2.67}$$

Уравнения (2.67) записаны в системе СГС, поэтому в них присутствует коэффициент  $1/c$ , где  $c$  – скорость света. Все уравнения данной работы получены в системе СИ. Множитель  $\mathbf{v}$  соответствует скорости среды, а  $\mathbf{j}$  соответствует плотности электрического тока. Также заметим, что уравнения Герца записываются через частную производную.

Полученные уравнения (2.66) перепишем в виде, схожем с уравнениями Герца:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \nabla \times [\mathbf{D} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)] + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)(\nabla \cdot \mathbf{D}), \\ \nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} &= -\left[ \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \nabla \times [\mathbf{B} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)] \right].\end{aligned}\tag{2.68}$$

Несложно учесть плотность электрического тока  $\mathbf{j}$ , тогда в первом уравнении (2.68) добавиться слагаемое, аналогичное уравнению Герца.

Видно, что по форме уравнения (2.67) и (2.68) совпадают. В полученных уравнениях используется полная производная и скорость среды относительно наблюдателя, а в уравнениях Герца используется частная производная и скорость

среды. Полная и частная производные будут равны только в случае неподвижной системы координат, в данном случае использование той или иной производной играет значительную роль.

Итак, в ходе применения методов механики к уравнениям Максвелла, получены уравнения Максвелла для подвижных сред, аналогичные уравнениям Герца для подвижных сред.

Преимущество полученных уравнений (2.68) в том, что они легко могут быть обобщены на случай, когда скорость среды и скорость точки наблюдения не являются постоянными величинами, чего нельзя сказать об уравнениях Герца.

Здесь не вводилась механическая модель, поэтому полученным уравнениям будут соответствовать определяющие (материальные) уравнения, аналогичные уравнениям Герца. В статье Герца [9] определяющие уравнения не рассматриваются. Мандельштам пишет, что векторы напряженности электрического и магнитного полей,  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ , не меняются при переходе от одной системы отсчета к другой [5]. На основании его работы можно предположить, что определяющие уравнения подвижной среды такие же, как в неподвижной среде. Предполагаем, что материальные уравнения Герца имеют вид:

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}. \quad (2.69)$$

## ГЛАВА 3. МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕД

### 3.1. Континуум Коссера, основанный только на вращательных степенях свободы, математическое описание которого сводится к уравнениям Максвелла в неподвижных средах

#### 3.1.1. Инерционные характеристики и динамические структуры континуума Коссера

В данном подразделе в качестве механической модели среды рассматривается упругий изотропный континуум Коссера, основанный только на вращательных степенях свободы. Принимаются упрощающие предположения: тензор моментных напряжений антисимметричный; плотность среды постоянна; внешние объемные силы, моменты и трансляционная скорость считаются нулевыми. Согласно [15] математическое описание данного континуума сводится к уравнениям Максвелла в неподвижных средах.

Тензор инерции изотропного континуума определяется как:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = J(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}, \quad (3.1)$$

где  $J(\mathbf{r}, t)$  – момент инерции на единицу массы и  $\mathbf{E}$  – единичный тензор второго ранга.

Массовая плотность кинетической энергии состоит из двух слагаемых: кинетической энергии трансляционного движения на единицу массы и кинетической энергии вращательного движения на единицу массы:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}J\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  – вектор трансляционной скорости,  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$  – вектор угловой скорости.

Массовая плотность количества движения и массовая плотность кинетического момента имеют следующую форму:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{v}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \quad (3.3)$$

Теперь введем тензор силовых напряжений Коши  $\boldsymbol{\tau}$ , связанного с трансляционными степенями свободы, и тензор моментных напряжений Коши  $\boldsymbol{\mu}$ , связанного с вращательными степенями свободы:

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{T}_n$  – вектор силы,  $\mathbf{M}_n$  вектор момента.

