

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ,

Д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

_____ А.М. Кривцов

« ___ » _____ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Исследование влияния топологических характеристик метаматериалов на их макроскопические механические свойства

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Направленность

01.03.03_01 «Механика и математическое моделирование сред с микроструктурой»

Выполнил

Студент гр. 5030103/90101

Л.С. Нежинская

Руководитель

Доцент ВШТМиМФ, к.т.н, доцент

О.А. Троицкая

Консультанты

М.А. Жмайло
Ф.Д. Тарасенко

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Нежинской Лилии Сергеевне, гр. 5030103/90101

1. Тема работы: Исследование влияния топологических характеристик метаматериалов на их макроскопические механические свойства
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: геометрия и топология элементарных ячеек, справочная литература, актуальные научные публикации по теме работы.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): разработка алгоритма численного метода решения задачи, анализ и применение полученных результатов в оптимизационном расчете, обработка и верификация результатов.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: М.А. Жмайло, ведущий инженер Передовой инженерной школы "Цифровой инжиниринг"; Ф.Д. Тарасенко, инженер-исследователь Передовой инженерной школы "Цифровой инжиниринг".
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР: О.А. Троицкая, доцент ВШТМиМФ, к.т.н., доцент

Задание принял к исполнению: 27.02.2023

Студент: Л.С. Нежинская

РЕФЕРАТ

На 104 с., 93 рисунка, 15 таблиц, 1 приложение.

**МЕТАМАТЕРИАЛ, РЕШЕТЧАТЫЕ СТРУКТУРЫ, ГОМОГЕНИЗАЦИЯ,
МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ,
ТОПОЛОГИЯ**

В данной работе проводится теоретическое и экспериментальное исследование решетчатых метаматериалов с точки зрения взаимосвязи топологических характеристик элементарных ячеек материала и механических свойств, полученных методом гомогенизации. Проведена оценка методов определения макроскопических свойств метаматериалов и различных вариантов изменения топологии, которые влияют на механические свойства материала. Описан процесс разработки изделия, в состав которого входят решетчатые структуры, на примере бедренного компонента эндопротеза тазобедренного сустава.

THE ABSTRACT

104 pages, 93 pictures, 15 tables, 1 appendix.

**METAMATERIAL, LATTICE STRUCTURES, HOMOGENIZATION, FINITE
ELEMENT METHOD, FINITE ELEMENT ANALYSIS, TOPOLOGY**

In this paper, a theoretical and experimental study of lattice metamaterials is carried out in terms of the relationship between the topological characteristics of the elementary cells of the metamaterials and the mechanical properties obtained by homogenization. Ways of determining the macroscopic properties of metamaterials and mechanisms of how the topology affects the mechanical properties of the material are evaluated. An algorithm for the development of a product, which includes lattice structures, is described by the example of the femoral component of a hip endoprosthesis.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
Анализ литературы	8
ГЛАВА 1. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТОПОЛОГИИ МАТЕМАТЕРИАЛА НА ЕГО МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА.....	10
1.1. Гомогенизация как метод оценки эквивалентных свойств решетчатых метаматериалов	10
1.2. Описание типов элементарных ячеек.....	14
1.3. Аналитический метод определения параметров материала.....	16
1.4. Определение параметров конечно-элементного расчета	19
1.5. Расчет упругих характеристик метаматериала в зависимости от его топологии	26
1.5.1. Результат конечно-элементной гомогенизации при фиксированном диаметре стержня, образующего элементарную ячейку.....	26
1.5.2. Исследование влияния объемной доли материала на механические характеристики метаматериала	27
1.5.3. Исследование влияния геометрических соотношений элементарной ячейки на механические характеристики метаматериала.....	42
1.5.4. Исследование влияния изменения угла между стержнями, образующими ячейку, на механические характеристики метаматериала.....	53
1.5.5. Исследование влияния направления локальных осей элементарной ячейки на механические характеристики метаматериала.....	59
1.5.6. Выводы о влиянии топологии решетчатой структуры на механические свойства метаматериала	70

ГЛАВА 2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДЕТАЛИ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ В СЕБЯ РЕШЕТЧАТЫЕ СТРУКТУРЫ	72
2.1. Описание конечно-элементной модели	72
2.2. Описание нагрузок и результаты.....	77
2.2.1. Первый сценарий нагружения	77
2.2.2. Второй сценарий нагружения	81
2.3. Проектирование геометрии, включающей в себя решетчатые структуры ..	85
2.4. Результат нагружения геометрии, включающей решетчатые структуры....	88
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	94
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	96
Приложение 1. Код Matlab, в котором реализованы повороты локальных осей элементарной ячейки	98

ВВЕДЕНИЕ

За последнее десятилетие аддитивные технологии, как группа производственных технологий с широким спектром возможностей и малым количеством ограничений, сделали возможным изготовление уникальных металлических и полимерных деталей и компонентов, которые ранее не могли быть произведены традиционными технологиями. Метаматериалы, физическими и механическими свойствами которых можно управлять путем изменения формы и параметров элементарной ячейки, являются одним из примеров таких структур.

Современная высокотехнологичная промышленность имеет потребность в новых материалах для производства изделий, хорошо применимых в условиях сверхвысоких механических, тепловых, электромагнитных и других физических нагрузок. Предполагается, что получаемые с помощью 3D-печати метаматериалы будут обладать требуемыми для промышленных изделий свойствами с возможностью их гибкой адаптации под нагружение.

Метаматериалами называют искусственно созданные композиционные материалы, механические свойства которых в основном зависят не от свойств составляющих элементов, а от внутренней структуры. Периодическая структура материала в таком случае создается искусственно для обеспечения уникальных механических, акустических и иных свойств, которые недоступны для однородных материалов.

Типичным примером метаматериалов являются решетчатые периодические структуры, которые образованы путем дублирования элементарной ячейки в направлениях трех некопланарных векторов, на которых построен параллелепипед, описывающий элементарную ячейку. Такая структура обладает трехмерной периодичностью, период которой определяется геометрическими размерами элементарной ячейки. Таким образом, метаматериал – аддитивно произведенный материал, состоящий из большого числа элементарных ячеек, размер которых значительно меньше размера детали,

изготовленной из метаматериала. Внешний вид типичных решетчатых метаматериалов представлен на рисунке 1.

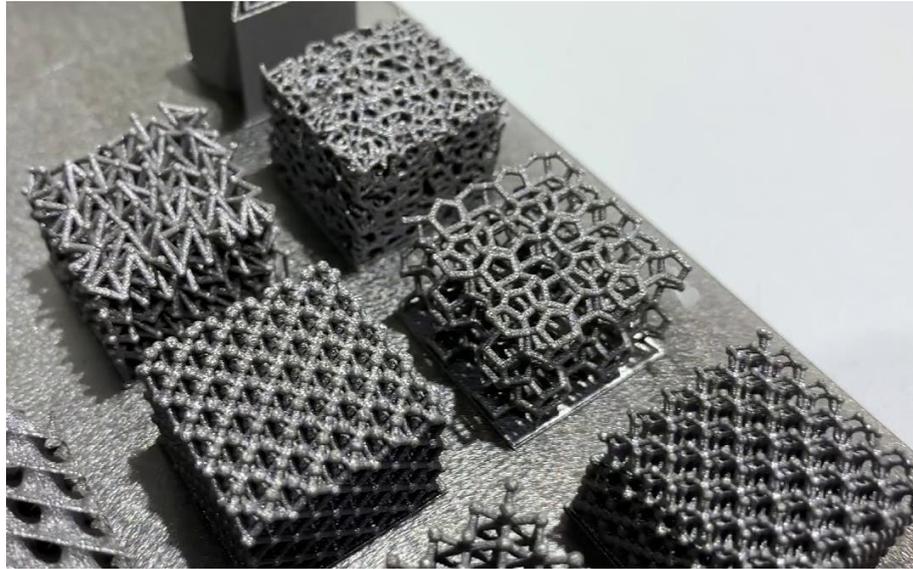


Рис.1. Аддитивные металлические метаматериалы

Целью данной работы является разработка и исследование метаматериалов на основе решетчатых структур заданной топологии с применением технологий компьютерного инжиниринга. Документ состоит из двух глав. В первой главе описывается подход к оценке механических характеристик метаматериалов на основе метода гомогенизации, описывается процесс выбора, результат построения компьютерных геометрических моделей типичных структур как базовых ячеек периодичности метаматериалов. Также первая глава содержит описание численной гомогенизации и полученные результаты для каждого типа элементарной ячейки. После чего проводится более глубокий анализ влияния топологии элементарной ячейки на полученные механические характеристики метаматериала. Вторая глава содержит подробное описание процесса проектирования и расчета детали, включающей в себя решетчатые структуры с градиентными свойствами.

Анализ литературы

Исследование зависимости механических свойств решетчатых метаматериалов от топологических особенностей структуры является актуальным направлением в области материаловедения. Тема изучения метаматериалов достаточно обширна и имеет множество направлений для рассмотрения. Так, например, в [16] описаны способы изучения метаматериалов с отрицательным коэффициентом Пуассона, которые демонстрируют ауксетическое поведение при деформации материала. В [18] рассмотрено аналитическое описание механического поведения элементарных ячеек с помощью теории балок Тимошенко, для многих из них ранее не было выведено аналитических соотношений.

Актуальным также остается и изучение зависимости механических свойств периодической структуры от ее топологических параметров [7,13]. Основной целью данных исследований является получение возможности спрогнозировать характеристики структуры, изменив топологию ячейки определенным нетривиальным образом.

