Лекция 1

Нужно хорошо знать Механику, чтобы создавать такие машины

<http://www.youtube.com/watch?v=4YbFr3bErhY&feature=player_embedded>

Рекомендуемая литература:

1. Электронный конспект лекций (URL объявлен)
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р*.* Курс теоретической механики. СПб: Лань, 1998.
3. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике. СПб: Лань, 2006

## Кирсанов М.Н. — Электронный решебник. Теоретическая механика. Сайт: <http://reslib.com/book/Reshebnik__Teoreticheskaya_mehanika>

# СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Векторная алгебра сил**

**Предмет и модели механики.**

Классическая или Ньютонова механика является разделом физики, в котором изучаются основные законы механического взаимодействия и движения твердых тел.

История развития механики насчитывает тысячелетия. Практически человек стал интересоваться механикой и интуитивно использовать ее законы, когда старался точнее бросить камень на охоте. С тех пор механика прошла огромный путь. Опыт первых исследователей смогли обобщить, заложив основы классической механики, такие мыслители древности, как Архимед (3 век до нашей эры), Леонардо Да Винчи (15в), Галилей и Декарт (16в). Современный вид механика приобрела благодаря гениям Гюйгенса и Ньютона (17в), Эйлера и Лагранжа (18в).

Курс механики принято делить на три основные части: СТАТИКА, КИНЕМАТИКА и ДИНАМИКА. В СТАТИКЕ изучаются условия покоя тел, КИНЕМАТИКА является языком описания их движения, а в ДИНАМИКЕ, собственно и являющейся механикой, выводятся законы движения тел под действием сил. Поскольку покой есть частный случай движения, то уравнения статики было бы легче получить из законов движения тела. Однако они необходимы вам уже сейчас для изучения других механических дисциплин, поэтому мы начинаем со статики.

***Модели механики***

Как любая точная наука механика рассматривает не реальные, бесконечно сложные физические объекты, а их модели, отражающие лишь главные в данных условиях свойства.

Объектом классической механики является система взаимодействующих материальных точек, называемая *механической системой*.

Частным случаем механической системы, является ***твердое тело*** - модель реального тела, представляющая собой систему материальных точек, расстояние между которыми не изменяется со временем. Деформации большинства инженерных сооружений пренебрежимо малы, поэтому модель твердого тела оправдана. Тем более что она значительно упрощает изучение движения и покоя тела и эти результаты применимы к реальному телу.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

## Сила.

## Модуль, проекция и составляющая силы.

Все тела находятся во взаимодействии. Например, маленький шарик, висящий на нити, взаимодействует с Землей и нитью. Оба воздействия имеют точку приложения (сам шарик), линию действия (вертикаль), направление (противоположные) и величину (одинаковый модуль).

Величины, характеризуемые линией действия, направлением и модулем в математике называются векторами. Поэтому за меру воздействия одной точки на другую принят вектор

который называют ***cилой.***

Формальные математические операции с векторами изложены в Приложении.

При решении задач оперируют числами, а не векторами. Поэтому пользуются скалярным представлением вектора, например, тремя его проекциями на декартовы оси x,y,z. Они образуют вектор-столбец.

*F =*(1)

**Fα**

αα

хα

Рис. 1

Напомним, что проекцией вектора на ось х называется скалярная величина, равная

Знак проекции определяется знаком косинуса угла между направлениями силы и оси. Если угол острый, то проекция положительна, если тупой- то она отрицательна. Проще говоря, проекция положительна, если направление силы совпадает с точностью до π/2 с направлением оси.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Важно помнить, что ***проекция*** ***силы на перпендикулярную ей ось*** ***РАВНА НУЛЮ***.

В письме вектор условимся надчеркивать , в печати выделять жирным шрифтом.

Модуль вектора будем обозначать той же буквой, но без черты в письме или нежирно в печати: F. Модуль силы измеряется в ньютонах Н (Международная система СИ) или килограммах кГ (Техническая система единиц)

Известно, что в математике векторы складываются по правилу параллелограмма (Рис 2 b).