Теперь вводятся уравнения динамики в локальной форме:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times = \rho \frac{\delta (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})}{\delta t}. \quad (3.5)$$

Вводится кинематическое соотношение между вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  и тензором поворота  $\mathbf{P}$ , также известное как уравнение Пуассона:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}. \quad (3.6)$$

Тензор деформаций по вращательным степеням свободы  $\boldsymbol{\Theta}$  вводится по формуле:

$$\nabla \mathbf{P} = \boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{P}. \quad (3.7)$$

Преобразуя уравнение (3.7) и подставляя в уравнение Пуассона (3.6), с учетом, что скорость среды равна нулю, приходим к уравнению:

$$\frac{d\boldsymbol{\Theta}_\times}{dt} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\Theta} - \text{tr}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{E}) = \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.8)$$

Получим второе уравнение. Тензор моментных напряжений  $\boldsymbol{\mu}$  вводится как антисимметричный тензор, что может быть представлено в виде:

$$\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{M} \times \mathbf{E}. \quad (3.9)$$

Тензор напряжений записывается в виде:

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Theta}_{\times})\mathbf{E} + \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Theta}^T. \quad (3.10)$$

Подставляя уравнения (3.9), (3.10) во второе уравнение динамики (3.5), приходим к уравнению:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} - \mathbf{M} \cdot (\boldsymbol{\Theta} - \text{tr}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{E}) = -\nabla \times \mathbf{M}. \quad (3.11)$$

### 3.1.2. Сравнение уравнений континуума Коссера с уравнениями Максвелла в неподвижных средах. Определяющие уравнения

Из уравнения баланса энергии следуют определяющие уравнения в терминах механических величин и задаются уравнениями:

$$\mathbf{M} = C_{\Psi}\rho^{-1}\boldsymbol{\Theta}_{\times}, \quad \mathbf{K} = \rho\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \quad (3.12)$$

где  $C_{\Psi}$  – коэффициент жесткости. Механические аналогии в терминах электродинамических величин для неподвижной среды имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \chi\boldsymbol{\Theta}_{\times}, & \mathcal{H} &= \chi\boldsymbol{\omega}, & \mathbf{J} &= \chi\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\Theta} - \text{tr}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{E}), \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{\chi}\mathbf{K}, & \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{\chi}\mathbf{M}, & \boldsymbol{\nu} &= -\frac{1}{\chi}\mathbf{M} \cdot (\boldsymbol{\Theta} - \text{tr}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{E}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$C_{\Psi}\rho^{-1} = \frac{\chi^2}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad q = \frac{\chi}{2}((\text{tr}\boldsymbol{\Theta})^2 - \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Theta}), \quad \rho\mathbf{J} = \chi^2\mu\mu_0.$$

Отсюда получаем уравнения Максвелла для неподвижных сред:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{D}}{dt} + \mathbf{J} &= \nabla \times \mathcal{H}, & \nabla \cdot \mathcal{D} &= q, \\ \frac{d\mathcal{B}}{dt} + \boldsymbol{\nu} &= -\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon}, & \nabla \cdot \mathcal{B} &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Уравнения Гаусса выводятся путем взятия дивергенции от уравнения Максвелла. Величина  $\boldsymbol{\nu}$  появляется из уравнений механики. Данная величина

пропорциональна вектору электрического поля, поэтому, согласно [15], вводится как плотность электрического напряжения на единицу площади. Третье уравнение (3.14), содержащее  $\mathcal{V}$ , интерпретируется как модифицированное уравнение Максвелла-Фарадея и совпадает с ним, если величина  $\mathcal{V} = \mathbf{0}$ .

Окончательно, уравнениям Максвелла для неподвижных сред (3.14) соответствуют определяющие уравнения в терминах электродинамических величин в классическом виде:

$$\mathcal{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = \mu\mu_0\mathcal{H}. \quad (3.15)$$

### **3.2. Континуум Коссера, обладающий как вращательными, так и трансляционными степенями свободы, математическое описание которого сводится к уравнениям Максвелла в подвижных средах**

#### **3.2.1. Инерционные характеристики и динамические структуры континуума Коссера**

В данном подразделе в качестве механической модели электромагнитного поля рассматривается упругий изотропный континуум Коссера, состоящий из тел-точек, обладающих как вращательными, так и трансляционными степенями свободы. Ниже показано, что математическое описание данного континуума сводится к уравнениям Максвелла в подвижных средах. Получены уравнения в случае пространственного описания с подвижной точкой наблюдения.

Тензор инерции изотропного континуума определяется как:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = J(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}, \quad (3.16)$$

где  $J(\mathbf{r}, t)$  – момент инерции на единицу массы и  $\mathbf{E}$  – единичный тензор второго ранга.