Для метаматериалов вопрос влияния топологических свойств на механические характеристики представлен широким фронтом исследований, в рамках которых проводится рассмотрение нескольких типов ячейки периодичности для различных значений плотности заполнения. В некоторых из таких работ вводятся гипотезы о наличии аналитической зависимости механических констант от плотности заполнения в виде степенного закона [9,10]. Однако, подобные зависимости не учитывают широкий перечень параметров ячейки периодичности. Возможно, также, применение подходов строительной механики к оценке макроскопических свойств «балочных» структур, которые основываются на модели Бернулли-Эйлера и позволяют спрогнозировать некоторые свойства без проведения виртуальных испытаний [14]. Однако применимость данных подходов сильно ограничена регулярными ячейками простой формы, представляемыми в балочной постановке.

Существует также ряд публикаций, в которых представлены уникальные комбинации формы и параметров периодической структуры. Так в работах [6,11] описано поведение метаматериалов, параметры которых близки к параметрам костной ткани.

Стоит также отметить направление исследований, фокусирующихся на определении эффективного распределения топологических параметров метабиоматериала по объему изделия. В данном случае фокус внимания смещается от поиска оптимальных формы и размеров ячейки периодичности к поиску оптимального распределения этих параметров в рамках одного изделия. Подобный подход позволяет гибко адаптировать те или иные зоны изделия под заданные условия эксплуатации и управлять макроскопическими свойствами материала в зависимости от внутренних усилий в каждой конкретной области. [17].

Из рассмотренной литературы становится понятно, что интерес к метаматериалам повышается с каждым годом, а направления их изучения разнообразны. Однако в основе большинства направлений изучения лежат исследования, целью которых является изучение механического поведения метаматериалов. Существует множество способов исследования характеристик такого рода структур, однако на данный момент задача их изучения не решена в полной мере. В текущей работе рассмотрено одно из направлений исследования метаматериалов как сложных структур, имеющих нетривиальный характер зависимости механических свойств от параметров топологии.

ГЛАВА 1. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТОПОЛОГИИ МАТЕМАТЕРИАЛА НА ЕГО МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

1.1. Гомогенизация как метод оценки эквивалентных свойств решетчатых метаматериалов

Геометрия большинства метаматериалов является составной, имеет периодическую внутреннюю решетчатую структуру, подобную обычным металлическим материалам, образованным кристаллическими решетками. Свойства метаматериала, которые отличны от свойств сплошного материала, из которого изготовлена периодическая структура, могут быть определены с помощью процедуры гомогенизации, выполняемой для представительного элемента объема (representative volume element, RVE) метаматериала. Такая элементарная ячейка является структурой минимального объема, которая содержит в себе характерную геометрию материала, повторяющуюся с определенной периодичностью.

Гомогенизация – метод оценки эквивалентных макроскопических свойств, при котором из гетерогенного материала получается условно однородный материал, свойства которого на глобальном уровне совпадают со свойствами неоднородного материала. Такие свойства метаматериала называются эффективными. При этом результаты, полученные для одной ячейки, могут быть обобщены для всего материала вследствие его периодической структуры. Осредненные напряжения и деформации решетчатого элемента, рассматриваемого как однородный ортотропный материал, связаны уравнениями:

$$E_x \langle \varepsilon_{xx} \rangle = \langle \sigma_{xx} \rangle - \nu_{xy} \langle \sigma_{yy} \rangle - \nu_{xz} \langle \sigma_{zz} \rangle,$$

$$E_y \langle \varepsilon_{yy} \rangle = -\nu_{yx} \langle \sigma_{xx} \rangle + \langle \sigma_{yy} \rangle - \nu_{yz} \langle \sigma_{zz} \rangle,$$

$$E_z \langle \varepsilon_{zz} \rangle = -\nu_{zx} \langle \sigma_{xx} \rangle - \nu_{zy} \langle \sigma_{yy} \rangle + \langle \sigma_{zz} \rangle,$$

$$G_{xy} \langle \gamma_{xy} \rangle = \langle \sigma_{xy} \rangle,$$

$$G_{yz}\langle\gamma_{yz}\rangle = \langle\sigma_{yz}\rangle,$$

$$G_{zx}\langle\gamma_{zx}\rangle = \langle\sigma_{zx}\rangle,$$

где E_x , E_y , E_z – эффективные модули Юнга элементарной ячейки;

ν_{xy} , ν_{yx} , ν_{yz} , ν_{zy} , ν_{xz} и ν_{zx} – эффективные коэффициенты Пуассона;

G_{xy} , G_{yz} и G_{zx} – эффективные модули сдвига.

В матричном виде закон Гука, выражающий связь напряжений и деформаций, запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix},$$

$$[C] = [D]^{-1},$$

где матрица $[C]$ состоит из отношений констант E_x , E_y , E_z , G_{xy} , G_{yz} , G_{xz} , ν_{xy} , ν_{yz} , ν_{xz} и имеет вид:

$$[C] = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{pmatrix}.$$

Осредненные значения напряжений и деформаций рассчитаны по следующим формулам:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV,$$

$$\langle \varepsilon_{ii} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ii} dV,$$

$$\langle \gamma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \gamma_{ij} dV,$$

где V – объем представительного объема.

При этом из 12 констант девять являются независимыми, так как три коэффициента Пуассона могут быть вычислены в соответствии с выражениями:

$$E_x \nu_{yx} = E_y \nu_{xy},$$

$$E_y \nu_{zy} = E_z \nu_{yz},$$

$$E_z \nu_{xz} = E_x \nu_{zx}.$$

Выражения для расчета коэффициентов Пуассона могут быть определены следующим образом:

$$\nu_{xy} = \frac{\langle \varepsilon_{yy} \rangle}{\langle \varepsilon_{xx} \rangle}, \nu_{yz} = \frac{\langle \varepsilon_{zz} \rangle}{\langle \varepsilon_{yy} \rangle}, \nu_{zx} = \frac{\langle \varepsilon_{xx} \rangle}{\langle \varepsilon_{zz} \rangle}.$$

Таким образом, для определения независимых констант требуется шесть испытаний. При рассмотрении одного из шести экспериментов, для примера приведем растяжение вдоль оси X, описанное выше соотношение приобретет вид:

$$A \cdot \begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{21} \\ D_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix},$$

где A – значение прикладываемой деформации.

В связи с тем, что метаматериал – это периодическая структура, численные эксперименты должны проводиться с граничными условиями, отличными от традиционных. Периодические граничные условия в достаточной степени описывают трехмерную симметрию структуры, а также обеспечивают более физичную деформацию материала, так как отражают прямое влияние деформирования рассматриваемой ячейки на соседние по граням. Периодические граничные условия представляют собой одинаковые перемещения каждой пары узлов на противоположных гранях периодической ячейки размером $L_x \times L_y \times L_z$. В текущей работе характерный размер базовой элементарной ячейки предполагается равным $10 \times 10 \times 10$ мм. Для определения параметров материала при описанных выше граничных условиях рассматриваются три испытания на растяжение и три испытания на сдвиг.

Для проведения испытания по одноосному растяжению вдоль оси X необходимо удовлетворить граничным условиям, приведенным ниже:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=0} - u_x|_{x=L_x} &= B, & u_y|_{x=0} - u_y|_{x=L_x} &= 0, & u_z|_{x=0} - u_z|_{x=L_x} &= 0, \\ u_x|_{y=0} - u_x|_{y=L_y} &= 0, & u_y|_{y=0} - u_y|_{y=L_y} &= 0, & u_z|_{y=0} - u_z|_{y=L_y} &= 0, \\ u_x|_{z=0} - u_x|_{z=L_z} &= 0, & u_y|_{z=0} - u_y|_{z=L_z} &= 0, & u_z|_{z=0} - u_z|_{z=L_z} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогичные граничные условия реализованы при растяжении вдоль оси Y:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=0} - u_x|_{x=L_x} &= 0, & u_y|_{x=0} - u_y|_{x=L_x} &= 0, & u_z|_{x=0} - u_z|_{x=L_x} &= 0, \\ u_x|_{y=0} - u_x|_{y=L_y} &= 0, & u_y|_{y=0} - u_y|_{y=L_y} &= B, & u_z|_{y=0} - u_z|_{y=L_y} &= 0, \\ u_x|_{z=0} - u_x|_{z=L_z} &= 0, & u_y|_{z=0} - u_y|_{z=L_z} &= 0, & u_z|_{z=0} - u_z|_{z=L_z} &= 0. \end{aligned}$$

И при одноосном растяжении вдоль оси Z:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=0} - u_x|_{x=L_x} &= 0, & u_y|_{x=0} - u_y|_{x=L_x} &= 0, & u_z|_{x=0} - u_z|_{x=L_x} &= 0, \\ u_x|_{y=0} - u_x|_{y=L_y} &= 0, & u_y|_{y=0} - u_y|_{y=L_y} &= 0, & u_z|_{y=0} - u_z|_{y=L_y} &= 0, \\ u_x|_{z=0} - u_x|_{z=L_z} &= 0, & u_y|_{z=0} - u_y|_{z=L_z} &= 0, & u_z|_{z=0} - u_z|_{z=L_z} &= B. \end{aligned}$$

Здесь и далее параметр B – заранее заданное значение, равное 0,001, определяющее степень растяжения.