Потренироваться в сложении и вычитании векторов можно на сайте

<http://www.frontiernet.net/~imaging/vector_calculator.html>

**Fz**

**F**

**F1**

**F2**

**F2**

**Fn**

**F1**

**F2**

**F**

**F**

**Fz**

**Fx**

**Fy**

x

y

**Fy**

**Fx**

**F**

a)

b)

c)

d)

**k**

**i**

**j**

z

α

Рис.2

β

Из правила паралеллограмма вытекает правило разложения вектора на составляющие вдоль двух направлений. Для этого через концы вектора проводятся линии, параллельные заданным направлениям. ***Составляющей*** вектора называется любое из слагаемых в векторной сумме

На Рис.2а составляющие вектора образуют ***векторный многоугольник***, в котором начало последующей силы совпадает с концом предыдущей. Вектор замыкает векторный многоугольник.

Представим вектор силы **F** его проекциями на декартовы оси c ортами :

Слагаемые в этом выражении назовем ***составляющими-проекциями***  вектора **F** (Рис.3с,d).

Проекции определяют модуль вектора по теореме Пифагора:

Таким образом, будем различать следующие обозначения

***вектор***: в печати , в письме или

***составляющая-проекция на ось x:,*** в письме или

***составляющая-проекция на плоскость xy:,*** в письме или

модуль вектора: ,

проекция вектора:

***В письменных работах обозначение вектора буквой без стрелки или черты недопустимо !***

**Система сил.**

**Главный вектор системы сил.**

***Системой сил*** называется множество сил, приложенных к точкам механической системы. ***Главным вектором*** системы сил называется векторная сумма всех сил системы:

**F1**

**F2**

**F3**

**Fn**

**V**

x

y

z

**F1**

**F2**

**F3**

**Fn**

Рис.3

О

Главный вектор **V** можно найти, построив в произвольном центре О векторный многоугольник (рис.3).

Для пространственной системы сил построить многоугольник практически трудно. Проще найти главный вектор аналитически. Проектируя слагаемые формулу (6) на оси координат, определим проекции главного вектора, его модуль и направляющие косинусы:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Момент силы относительно точки.**

**Теоремы о моменте.**

Понятие момента силы возникает при рассмотрении твердого тела. Опыт показывает, что, если зафиксировать некоторый центр О в теле, то сила **F,**  приложенная в другой точке А тела может повернуть тело вокруг О. Эту способность силы поворачивать тело и характеризует ее момент относительно О.

Обозначим через **r** радиус-вектор точки А приложения силы относительно центра О. ***Моментом силы F относительно центра О*** называется вектор **mo(F)** (Рис.4), равный векторному произведению радиуса-вектора точки приложения силы на вектор силы

Направление векторного произведения будем определять по правилу  ***правого винта:*** с конца **mo**  видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

**m**o(**F**)

**F**

**r**

h

β

α

O

Рис.4

Модуль момента равен произведению модуля силы на плечо h -длину перпендикуляра, опущенного из центра О на линию действия силы.

***Теорема 1. О зависимости момента от центра.***

Найдем связь между моментами силы **F** относительно центров А и В. Из Рис.6 видно, что

Таким образом

Формула (10) показывает, что:

а) в общем случае момент силы зависит от центра

б) перенос центра параллельно линии действия силы не изменяет момента (в этом случае второе слагаемое в (10) обращается в ноль..

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

***Теорема 2. О проекциях моментов.***

Проектируя (10) на ось z, проходящую через А и В, находим

z

**mA**

**mB**

A

B

**rA**

**rB**

**F**

Рис.7

поскольку произведение **АВ** х **F** перпендикулярно АВ и его проекция на z равна нулю. Таким образом, приходим к теореме:

***Проекции моментов силы относительно всех точек одной оси на эту ось равны между собой***.

Поэтому можем сделать вывод, что m**z**(F) характеризует действие силы по отношению к оси z, и назвать ее ***моментом силы относительно оси*** (см. ниже).

**Момент силы относительно оси**

Теорема о проекциях позволяет ввести в рассмотрение новую характеристику силы по отношению к оси. ***Моментом силы F относительно оси z*** называется алгебраическая величина, равная проекции на эту ось момента силы относительно произвольной точки указанной оси.

Рассмотрим способ вычисления и свойства момента относительно оси. Пользуясь произволом выбора центра моментов на оси, выберем в качестве такового т.О- проекцию точки А приложения силы на ось z. Обозначив через **k** орт оси z, и применив круговую перестановку в смешанном произведении, запишем

z

h

**k**

**τ**

**k** x **OA**

**F**

A

α

**+**

O

Рис.8

Здесь учтено, что произведение направленно вдоль τ по правилу правого винта. Его модуль равен расстоянию ОА = h от точки приложения сил до оси.