Массовая плотность кинетической энергии состоит из двух слагаемых: кинетической энергии трансляционного движения на единицу массы и кинетической энергии вращательного движения на единицу массы:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3.17)$$

где  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  – вектор трансляционной скорости,  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$  – вектор угловой скорости.

Массовая плотность количества движения и массовая плотность кинетического момента имеют следующую форму:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{v}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3.18)$$

Теперь введем тензор силовых напряжений Коши  $\boldsymbol{\tau}$ , связанного с трансляционными степенями свободы, и тензор моментных напряжений Коши  $\boldsymbol{\mu}$ , связанного с вращательными степенями свободы:

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}, \quad (3.19)$$

где  $\mathbf{T}_n$  – вектор силы,  $\mathbf{M}_n$  вектор момента.

Сформулируем баланс масс в локальной форме:

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.20)$$

Введем динамические уравнения: баланс количества движения и баланс кинетического момента:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_\times + \rho \mathbf{L} = \rho \frac{\delta (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega})}{\delta t}. \quad (3.21)$$

### 3.2.2. Уравнение, связывающее тензор деформаций и угловую скорость

Введем уравнение Пуассона – кинематическое соотношение между тензором поворота  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  и вектором угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla. \quad (3.22)$$

Тензор деформаций по вращательным степеням свободы  $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{r}, t)$  вводится по формуле:

$$\nabla \mathbf{P} = \boldsymbol{\Theta} \times \mathbf{P}. \quad (3.23)$$

Градиент угловой скорости связан с тензором деформаций по вращательным степеням свободы:

$$\frac{\delta \boldsymbol{\Theta}}{\delta t} = \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{\omega} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\Theta}. \quad (3.24)$$

Уравнение приведено к такому виду, что оно имеет структуру уравнения баланса, поэтому оно может трактоваться как уравнение баланса тензора деформаций по вращательным степеням свободы.

Раскрывая оператор материальной производной, записываем уравнение (3.24) через полную производную:

$$\frac{d\boldsymbol{\Theta}}{dt} = \nabla \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{\omega} - (\nabla \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\Theta} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla \boldsymbol{\Theta}. \quad (3.25)$$

Выполним вспомогательные преобразования. Найдем:

$$\begin{aligned}
\nabla((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) &= (\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) \cdot \Theta + \mathbf{r}^m (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{r}^s \frac{\partial \theta_s}{\partial q^m} \\
&= (\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) \cdot \Theta + \mathbf{r}^m (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{r}^s \left( \frac{\partial \theta_m}{\partial q^m} + \theta_m \times \theta_s \right) \\
&= (\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) \cdot \Theta + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \mathbf{r}^s \frac{\partial (\mathbf{r}^m \theta_m)}{\partial q^m} + \mathbf{r}^m \theta_m \times \theta_s \cdot \mathbf{r}^s (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \\
&= (\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) \cdot \Theta + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla \Theta + \Theta \times (\Theta^T \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) \\
&= (\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) \cdot \Theta + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla \Theta + \Theta \times ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Получим тождество:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla \Theta = \nabla((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) - \Theta \times ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) - (\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) \cdot \Theta. \tag{3.27}$$

После подстановки тождества (3.27) в уравнение (3.25) получим:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \nabla(\omega - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) - \Theta \times (\omega - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) - (\nabla \mathbf{v}_*) \cdot \Theta. \tag{3.28}$$

Найдем векторный инвариант уравнения (3.28). Выполним вспомогательные преобразования:

$$[\Theta \times \omega]_{\times} = \omega \cdot (\Theta - \text{tr} \Theta \mathbf{E}), \tag{3.29}$$

$$[\Theta \times ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta)]_{\times} = ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) \cdot (\Theta - \text{tr} \Theta \mathbf{E}). \tag{3.30}$$