Для проведения испытаний на сдвиг в плоскости XY реализованы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=0} - u_x|_{x=L_x} &= 0, & u_y|_{x=0} - u_y|_{x=L_x} &= B, & u_z|_{x=0} - u_z|_{x=L_x} &= 0, \\ u_x|_{y=0} - u_x|_{y=L_y} &= B, & u_y|_{y=0} - u_y|_{y=L_y} &= 0, & u_z|_{y=0} - u_z|_{y=L_y} &= 0, \\ u_x|_{z=0} - u_x|_{z=L_z} &= 0, & u_y|_{z=0} - u_y|_{z=L_z} &= 0, & u_z|_{z=0} - u_z|_{z=L_z} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогичные граничные условия реализованы в случае сдвига в плоскости YZ:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=0} - u_x|_{x=L_x} &= 0, & u_y|_{x=0} - u_y|_{x=L_x} &= 0, & u_z|_{x=0} - u_z|_{x=L_x} &= 0, \\ u_x|_{y=0} - u_x|_{y=L_y} &= 0, & u_y|_{y=0} - u_y|_{y=L_y} &= 0, & u_z|_{y=0} - u_z|_{y=L_y} &= B, \\ u_x|_{z=0} - u_x|_{z=L_z} &= 0, & u_y|_{z=0} - u_y|_{z=L_z} &= B, & u_z|_{z=0} - u_z|_{z=L_z} &= 0. \end{aligned}$$

И в случае сдвига в плоскости XZ:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=0} - u_x|_{x=L_x} &= 0, & u_y|_{x=0} - u_y|_{x=L_x} &= 0, & u_z|_{x=0} - u_z|_{x=L_x} &= B, \\ u_x|_{y=0} - u_x|_{y=L_y} &= 0, & u_y|_{y=0} - u_y|_{y=L_y} &= 0, & u_z|_{y=0} - u_z|_{y=L_y} &= 0, \\ u_x|_{z=0} - u_x|_{z=L_z} &= B, & u_y|_{z=0} - u_y|_{z=L_z} &= 0, & u_z|_{z=0} - u_z|_{z=L_z} &= 0. \end{aligned}$$

1.2. Описание типов элементарных ячеек

Геометрические модели элементарных ячеек метаматериала построены в предположении, что базовые ячейки могут формироваться стержнями разного диаметра и иметь различные величины объемной доли сплошного материала. Для построения геометрических моделей была задействована система автоматизированного проектирования SolidWorks [19]. Предполагается, что ячейка имеет характерный размер $10 \times 10 \times 10$ мм. Внешний вид построенных базовых ячеек, топология которых является наиболее интересной и

перспективной с точки зрения дальнейшего исследования, для единого диаметра стержня и единой толщины, равной 1,0 мм, приведен на рисунке (1.2.1).

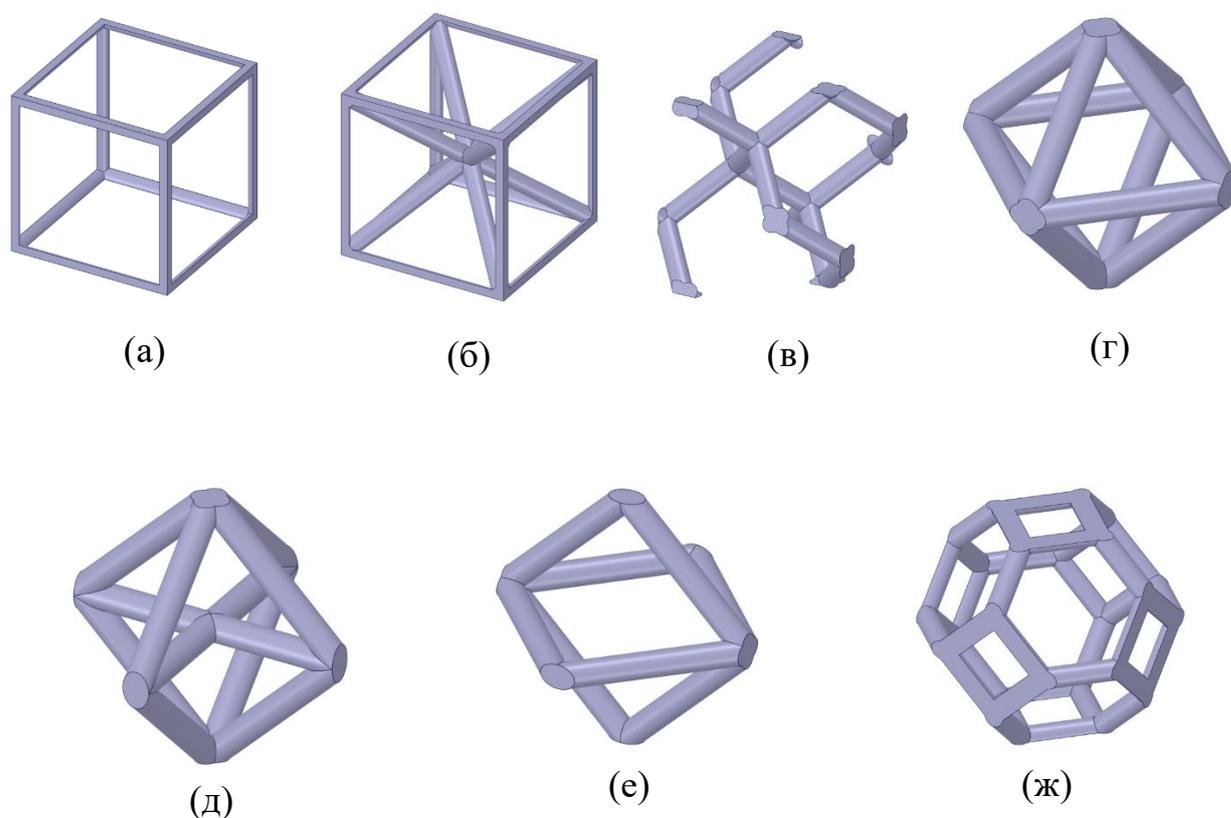


Рис. 1.2.1. Базовые ячейки метаматериалов: (а) ячейка типа 1, (б) ячейка типа 2, (в) ячейка типа 3, (г) ячейка типа 4, (д) ячейка типа 5, (е) ячейка типа 6, (ж) ячейка типа 7

В рамках исследования рассматриваются метаматериалы, изготовленные из сплава AlSi10Mg аддитивно путем плавления порошка, размер частиц которого менее 150 мкм. Материал может быть использован при изготовлении деталей с тонкими элементами и сложной геометрией, а также хорошо подходит для изготовления изделий, масса которых должна быть минимальна. Параметры сплошного ортотропного материала приведены в таблице 1.2.1.

Таблица 1.2.1
Параметры материала

Свойства материала	Направление		
	X/XY	Y/YZ	Z/XZ
Модуль Юнга, ГПа	82,5	76,7	76,8

Модуль сдвига, ГПа	23,8	27,1	21,4
Коэффициент Пуассона	0,32	0,32	0,33

1.3. Аналитический метод определения параметров материала

Ввиду того, что метаматериалы не являются однородными материалами, а содержат в себе долю сплошного материала и соответствующую долю воздуха, занимающего остальное пространство ячейки, метаматериалы можно считать композиционными в контексте вычисления эффективных свойств. Для прогнозирования упругих свойств волокнистых композиционных материалов, которые имеют постоянное значение объемной доли волокон вдоль одного из направлений, может применяться правило смесей для определения свойств вдоль оси постоянного значения объемной доли волокон. Согласно этому правилу, модуль упругости однонаправленного волокнистого композита зависит от объемной доли этих волокон, содержащихся в метаматериале. Для вычисления модуля Юнга вдоль направления волокон данное правило выглядит следующим образом.

$$E_c = fE_f + (1 - f)E_m,$$

где $f = \frac{V_f}{V_f + V_m}$ — объемная доля волокон;

V_f — объем волокон;

V_m — объем оставшегося пространства параллелепипеда;

E_f — модуль упругости одного материала;

E_m — модуль упругости второго материала.

Как было упомянуто ранее, одной из составляющих метаматериала в нашем случае является воздух, модуль упругости которого пренебрежимо мал. В связи с этим формула выше приобретет следующий вид:

$$E_c = fE_f.$$

Рассмотрим применение правила смесей для элемента периодической структуры простейшего вида, объемная доля материала которого легко вычисляется. Ребро куба 10 мм, диаметр сквозного отверстия 6 мм. Направление оси отверстия соосно направлению оси Z. Параметры материала AlSi10Mg были представлены ранее.

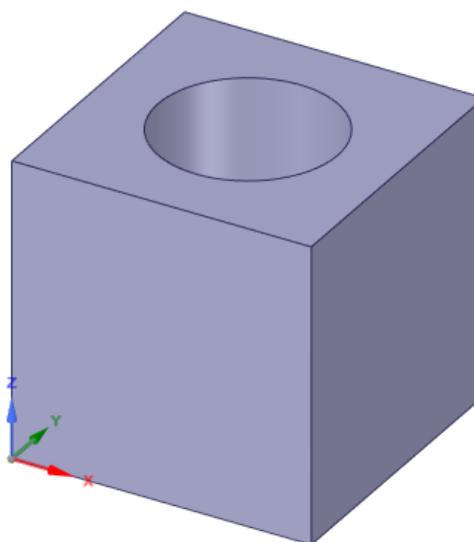


Рис.1.3.1. Элемент периодической структуры простейшего вида

$$E_c = \frac{10^3 - 10 \cdot \pi \cdot 3^2}{10^3} \cdot 76,8 = 55,0853 \text{ ГПа.}$$

Таким образом получено значение модуля Юнга вдоль вертикальной оси аналитическим методом для простейшей структуры. На примере простейшей структуры оценим разницу в результатах, полученных аналитическим путем и при помощи конечно-элементной гомогенизации. Конечно-элементная модель представлена на рисунке (1.3.2). Максимальный размер элемента – 1 мм. Число конечных элементов 7999, число узлов 12881. Продолжительность вычислений – 40 секунд. Параметры материала для расчета заданы согласно таблице (1.2.1). В качестве программного пакета для выполнения гомогенизации был выбран Ansys, содержащий модуль Material Designer, предназначенный для решения

такого рода задач. Более подробное описание программы представлено в следующем разделе.