Формула (13) показывает, что:

1. Момент силы относительно оси дает только составляющая силы, направленная по касательной t к окружности радиуса h.
2. Знак момента определяется знаком Cosα. Из Рис.8 вытекает

следующее правило знаков:

***Момент силы относительно оси положителен, если с конца оси видно,***

***что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки****.*

Из формулы (13) вытекает, что момент силы относительно оси равен нулю в случае, если сила и ось лежат в одной плоскости (α = /2). Это происходит, когда

1. сила параллельна оси
2. линия действия силы пересекает ось

Вы это ощущаете, поднимая воротом ведро из колодца, и поэтому стараетесь приложить силу руки так, чтобы создать большее плечо.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

## Алгебраический момент силы относительно центра для плоской системы сил.

Система сил, расположенных в одной плоскости, называется ***плоской***. Совместим плоскость xy с плоскостью действия сил. В этом случае силы создают момент только относительно оси оси z, перпендикулярной плоскости действия сил. Совмещая плоскость сил с плоскостью листа, читатель видит направленную к нему ось z как точку O и называет момент относительно оси z ***алгебраическим моментом силы относительно точки O***

О

х

z

y

**Fk**

**mo**(**Fk**)

Рис.2

Правило знаков:

Момент положителен, если видно, что сила стремится повернуть тело против часовой стрелки.

## 

#### Главный момент системы сил.

#### Зависимость главного момента от центра.

***Главным моментом*** системы сил {**F**} относительно центра А называется вектор **MA** , равный векторной сумме моментов всех сил системы относительно этого центра.

Аналитически главный момент находят по его проекциям на декартовы оси

которые логично назвать главными моментами системы сил относительно осей x, y, z. По ним легко найти модуль и направление главного момента:

Найдем зависимость между главными моментами относительно двух центров А и В. Суммируя полученную ранее зависимость для одной силы по всем силам системы, получим:

Здесь учтено определение главного вектора

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Видим, что в отличие от момента одной силы, главный момент системы сил может не зависеть от центра в случае, если главный вектор системы окажется равным нулю.

если

**Вращательная система сил.**

**Пара сил.**

Назовем систему сил с нулевым главным вектором ***вращательной системой.*** Название можно объяснить тем, что такая система придает вращение свободному покоящемуся телу, оставляя его центр тяжести в покое. Формула (18) показывает, что главный момент вращательной системы не зависит от центра.

**m**

**F**

**F’**

B

A

h

O

Рис.3

П

Простейшей вращательной системой является  ***пара*** сил: ***система двух равных по модулю противоположно направленных сил, не лежащих на одной прямой***. Расстояние h между линиями действия сил пары называется ***плечом пары***. Главный вектор сил пары равен нулю, поэтому ее главный момент не зависит от центра О и называется ***моментом пары m*** . Он может быть найден как момент одной из сил пары относительно точки приложения второй силы.

Момент пары перпендикулярен плоскости пары и направлен в сторону, откуда видно, что пара стремится повернуть тело против часовой стрелки.

## Лекция 2

# Принципы (аксиомы) механики

# Условия сохранения покоя материальной точки

## .

Как все точные науки, механика базируется на недоказуемых постулатах, вытекающих из опыта и называемых ***аксиомами***. Являющиеся плодом размышлений многих поколений исследователей, аксиомы механики были окончательно сформулированы ***Исааком Ньютоном*** в 17 веке и поэтому носят его имя. Основные законы Ньютона наглядно демонстрируются в фильме

<http://www.youtube.com/watch?v=iH48Lc7wq0U&feature=related>

### *Принцип инерции Галилея*

***Существует система отсчета, называемая «инерциальной», в которой изолированная точка сохраняет состояние покоя (или прямолинейного равномерного движения)***.

***Изолированной*** называется абстрактная точка, не взаимодействующая с другими точками.

До Галилея считалось, что для равномерного движения (телеги) нужна сила.