Векторный инвариант последнего слагаемого в выражении (3.28) равняется:

$$\begin{aligned}
[(\nabla \mathbf{v}_*) \cdot \Theta]_{\times} &= [\mathbf{r}^m \left( \frac{\partial}{\partial q^m} \mathbf{v}_* \right) \cdot \mathbf{r}^s \theta_s]_{\times} = (\mathbf{r}^m \times \theta_s) \left( \frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial q^m} \cdot \mathbf{r}^s \right) \\
&= -(\theta_s \times \mathbf{r}^m) \left( \mathbf{r}^s \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial q^m} \right) = -\mathbf{r}^s \theta_s \times \cdot \mathbf{r}^m \frac{\partial \mathbf{v}_*}{\partial q^m} = -\Theta \times \cdot \nabla \mathbf{v}_*.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

В результате, подставив полученные соотношения (3.29), (3.30) и (3.31) в уравнение (3.28), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{\times}}{dt} &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) \\ &\quad - (\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}) + \Theta \times \cdot \nabla \mathbf{v}_*. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Преобразуем первое слагаемое правой части уравнения (3.32):

$$\begin{aligned} \nabla \times ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) &= \nabla \times (\Theta^T \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) = \nabla \times [(\Theta - 2\Theta^A) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)] \\ &= \nabla \times (\Theta \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) - 2\nabla \times \left[ -\frac{1}{2} \Theta_{\times} \times \mathbf{E} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \right] \\ &= (\nabla \times \Theta) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \Theta^T \times \cdot \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) + \nabla \times [\Theta_{\times} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)] \\ &= \frac{1}{2} (\Theta^T \times \times \Theta) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \Theta^T \times \cdot \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \nabla \times [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \Theta_{\times}]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Уравнение (3.32) может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{\times}}{dt} &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \Theta_{\times}) + \Theta^T \times \cdot \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\Theta^T \times \times \Theta) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - (\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}) + \Theta \times \cdot \nabla \mathbf{v}_*. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Теперь воспользуемся соотношением:

$$\frac{1}{2} (\Theta^T \times \times \Theta) = [\Theta \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E})]^T + \frac{1}{2} ((\text{tr}\Theta)^2 - \Theta \cdot \Theta)\mathbf{E}. \quad (3.35)$$

Тогда третье слагаемое правой части уравнения (3.34):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (\Theta^T \times \times \Theta) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) + ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \Theta) \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}) \\ = -\frac{1}{2} ((\text{tr}\Theta)^2 - \Theta \cdot \Theta)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Уравнение (3.34) примет форму:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{\times}}{dt} &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \Theta_{\times}) + \Theta^T \times \cdot \nabla (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \\ &\quad - \frac{1}{2} ((\text{tr}\Theta)^2 - \Theta \cdot \Theta)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}) + \Theta \times \cdot \nabla \mathbf{v}_*. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Или в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{\times}}{dt} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \Theta_{\times}) - \frac{1}{2} ((\text{tr}\Theta)^2 - \Theta \cdot \Theta)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \\ - \boldsymbol{\omega} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta \mathbf{E}) + \Theta^T \times \cdot \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) + \Theta \times \cdot \nabla \mathbf{v}_*. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Далее принимаются упрощающие предположения: скорости считаются постоянными, следовательно деформации по трансляционным степеням свободы отсутствуют, плотность среды постоянна.

Учтем, что  $\mathbf{v} = \text{const}$ ,  $\mathbf{v}_* = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{\times}}{dt} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \Theta_{\times}) \\ - \frac{1}{2} ((\text{tr}\Theta)^2 - \Theta \cdot \Theta)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Если уравнение для деформаций по вращательным степеням свободы (3.24) оставить записанным через материальную производную, и произвести над ним те же самые операции, что и для уравнения выше (3.39), то можно прийти к следующей форме уравнения (3.39):

$$\frac{\delta\Theta_{\times}}{\delta t} = \nabla \times \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta \mathbf{E}) + \Theta \times \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla. \quad (3.40)$$

Далее будет использоваться уравнение (3.39).

### 3.2.3. Уравнение баланса кинетического момента

Баланс кинетического момента без учета внешнего момента имеет вид:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\tau}_{\times} = \rho \frac{\delta(J\boldsymbol{\omega})}{\delta t}. \quad (3.41)$$

Тензор моментных напряжений Коши вводится как антисимметричный тензор, что может быть представлено в виде:

$$\boldsymbol{\mu} = -\mathbf{M} \times \mathbf{E}, \quad (3.42)$$

где  $\mathbf{M}$  – сопутствующий вектор тензора моментных напряжений,  $\mathbf{E}$  – единичный тензор.