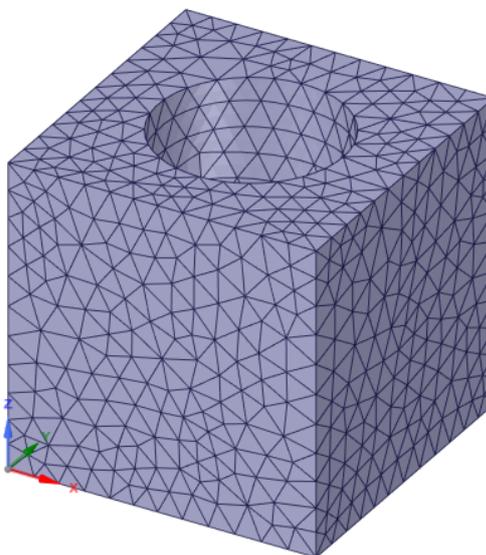


Рис.1.3.2. Вид конечно-элементной модели элементарной ячейки простейшего вида

Результат конечно-элементной гомогенизации показал следующее значение модуля Юнга в направлении оси Z:

$$E_z = 55,086 \text{ ГПа.}$$

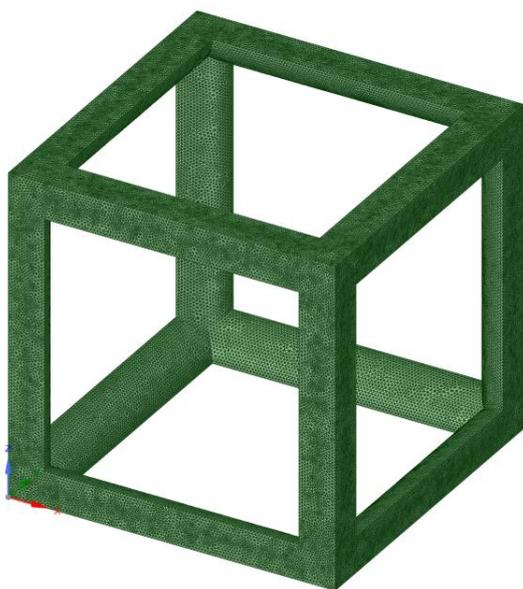
Относительная разница результатов численного и аналитического определения модуля Юнга составляет 0,0012%, что говорит о том, что оба метода дают близкие результаты и могут быть применены для гомогенизации волокнистых композитов с приблизительно одинаковой точностью. Также отметим корректность схемы расчета механических характеристик периодических ячеек, рассмотренную на простейшей структуре, что позволяет сделать вывод о возможности применения Ansys для выполнения конечно-элементной гомогенизации.

Определение параметров трехмерных решетчатых структур, рассматриваемых в данном исследовании, при помощи правила смесей невозможно. Для анализа механических характеристик трехмерных элементарных ячеек применима конечно-элементная гомогенизация.

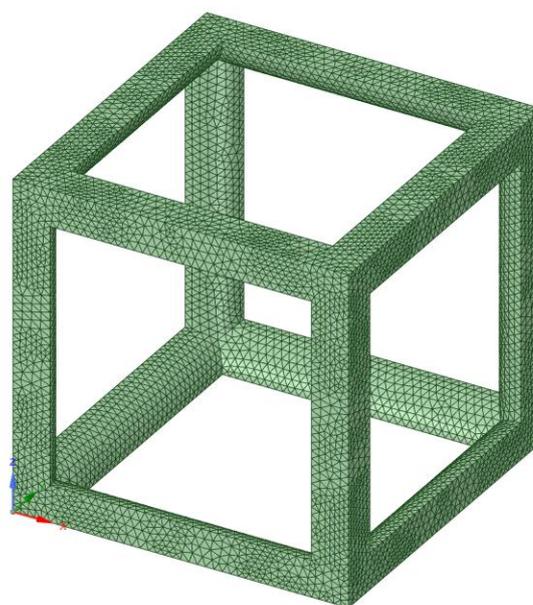
1.4. Определение параметров конечно-элементного расчета

Как упоминалось ранее, процесс гомогенизации метаматериала проводится с применением системы конечно-элементного анализа Ansys Material Designer. Решение задачи осуществляется в статической постановке с применением периодических граничных условий. Параметры ортотропного материала, используемые в расчетах, заданы согласно таблице (1.2.1).

Для получения результатов с хорошей точностью необходима качественная конечно-элементная сетка. Оценим сходимость величин характеристик метаматериала при уменьшении максимального размера конечного элемента. Вычисления проводились для ячейки типа 1 с максимальным размером элемента сетки 0,1; 0,25; 0,5; 1 мм. Доля сплошного материала базовой ячейки - 0,1.



(a)



(б)

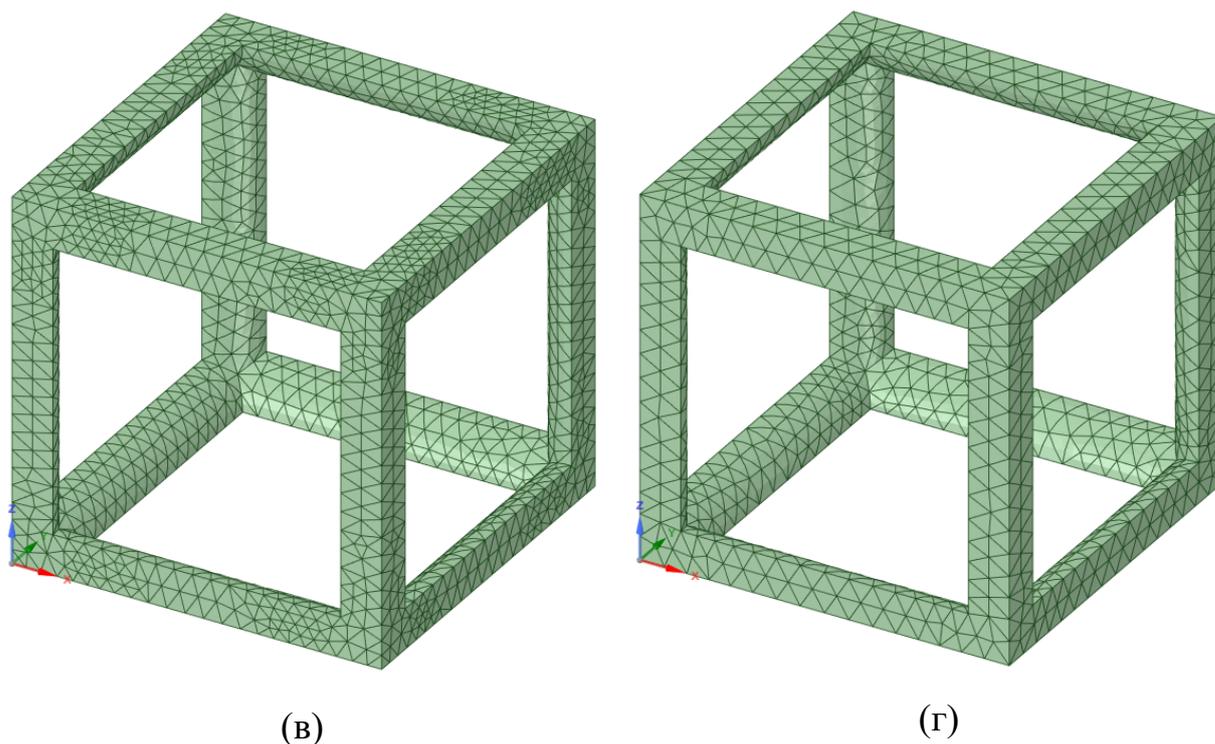


Рис.1.4.1. Внешний вид конечно-элементных моделей: (а) размер сетки 0,1 мм, (б) размер сетки 0,25 мм, (в) размер сетки 0,5 мм, (г) размер сетки 1 мм

Таблица 1.4.1.

Количественные характеристики конечно-элементных моделей

Максимальный размер конечного элемента, мм	Количество элементов	Количество узлов	Расчетное время, секунд
0,1	1 024 100	1 484 672	1170
0,25	72 759	115 818	110
0,5	10 088	18 346	60
1	5 450	10 533	40

Для оценки качества сетки рассмотрена относительная разница модулей Юнга вдоль каждой из осей в сравнении со значениями, полученными при расчете с сеткой с наименьшим размером конечного элемента, приведенная в таблице (1.4.2). Для наглядности также приведены сравнительные диаграммы на рисунках (1.4.2 - 1.4.3).

Таблица 1.4.2.