Все законы механики формулируются и справедливы только в инерциальной системе отсчета.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

1. ***Основной принцип*** *(второй закон Ньютона)*

***Ускорение материальной точки пропорционально действующей***

***на нее силе и обратно пропорционально массе точки***

***Следствие:*** *В инерциальной системе отсчета покой точки может быть нарушен только действием силы* ***F*** *.*

### *Принцип внутренней аддитивности (третий закон Ньютона).*

### *Свойства внутренних сил.*

***Силы взаимодействия двух точек равны по модулю, противоположны***

***по направлению и лежат на прямой, проходящей через точки.***

Силы взаимодействия точек тела называются внутренними (индекс **i**).

***Следствие- Свойства внутренних сил***  Внутренние силы парны, значит их главный вектор и главный момент равны нулю.

(2)

### *Принцип внешней аддитивности (правило сложения сил)*

Ускорение точки, вызываемое действием системы сил равно ускорению, вызываемому силой

**F= F1+ F2**

**F2**

**F1**

Рис.1

называемой ***равнодействующей.*** Говорят, что равнодействующая ***эквивалентна*** системе сил

Для двух сил принцип дает ***правило параллелограмма*** (Рис.1):

{**F1 F2} ~** **F = F1 + F2**

***Следствие 1:***  Второй закон Ньютона можно обобщить на случай действия нескольких сил

***Следствие 2: Необходимое и достаточное условие сохранения покоя точки есть равновесие сил, приложенных к точке***

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Таким образом, в покое остается не только изолированная точка, но и точка под действием системы сил, сумма которых равна нулю.

Необходимость условия (4) означает, что если точка находится в покое, то условие (4) выполнено. При этом среди сил должны быть неизвестные, которые можно найти из уравнения (4). Так, силы, действующие на люстру, удовлетворяют условию (4), поскольку люстра находится в покое. Из двух сил, действующих на люстру нам известна только сила тяжести люстры. Из соотношения (4) мы находим, что натяжение троса равно по модулю и противоположно по направлению силе тяжести люстры.

Достаточность означает, что если все силы заданы, то с помощью (4) можно проверить останется ли точка в покое. Скажем, мы знаем, что к точке приложены две силы. Составив их сумму (4), мы поймем, что равновесие возможно только при парности сил.

Внешние силы любой покоящейся механической системы уравновешены.

Рассмотрим покоящуюся механическую систему: счетное множество взаимодействующих между собой и с миром материальных точек с массами (Рис.2)

Рис.2

m2

m1

mk

m3

На точку системы действуют неизвестные *внутренние силы* со стороны других точек системы. Их равнодействующую обозначим. Равнодействующую внешних сил со стороны точек, не принадлежащих системе, обозначим

Ввиду покоя условия

с необходимостью выполнены.

Исключим неизвестные внутренние силы. Суммируя (5) по k, и учитывая, что главный вектор внутренних сил равен нулю, получаем

Векторно умножив слева (5) на радиус-вектор точки rk, после суммирования получим второе условие

Таким образом, для любой покоящейся системы, в том числе и для твердого тела с необходимостью выполнены условия *равновесия* внешних сил

(6)

которые соответствуют отсутствию перемещения и поворота системы как твердого тела.

В статике изучают неподвижное тело. Чаще всего его неподвижность обеспечена другими неподвижными телами, на Рис.3 С1 С2 С2 , называемыми  *связями* (Рис.3)*.*  Силы, действующие на тело со стороны связей, называются  *реакциями связей.*

Кроме реакций связей, со стороны удаленных тел (То)на тело Т действуют силы, называемые *нагрузкой.* Они считаются известными, поскольку могут быть вычислены по законам физики.

Рис.3

Т1

С1

С2

С3

Т0

*Основной задачей* статики является определение реакций связей по заданной нагрузке.

Ввиду покоя тела, условия (6) выполнены при любой нагрузке, и становятся уравнениями для определения реакций связи:

Перенесем известные силы направо, и запишем уравнения в виде:

Здесь индексом R обозначены искомые реакции связей, а индексом а – нагрузка.

В проекциях на оси x,y,z два векторных условия (7) дают шесть алгебраических уравнений относительно реакций связей, которые можно записать в матричном виде

# (8)

Здесь *х* – столбец искомых реакций связей, у – столбец известной нагрузки,  *А* - матрица системы, определяемая структурой связей. В статике рассматриваются только ***определимые*** связи, число неизвестных которых равно числу уравнений, а определитель матрицы отличен от нуля.