Тензор напряжений представляется в виде:

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Theta}_{\times})\mathbf{E} + \mathbf{M} \times \boldsymbol{\Theta}^T. \quad (3.43)$$

Вектор собственно момента определяется соотношением:

$$\mathbf{M} = C_{\Psi}\boldsymbol{\Theta}_{\times}, \quad (3.44)$$

где  $C_{\Psi}$  коэффициент жесткости.

После подстановки (3.42) и (3.43) в уравнение движения (3.41) получим:

$$-\nabla \times \mathbf{M} + \mathbf{M} \cdot (\boldsymbol{\Theta} - \text{tr}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{E}) = \rho \frac{\delta(J\boldsymbol{\omega})}{\delta t}. \quad (3.45)$$

Используем баланс масс в локальной форме:

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (3.46)$$

И перепишем правую часть уравнения (3.45):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\delta(J\boldsymbol{\omega})}{\delta t} &= \frac{\delta(\rho J\boldsymbol{\omega})}{\delta t} - \frac{\delta\rho}{\delta t} J\boldsymbol{\omega} = \frac{\delta(\rho J\boldsymbol{\omega})}{\delta t} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v})J\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{d(\rho J\boldsymbol{\omega})}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla(\rho J\boldsymbol{\omega}) + (\nabla \cdot \mathbf{v})\rho J\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{d(\rho J\boldsymbol{\omega})}{dt} + \nabla \cdot ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)\rho J\boldsymbol{\omega}) + (\nabla \cdot \mathbf{v}_*)\rho J\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{d\mathbf{K}}{dt} + \nabla \cdot ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)\mathbf{K}) + (\nabla \cdot \mathbf{v}_*)\mathbf{K} \end{aligned} \quad (3.47)$$

где  $\mathbf{K} = \rho J\boldsymbol{\omega}$  – объемная плотность собственно кинетического момента.

Тогда уравнение (3.45) примет вид:

$$-\nabla \times \mathbf{M} - \nabla \cdot ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)\mathbf{K}) = -\mathbf{M} \cdot (\boldsymbol{\Theta} - \text{tr}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{E}) + \frac{d\mathbf{K}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v}_*)\mathbf{K}. \quad (3.48)$$

Рассмотрим слагаемое:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)\mathbf{K}) &= \nabla \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) + 2((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)\mathbf{K})^A) \\
&= \nabla \cdot (\mathbf{K}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)) + 2\nabla \cdot \left[ -\frac{1}{2}((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{K}) \times \mathbf{E} \right] \\
&= (\nabla \cdot \mathbf{K})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) + \mathbf{K} \cdot \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \nabla \times ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{K}),
\end{aligned} \tag{3.49}$$

где за  $(\dots)^A$  обозначена антисимметричная часть тензора. Принимая во внимание (3.49), соотношение (3.45) запишется:

$$\begin{aligned}
-\nabla \times (\mathbf{M} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{K}) - (\nabla \cdot \mathbf{K})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \mathbf{K} \cdot \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \\
= -\mathbf{M} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}) + \frac{d\mathbf{K}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{v}_*)\mathbf{K},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

или в более удобном виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{K}}{dt} &= -\nabla \times (\mathbf{M} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{K}) - (\nabla \cdot \mathbf{K})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \\
&\quad + \mathbf{M} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}) - \mathbf{K} \cdot \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - (\nabla \cdot \mathbf{v}_*)\mathbf{K}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Учтем, что скорости принимаются постоянными, тогда

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\nabla \times (\mathbf{M} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{K}) - (\nabla \cdot \mathbf{K})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) + \mathbf{M} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}). \tag{3.52}$$

Если уравнение движения (3.45) оставить записанным через материальную производную, и произвести над ним те же самые операции, что и для уравнения выше (3.52), то можно прийти к следующей форме уравнения (3.52):

$$\frac{\delta\mathbf{K}}{\delta t} = -\nabla \times \mathbf{M} + \mathbf{M} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}) - (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{K}, \quad \frac{\delta}{\delta t} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \cdot \nabla. \tag{3.53}$$

Далее будет использоваться уравнение (3.52).