Модули упругости ячейки типа 1 при различных размерах конечно-элементной сетки

	Ячейка типа 1 (а)	Ячейка типа 1 (б)	Ячейка типа 1 (в)	Ячейка типа 1 (г)
Максимальный размер конечного элемента, мм	0,1	0,25	0,5	1
E_1 , ГПа	3,3529	3,3573	3,3638	3,3662
E_2 , ГПа	3,1253	3,1296	3,1355	3,1378
E_3 , ГПа	3,1281	3,1322	3,1381	3,1402
Относительная разница E_1 , %	-	0,13	0,32	0,39
Относительная разница E_2 , %	-	0,14	0,33	0,4
Относительная разница E_3 , %	-	0,15	0,32	0,39

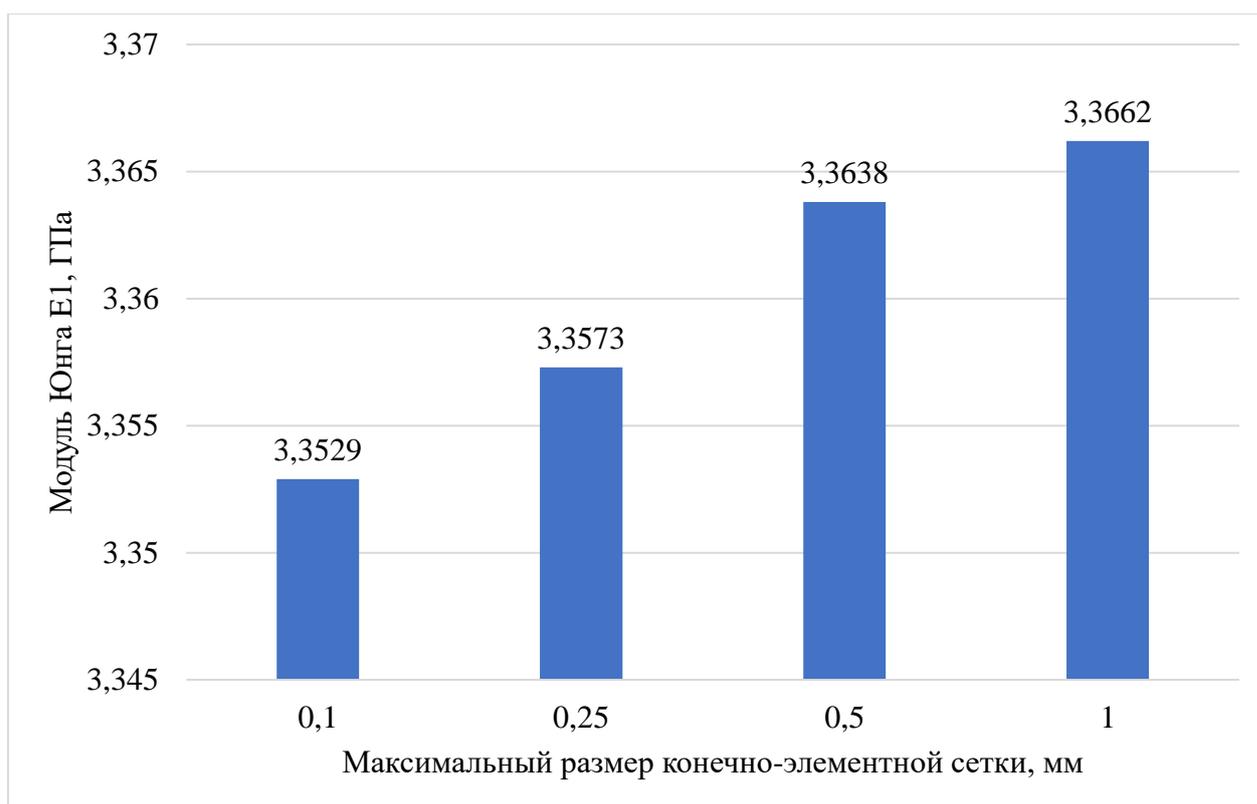


Рис.1.4.2. Изменение модуля Юнга E_1 в зависимости от размера сетки

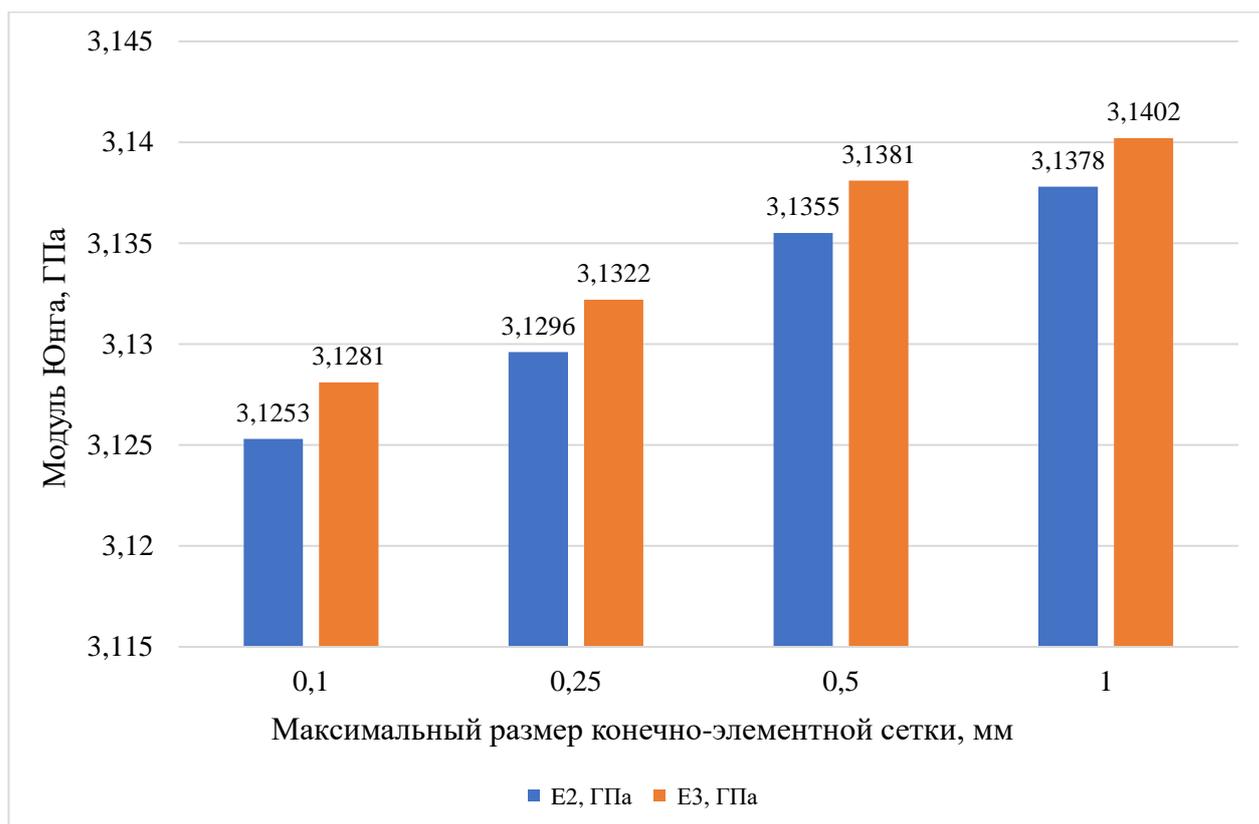


Рис.1.4.3. Изменение модуля Юнга E_2 , E_3 в зависимости от размера сетки

Отметим, что при измельчении сетки различия в результатах снижаются. Относительная разница между результатами расчетов с различным размером сетки составляет величину менее 0,5% в худшем случае. Однако вычислительные сложности с применением сетки на основе более крупных конечных элементов значительно снижаются. С минимальными потерями в точности полученных результатов отдано предпочтение сетке с характерным размером конечного элемента 1 мм.

При численном решении задачи гомогенизация выполняется для представительных элементов объема, состоящих из $1 \times 1 \times 1$ элементарных ячеек. Однако, безусловно, возможно исследование элементов, состоящих из $3 \times 3 \times 3$ и $5 \times 5 \times 5$ элементарных ячеек, так как возможно их рассмотрение в качестве представительного элемента большего размера. Большой размер представительного элемента объема несет за собой необходимость обработки большего числа конечных элементов, что значительно увеличивает трудоемкость и продолжительность проводимых вычислений. Поэтому

целесообразно проверить влияние количества элементарных ячеек на значения параметров метаматериала. Проведем расчеты эффективных характеристик структур, состоящих из $1 \times 1 \times 1$, $3 \times 3 \times 3$ и $5 \times 5 \times 5$ элементарных ячеек типа 1 с характерным размером $10 \times 10 \times 10$ мм с применением периодических граничных условий, максимальный размер конечного элемента сетки 1 мм.

Объемная доля материала рассчитываемых ячеек 0,1. Внешний вид рассматриваемых структур показан на рисунке (1.4.4).