(9)

В этом случае уравнения (8) имеют однозначное решение, а при отсутствии нагрузки решение является нулевым. Это значит, что все реакции ***определимых*** связей исчезают при отсутствии нагрузки. Это свойство служит признаком определимости связей.

Из однозначности решения уравнений (8) вытекает, что нагрузки и с одинаковыми главными векторами и моментами вызывают одинаковые реакции. Такие нагрузки называются *статически* *эквивалентными*. Обозначают

Отсюда следует *теорема Пуансо*: Любая нагрузка {F} статически эквивалентна одной силе , равной главному вектору нагрузки, и приложенной в произвольной точке О тела, и паре сил с моментом , равным главному моменту нагрузки относительно точки О. Это так, поскольку главные векторы и моменты систем одинаковы.

Если в теле есть точка А, относительно которой главный момент нагрузки равен нулю , то нагрузка имеет равнодействующую , проходящую через точку А. Поэтому равномерно и линейно распределенные нагрузки интенсивности q (Рис.2) имеют равнодействующие Q.

L

L

L/2

Q = Lq

Q = Lq/2

L/3

A

A

q

q

Рис.4

Из теоремы Пуансо вытекает также, что силу в твердом теле можно перемещать вдоль линии действия, а пару сил перемещать и изменять как угодно, не изменяя вектора ее момента. При этом реакции опор не изменятся.

Силы реакции (Рис.3) тоже распределены по некоторым площадкам контакта тела со связью. Из шести уравнений равновесия найти их распределение невозможно. Но можно найти эквивалентные им силу и момент реакции.

Самой «сильной» связью является *глухая заделка*, когда, например, стержень забетонирован в стену (Рис.4). Такая связь полностью фиксирует стержень при любой нагрузке.

**R**

**m**

Рис.4

Распределенные по заделанной части стержня реакции связи приводятся по теореме Пуансо к произвольно направленным силе и моменту реакций. Таким образом, при нагружении стержня возникают 6 неизвестных: по 3 составляющих силы и момента вдоль декартовых осей. При отсутствии нагрузки ,

Более слабые связи с меньшим числом неизвестных получают из глухой заделки путем снятия ограничений на перемещение или поворот вокруг одной из осей. Например, вставив стержень в гладкое отверстие, снимем ограничение на перемещение стержня вдоль и вращение вокруг его оси. Соответственно исчезнут составляющие силы и момента реакций вдоль стержня. Полученная связь называется *скользящей заделкой*. В ней возникает уже только 4 неизвестных.

Ясно, что скользящая заделка не может обеспечить покой тела под действием произвольной нагрузки. Значит, потребуются дополнительные связи, дающие еще две неизвестные.

Всего неизвестных в пространстве всегда должно быть 6. Подробнее о связях будет сказано на практических занятиях.

**Скалярные условия равновесия частных систем сил.**

***а) Произвольная пространственная система сил***

Хотя соотношения механики имеют векторный характер, все вычисления обычно ведутся в скалярной форме. Переход к скалярной форме осуществляется проектированием векторных соотношений на оси координат. Векторные условия равновесия **V=0, Mo=0** в проекциях на декартовы оси координат дают шесть скалярных уравнений:

***б) Пространственная система сходящихся сил.***

***Сходящейся*** называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Главный момент такой системы относительно точки пересечения сил О равен нулю **Mo= 0**. Поэтому уравнения моментов в (10) тождественно удовлетворены, и остается три уравнения:

О

Рис.5

***в) Пространственная система параллельных сил***

Направим ось z параллельно силам. Тогда главный вектор **V** будет параллелен z, а главный момент **Мо**, будет принадлежать плоскости x y. Три условия в (10) тождественно удовлетворены и остается 3 уравнения:

***г) Плоская система сил.***

В произвольной точке О плоскости сил (Рис.6) построим систему координат xОу так, чтобы плоскость ху совпала с плоскостью сил. Главный вектор системы **V** лежит в плоскости xOy, а главный момент **Mo** ей перпендикулярен. Следовательно, три уравнения в (10) тождественно удовлетворены, и для равновесия системы достаточно потребовать

x

y

z

**M0**

**V**

Рис.6

О

I) (13)

Можно показать, что справедливы еще две формы уравнений равновесия для плоской системы сил:

II) () не перпендикулярно (14)

III) (ABC- не на одной прямой) (15)