### 3.2.4. Сравнение полученных уравнений континуума Коссера с уравнениями Максвелла в подвижных средах

В данном параграфе проводятся электродинамические интерпретации: полученные уравнения континуума Коссера (3.39) и (3.52) сравниваются с уравнениями Максвелла в подвижных средах [3].

При постоянных векторах скорости уравнения механики в подвижной среде через полную производную получены в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_{\times}}{dt} &= \nabla \times (\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \Theta_{\times}) \\ &- \frac{1}{2}((\text{tr}\Theta)^2 - \Theta \cdot \Theta)(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) - \boldsymbol{\omega} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}), \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = -\nabla \times (\mathbf{M} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{K}) - (\nabla \cdot \mathbf{K})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) + \mathbf{M} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}). \quad (3.55)$$

Определяющие уравнения для среды Коссера:

$$\mathbf{M} = C_{\Psi}\rho^{-1}\Theta_{\times}, \quad \mathbf{K} = \rho J\boldsymbol{\omega}. \quad (3.56)$$

Механические аналогии в терминах электродинамических величин в подвижной среде:

$$\mathcal{D} = \chi\Theta_{\times}, \quad \mathcal{H} = \chi(\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \Theta_{\times}), \quad \mathcal{J} = \chi\boldsymbol{\omega} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}) + q(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*),$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\chi}\mathbf{K}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{\chi}(\mathbf{M} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{K}),$$

$$\mathcal{V} = -\frac{1}{\chi}[\mathbf{M} \cdot (\Theta - \text{tr}\Theta\mathbf{E}) - (\nabla \cdot \mathbf{K})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)],$$

$$C_{\Psi}\rho^{-1} = \frac{\chi^2}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad q = \frac{\chi}{2}((\text{tr}\Theta)^2 - \Theta \cdot \Theta), \quad \rho J = \chi^2\mu\mu_0.$$

(3.57)

Уравнения Максвелла в подвижной среде:

$$\frac{d\mathcal{D}}{dt} + \mathbf{J} = \nabla \times \mathcal{H}, \quad \nabla \cdot \mathcal{D} = q, \quad \frac{d\mathcal{B}}{dt} + \mathcal{V} = -\nabla \times \mathcal{E}, \quad \nabla \cdot \mathcal{B} = -\nabla \cdot \mathcal{V}. \quad (3.58)$$

Определяющие уравнения в терминах электродинамических величин в подвижной среде:

$$\mathcal{D} = \varepsilon \varepsilon_0 (\mathcal{E} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathcal{B}), \quad \mathcal{B} = \mu \mu_0 (\mathcal{H} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathcal{D}). \quad (3.59)$$

В таблице 3.1 проведено сравнение механических аналогий электродинамических величин и уравнений Максвелла для подвижных и покоящихся сред.

Таблица 3.1

Сравнение механических аналогий электродинамических величин для первого и второго уравнений Максвелла в покоящихся и движущихся средах

В неподвижной среде	В подвижной среде
Первое уравнение Максвелла	
$\frac{d\mathcal{D}}{dt} + \mathbf{J} = \nabla \times \mathcal{H}$	
$\mathcal{D} = \chi \Theta_{\times}, \quad \mathcal{H} = \chi \omega$ $\mathbf{J} = \chi \omega \cdot (\Theta - \text{tr} \Theta \mathbf{E})$ $q = \frac{\chi}{2} ((\text{tr} \Theta)^2 - \Theta \cdot \Theta)$	$\mathcal{D} = \chi \Theta_{\times}, \quad \mathcal{H} = \chi (\omega + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \Theta_{\times})$ $\mathbf{J} = \chi \omega \cdot (\Theta - \text{tr} \Theta \mathbf{E}) + q (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)$ $q = \frac{\chi}{2} ((\text{tr} \Theta)^2 - \Theta \cdot \Theta)$
Второе уравнение Максвелла	
$\frac{d\mathcal{B}}{dt} + \mathcal{V} = -\nabla \times \mathcal{E}$	
$\mathcal{B} = \frac{1}{\chi} \mathbf{K}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{\chi} \mathbf{M}$ $\mathcal{V} = -\frac{1}{\chi} \mathbf{M} \cdot (\Theta - \text{tr} \Theta \mathbf{E})$	$\mathcal{B} = \frac{1}{\chi} \mathbf{K}, \quad \mathcal{E} = \frac{1}{\chi} (\mathbf{M} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{K})$ $\mathcal{V} = -\frac{1}{\chi} [\mathbf{M} \cdot (\Theta - \text{tr} \Theta \mathbf{E}) - (\nabla \cdot \mathbf{K})(\mathbf{v} - \mathbf{v}_*)]$

Благодаря использованию механической модели получены уравнения Максвелла, которые в подвижной и неподвижной среде выглядят одинаково.