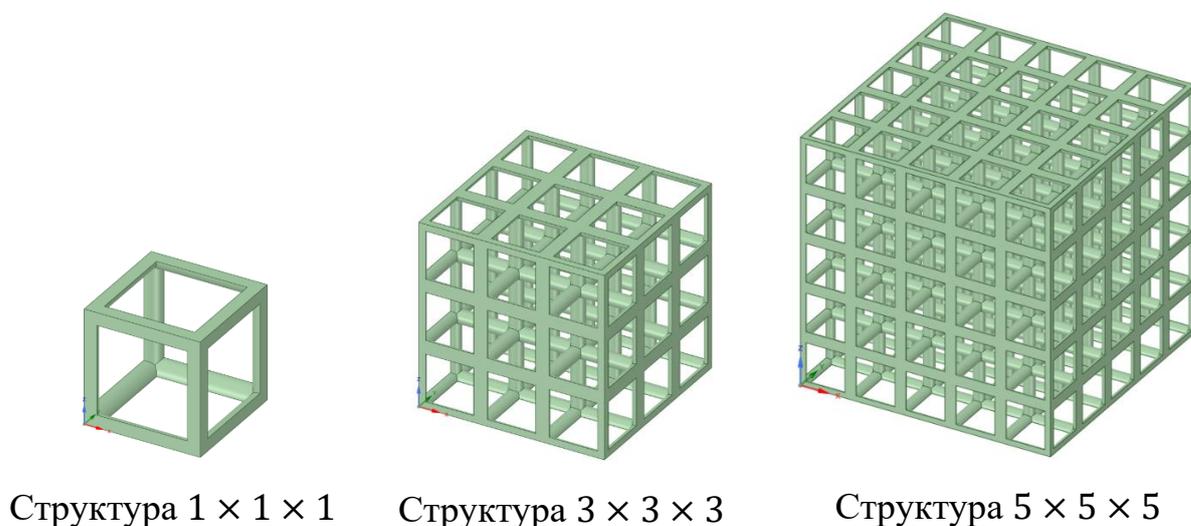


Рис.1.4.4. Внешний вид периодических структур, состоящих из $1 \times 1 \times 1$, $3 \times 3 \times 3$, $5 \times 5 \times 5$ элементарных ячеек

Таблица 1.4.3

Количественные характеристики конечно-элементной сетки структур различных размеров

Вид структуры	Количество элементов	Количество узлов	Расчетное время, секунд
$1 \times 1 \times 1$	5 450	10 533	40
$3 \times 3 \times 3$	119 466	208 914	180
$5 \times 5 \times 5$	574 758	980 132	810

На основании расчета параметров метаматериала приводятся результаты для каждого представительного элемента объема с относительной разницей в модулях Юнга вдоль каждой оси. Параметры сплошного ортотропного материала, используемого для данного расчета, заданы согласно таблице (1.2.1).

Таблица 1.4.4

Изменение модулей Юнга в зависимости от размера периодической структуры

Тип ячейки	Тип 1, $1 \times 1 \times 1$	Тип 1, $3 \times 3 \times 3$	Тип 1, $5 \times 5 \times 5$
E_1 , ГПа	3,3662	3,3661	3,3664
E_2 , ГПа	3,1378	3,1379	3,1382
E_3 , ГПа	3,1402	3,1406	3,1409
Относительная разница E_1 , %	0,006	0,009	-
Относительная разница E_2 , %	0,013	0,010	-
Относительная разница E_3 , %	0,022	0,009	-

Для наглядности приведены результаты в виде сравнительной диаграммы.

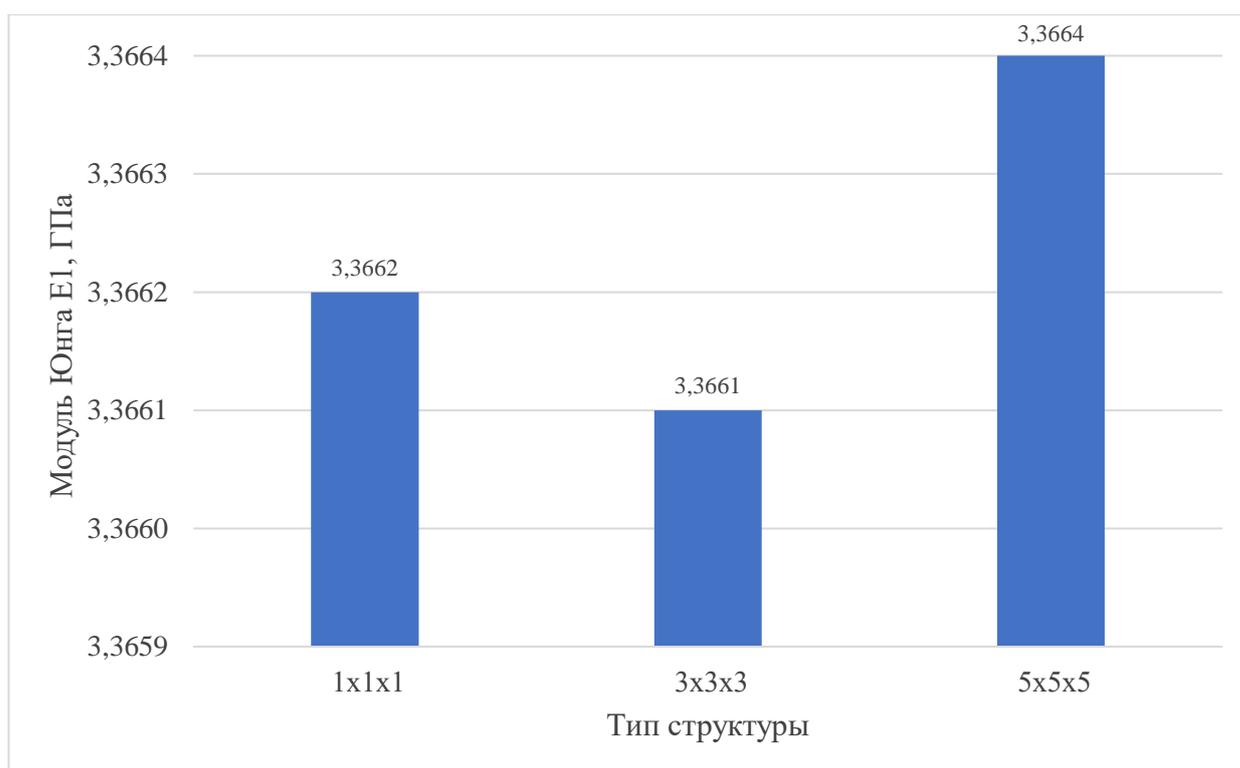


Рис. 1.4.5. Изменение значения модуля Юнга E_1 в зависимости от размера периодической структуры

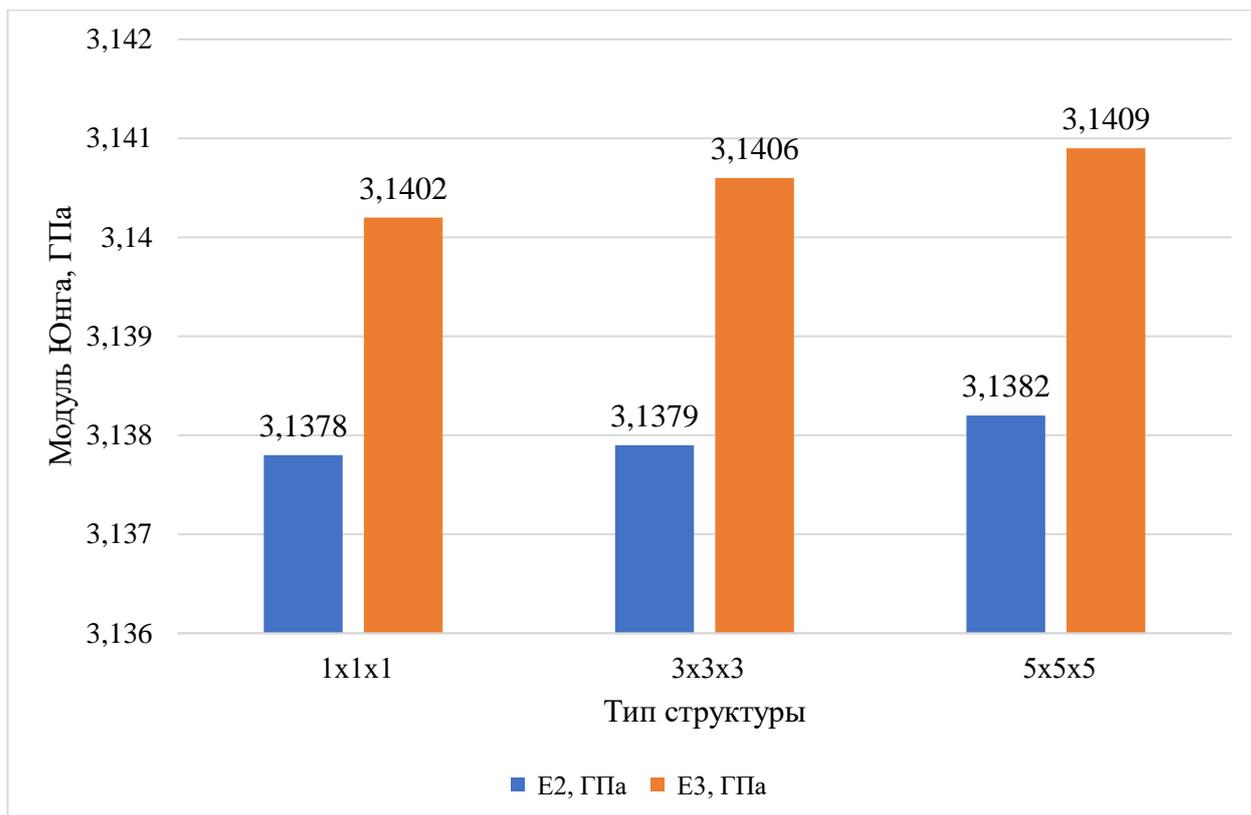


Рис. 1.4.6. Изменение значений модулей Юнга E_2 , E_3 в зависимости от размера периодической структуры

Относительная разница в результатах составляет менее 0,03%, однако расчет решетчатой структуры, состоящей из $5 \times 5 \times 5$ элементарных ячеек, более чем в 15 раз продолжительнее по времени в сравнении с расчетом базовой ячейки $1 \times 1 \times 1$.

Таким образом, без потери в точности полученных результатов будем выполнять расчеты параметров материала при периодических граничных условиях, на представительном элементе объема, состоящем из одной элементарной ячейки, характерный размер которой $10 \times 10 \times 10$ мм. Максимальной размер элемента расчетной сетки 1 мм, характерный размер конечного элемента будет зависеть от внешнего вида элементарной ячейки и подбираться в зависимости от диаметра стержня, лежащего в основе рассматриваемой ячейки.