Этот результат согласуется с современными представлениями, принятыми в физике: в современных учебниках по физике [1], [3 §76] и в работе Минковского [16] уравнения Максвелла в подвижных и неподвижных средах тоже выглядят одинаково.

Отличие полученных уравнений Максвелла от уравнений Максвелла в литературе заключается в слагаемом  $\mathcal{V}$ , характеризующем, согласно [15], плотность электрического напряжения на единицу площади, и в полных производных вместо частных. Отличие производных проявляется, как только вводится подвижная система координат.

### 3.2.5. Сравнение полученных определяющих уравнений в терминах электродинамических величин с уравнениями Лоренца и Минковского

В данном подразделе проводятся электродинамические интерпретации: определяющие уравнения континуума Коссера в терминах электродинамических величин сравниваются с уравнениями Лоренца и Минковского в подвижных средах.

В таблице 3.2 проведено сравнение определяющих уравнений в терминах механических и электродинамических величин для подвижных и покоящихся сред.

Таблица 3.2

Сравнение механических и электродинамических определяющих уравнений в покоящихся и движущихся средах

В неподвижной среде	В подвижной среде
$M = C_{\Psi} \rho^{-1} \Theta_{\times}, \quad C_{\Psi} \rho^{-1} = \frac{\chi^2}{\varepsilon \varepsilon_0}$	
$\mathcal{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathcal{E}$	$\mathcal{D} = \varepsilon \varepsilon_0 (\mathcal{E} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathcal{B})$

$K = \rho J \omega, \quad \rho J = \chi^2 \mu \mu_0$	
$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathcal{H}$	$\mathbf{B} = \mu \mu_0 (\mathcal{H} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathcal{D})$

Определяющие уравнения континуума Коссера в терминах электродинамических величин в неподвижных средах и определяющие уравнения в электродинамике [16] для неподвижных сред совпадают.

Получены следующие определяющие уравнения для движущихся сред:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 (\mathcal{E} + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B} &= \mu \mu_0 (\mathcal{H} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_*) \times \mathcal{D}). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Следовательно, определяющие уравнения континуума Коссера в терминах электродинамических величин в подвижных и в покоящихся средах отличаются.

В работах [1], [7], [16] определяющие (материальные) уравнения, связывающим  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathcal{H}$ , для подвижных сред записывают в видах, представленных ниже.

Материальные уравнения Лоренца:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} + \mathbf{v} \times \mathcal{H} &= \varepsilon (\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathcal{H}), \\ \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathcal{E} &= \mu (\mathcal{H} - \mathbf{v} \times \mathcal{E}). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Материальные уравнения Минковского:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} + \mathbf{v} \times \mathcal{H} &= \varepsilon (\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \\ \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathcal{E} &= \mu (\mathcal{H} - \mathbf{v} \times \mathcal{D}). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Таким образом, определяющие уравнения для подвижных сред, представленные в современной литературе по физике [1], [16] и в [7], а именно, уравнения Минковского и уравнения Лоренца, тоже отличаются от уравнений в

неподвижной среде. Но для подвижных сред полученные определяющие уравнения, уравнения Лоренца и уравнения Минковского не совпадают.

Уравнения (3.62) были получены Минковским входе применения к определяющим уравнениям для неподвижных тел, преобразования Лоренца.

Уравнения Минковского также записывают в системе СГС:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{H} &= \varepsilon \left( \mathcal{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right), \\ \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathcal{E} &= \mu \left( \mathcal{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{D} \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Можно заметить, что при записи уравнений Минковского (3.63) в СИ в левой части вместо множителя  $\frac{1}{c}$  будет множитель  $\frac{1}{c^2}$ , в правой части коэффициента не будет. При конечных скоростях, не близких к скорости света, в левой данные слагаемые  $\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathcal{H}$  и  $\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathcal{E}$  будут малыми величинами второго порядка (по сравнению со слагаемыми правой части), которыми можно пренебречь.