1.5. Расчет упругих характеристик метаматериала в зависимости от его топологии

1.5.1. Результат конечно-элементной гомогенизации при фиксированном диаметре стержня, образующего элементарную ячейку

В данном разделе приводятся результаты выполнения конечно-элементной гомогенизации для базовых ячеек типов 1–7. Расчеты проводились с применением периодических граничных условий для элементарной ячейки $10 \times 10 \times 10$ мм, ограничение на максимальный размер конечного элемента расчетной сетки - 1 мм. Диаметр стержня ячеек 1 мм. Расчет одной ячейки по времени занимает до 3 минут в зависимости от сложности геометрии.

Таблица 1.5.1.1

Результат конечно-элементной гомогенизации при фиксированном диаметре стержня для ячеек типов 1-4

Тип ячейки	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4
E_1 , МПа	665,37	908,24	80,29	594,28
E_2 , МПа	619,34	863,44	78,92	595,04
E_2 , МПа	620,00	863,93	79,46	593,64
G_{12} , МПа	2,66	422,83	82,97	386,96
G_{23} , МПа	2,62	428,88	84,04	421,99
G_{31} , МПа	2,63	417,49	82,18	359,34
ν_{12}	0,026	0,291	0,474	0,325
ν_{13}	0,026	0,291	0,457	0,283
ν_{23}	0,027	0,297	0,485	0,371

Таблица 1.5.1.2

Результат конечно-элементной гомогенизации при фиксированном диаметре стержня для ячеек типов 5-7

Тип ячейки	Тип 5	Тип 6	Тип 7
E_1 , МПа	897,27	59,52	231,25
E_2 , МПа	854,73	56,03	240,20
E_2 , МПа	595,78	55,61	234,34
G_{12} , МПа	5,37	372,21	62,20
G_{23} , МПа	415,41	2,61	62,88

G_{31} , МПа	352,58	344,97	61,68
ν_{12}	-0,177	0,960	0,425
ν_{13}	0,507	0,960	0,444
ν_{23}	0,552	-0,867	0,427

По результатам расчета отметим, что параметры метаматериала сильно зависят от геометрии элементарной ячейки. Наибольшую жесткость в направлении главных осей имеют ячейки типа 1, 2, 5. Геометрия этих ячеек содержит стержни, сонаправленные осям нагружения, что позволяет материалу в большей мере сопротивляться растяжению. Однако необходимо отметить, что фиксированный диаметр формирующих стержней соответствует различной концентрации материала в каждой из элементарных ячеек. Поэтому сравнивать поведение материала при фиксированном значении диаметра не вполне корректно. Также наблюдаются малые отличия параметров в различных направлениях анизотропии.

Соотношения долей материала в каждой из базовых ячеек приведены в таблице (1.5.1.3).

Таблица 1.5.1.3

Объемная доля материала при фиксированном значении диаметра стержня для ячеек типов 1-7

Тип ячейки	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6	Тип 7
Доля материала, %	2,215	6,935	4,952	5,891	5,3	4,052	5,91

1.5.2. Исследование влияния объемной доли материала на механические характеристики метаматериала

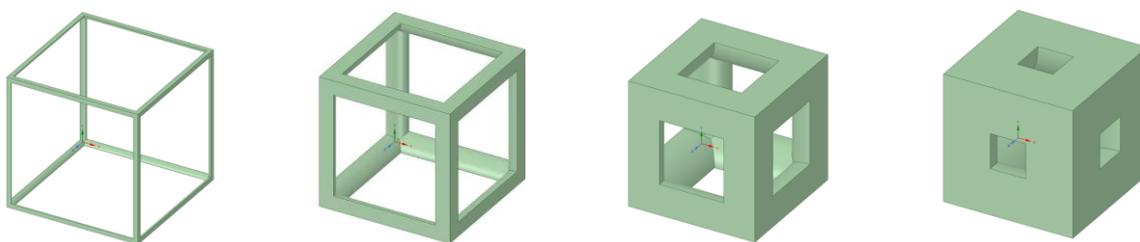
Для более углубленного анализа влияния топологии элементарной ячейки метаматериала, а также корректного сравнения решеток между собой,

рассмотрим ряд модификаций, проводимых над геометрией структуры. Оценим влияние объемной доли материала решетчатой структуры, влияние соотношения геометрических размеров базовой ячейки $L_x \times L_y \times L_z$, а также угла между стержнями, образующими ячейку, на полученные параметры метаматериала.

Исследование, описанное в текущем разделе, подразумевает выявление зависимости макроскопических свойств метаматериала от его эффективной плотности для каждого из семи рассматриваемых типов ячеек. Под эффективной плотностью метаматериала подразумевается отношение объема сплошного материала, содержащегося в элементарной ячейке, к объему параллелепипеда с характерным размером $L_x \times L_y \times L_z$. Диапазон изменения объемной доли меняется от 0,01 до 1, где 1 – сплошной материал. В промежутке от 0,01 до 0,1 взято 10 точек для расчета механических характеристик, далее с постоянным шагом 0,0375 рассмотрены еще 24 точки.

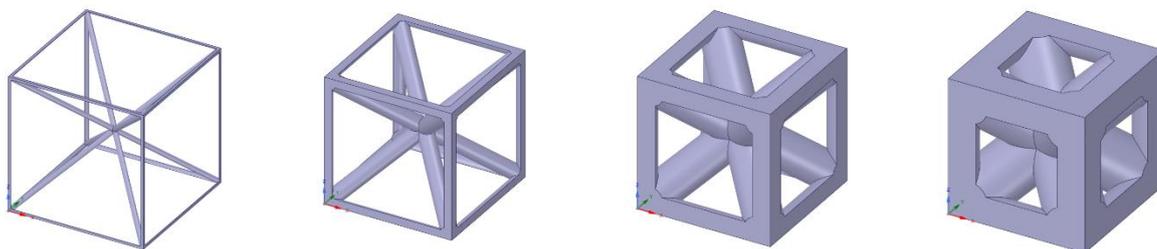
Конечно-элементная гомогенизация проводилась с применением модуля Ansys Material Designer при реализации периодических граничных условий. Геометрия каждого метаматериала состоит из одной элементарной ячейки с геометрическими характеристиками $10 \times 10 \times 10$ мм, ограничение на максимальный размер конечного элемента расчетной сетки - 1 мм, характерный размер сетки зависит от толщины стержня, образующего элементарную ячейку, охватывает диапазон от 0,005 до 1 мм и подбирается для каждой ячейки индивидуально.

Вид геометрии для каждого из типов ячеек для четырех промежуточных объемных долей материала приведен ниже.



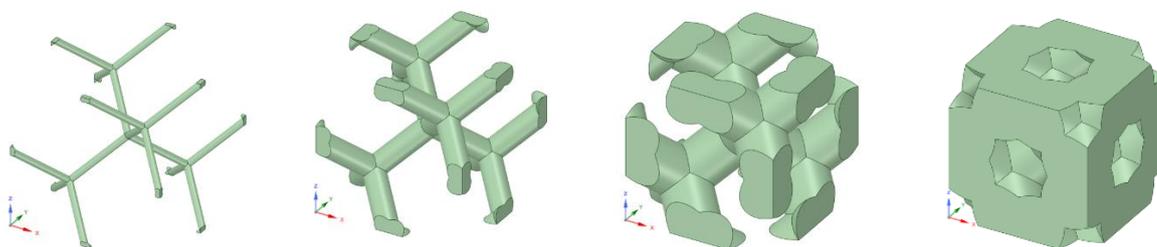
(а) (б) (в) (г)

Рис. 1.5.2.1. Внешний вид ячейки типа 1 при различных значениях объемной доли материала: (а) 0,01; (б) 0,1; (в) 0,4; (г) 0,7



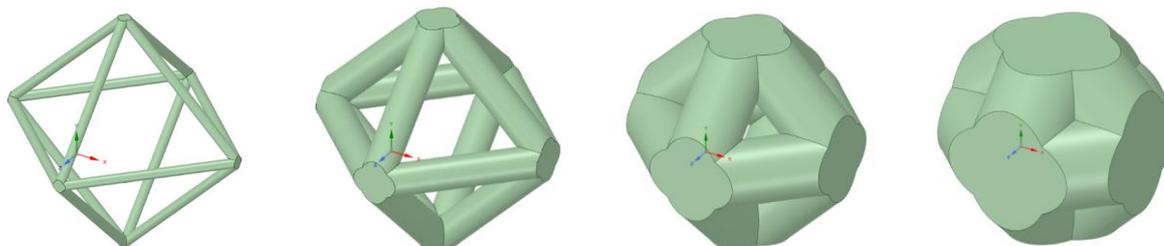
(а) (б) (в) (г)

Рис. 1.5.2.2. Внешний вид ячейки типа 2 при различных значениях объемной доли материала: (а) 0,01; (б) 0,1; (в) 0,4; (г) 0,7



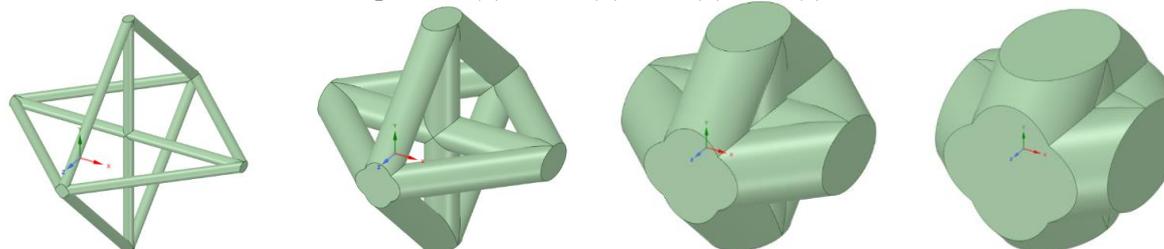
(а) (б) (в) (г)