В результате при малых скоростях уравнения Минковского (3.63) и полученные определяющие уравнения (3.60) будут совпадать. При больших скоростях необходимы дальнейшие исследования, выходящие за рамки данной работы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы данной работы:

1. Уравнения механики записываются в двух интегральных формах только в случае антисимметричности тензоров напряжений. В этом случае уравнения механики могут сравниваться с уравнениями электродинамики не только в локальных, но и в интегральных формах.

2. Уравнения Максвелла всегда можно записать в двух интегральных формах: в классической и аналогичной механике. Законы Гаусса для электрического и магнитного полей, выводимые в механике и электродинамике, получаются одинаковыми.

Сформулируем основные результаты данной работы:

1. Путем применения пространственного описания с подвижной точкой наблюдения получены уравнения Максвелла в подвижных средах. Показано, что полученные уравнения по форме совпадают с уравнениями Герца для подвижных сред, отличаются полной производной и скоростью среды относительно наблюдателя. Преимущество полученных уравнений в том, что они обобщаются на случай, когда скорость среды и скорость точки наблюдения не являются постоянными величинами.

2. Предложено обобщение механической модели электромагнитного поля для случая подвижных сред. Благодаря использованию данной модели и соответствующих механических аналогий электродинамических величин получены уравнения Максвелла и уравнения Гаусса в подвижных средах. Полученные уравнения в подвижной и неподвижной среде выглядят одинаково. Результат согласуется с современными концепциями, принятыми в электродинамике. Получена замкнутая система уравнений. Определяющие уравнения в подвижных и неподвижных средах получены разными и отличаются от материальных уравнений Лоренца и уравнений Минковского.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотовский Б. М., Столяров С. Н., “Современное состояние электродинамики движущихся сред (Безграничные среды)”, УФН, 114:4 (1974), 569–608; Phys. Usp., 17:6 (1975), 875–895.
2. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие / П. А. Жилин. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. –584 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. – 4-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 656 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учебник для вузов.
5. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. 1972.
6. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 2.
7. Abraham M. Zur Elektrodynamik bewegter Körper [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXVIII (2° sem. 1909), pp. 1–28].
8. Brazgina O. V., Ivanova E. A., Vilchevskaya E. N. Saturated porous continua in the frame of hybrid description. Continuum Mechanics and Thermodynamics (2016).
9. Hertz H. Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. 1890. [Gesammelte Werke, Bd. II, pp. 256–285].
10. Ivanova E. A. Thermo-electrodynamics of conductive media based on the nonlinear viscoelastic Cosserat continuum of a special type.
11. Ivanova E. A., Vilchevskaya E. N. Micropolar continuum in spatial description. Continuum Mechanics and Thermodynamics, (2016), 1-22.
12. Ivanova E. A., Vilchevskaya E.N., Müller W. H.: Time derivatives in material and spatial description – What are the differences and why do they concern us? Advanced Methods of Continuum Mechanics for Materials and Structures, (2016), pp.3-28.

13. Ivanova E. A.: A new approach to modeling of thermal and electrical conductivities by means of the Cosserat continuum. *Contin. Mech. Thermodyn.* (2022).
14. Ivanova E. A.: Modeling of physical fields by means of the Cosserat continuum. *Z. Angew. Math. Mech.* (2022).
15. Ivanova E.A.: Modeling of electrodynamic processes by means of mechanical analogies. *Z. Angew. Math. Mech.* (2021).
16. Minkowsky H., Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. [Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1908, pp. 53–111].; то же: *Math. Ann.* 78, 472 (1910).
17. Tiersten, H. F.: Coupled magnetomechanical equations for magnetically saturated insulators. *J. Math. Phys.* 5(9), (1964).
18. Wang, X.S.: Derivation of Maxwell's equations based on a continuum mechanical model of vacuum and a singularity model of electric charges. *Prog. Phys.* 2, 111–120 (2008).
19. Whittaker, E.: *A History of the Theories of Aether and Electricity. The Classical Theories.* Thomas Nelson and Sons Ltd, London (1910).