Рис. 1.5.2.3. Внешний вид ячейки типа 3 при различных значениях объемной доли материала: (а) 0,01; (б) 0,1; (в) 0,4; (г) 0,7



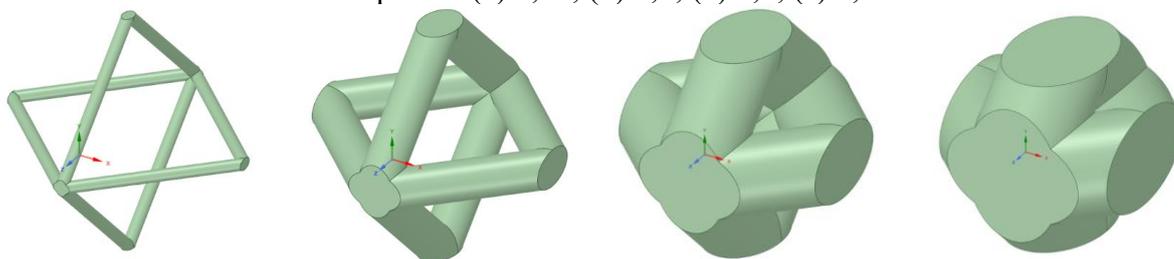
(а) (б) (в) (г)

Рис. 1.5.2.4. Внешний вид ячейки типа 4 при различных значениях объемной доли материала: (а) 0,01; (б) 0,1; (в) 0,4; (г) 0,7



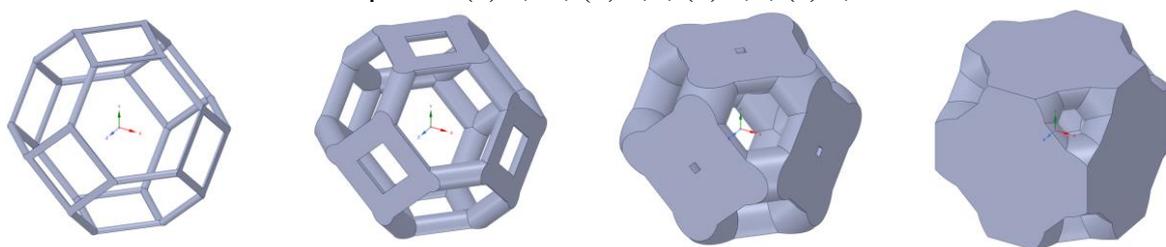
(а) (б) (в) (г)

Рис. 1.5.2.5. Внешний вид ячейки типа 5 при различных значениях объемной доли материала: (а) 0,01; (б) 0,1; (в) 0,4; (г) 0,7



(а) (б) (в) (г)

Рис. 1.5.2.6. Внешний вид ячейки типа 6 при различных значениях объемной доли материала: (а) 0,01; (б) 0,1; (в) 0,4; (г) 0,7



(а) (б) (в) (г)

Рис. 1.5.2.7. Внешний вид ячейки типа 7 при различных значениях объемной доли материала: (а) 0,01; (б) 0,1; (в) 0,4; (г) 0,7

В качестве результатов исследования влияния объемной доли материала на параметры метаматериала представлены наборы кривых, отражающие эту зависимость.

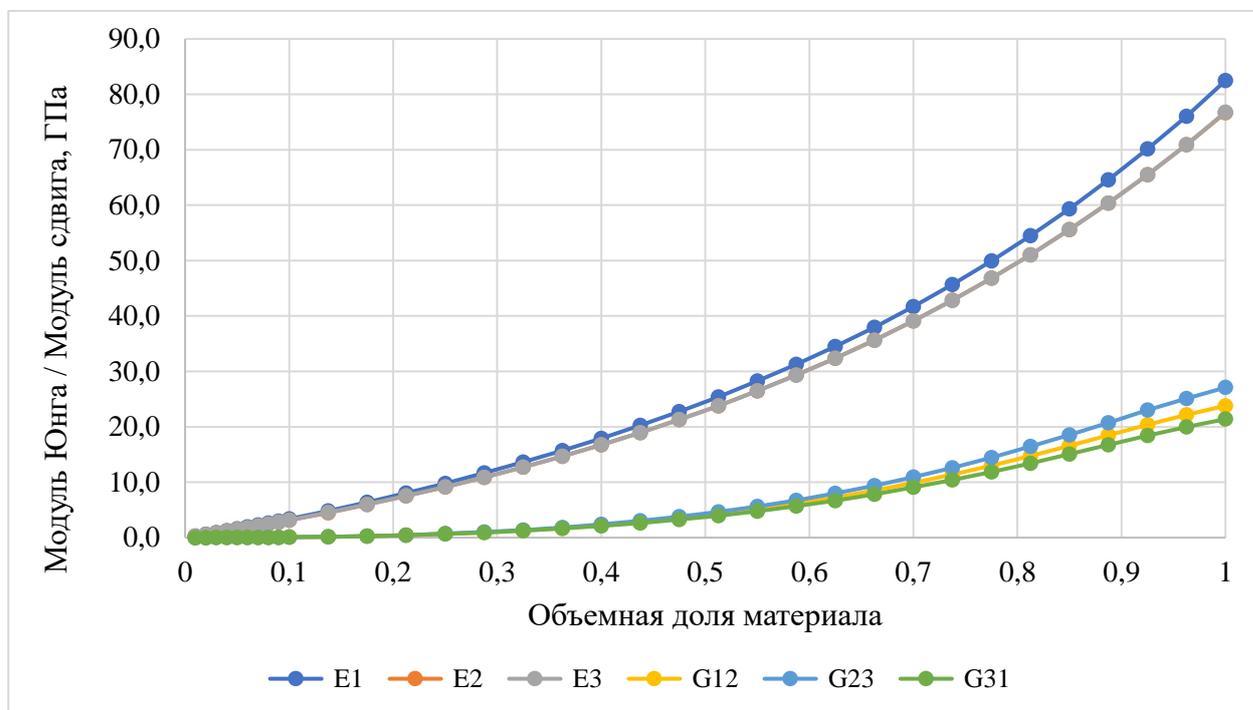


Рис.1.5.2.8. Зависимость значений модулей Юнга и модулей сдвига от объемной доли материала для ячейки типа 1

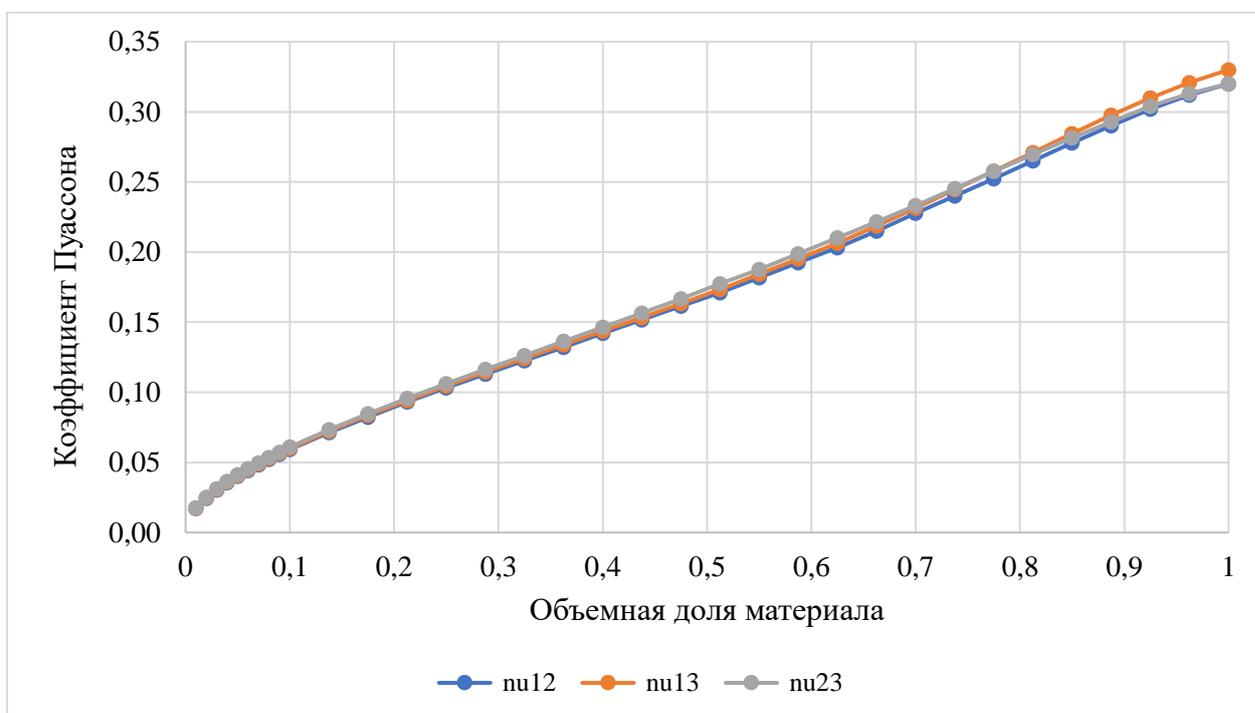


Рис.1.5.2.9. Зависимость значений коэффициента Пуассона от объемной доли материала для ячейки типа 1

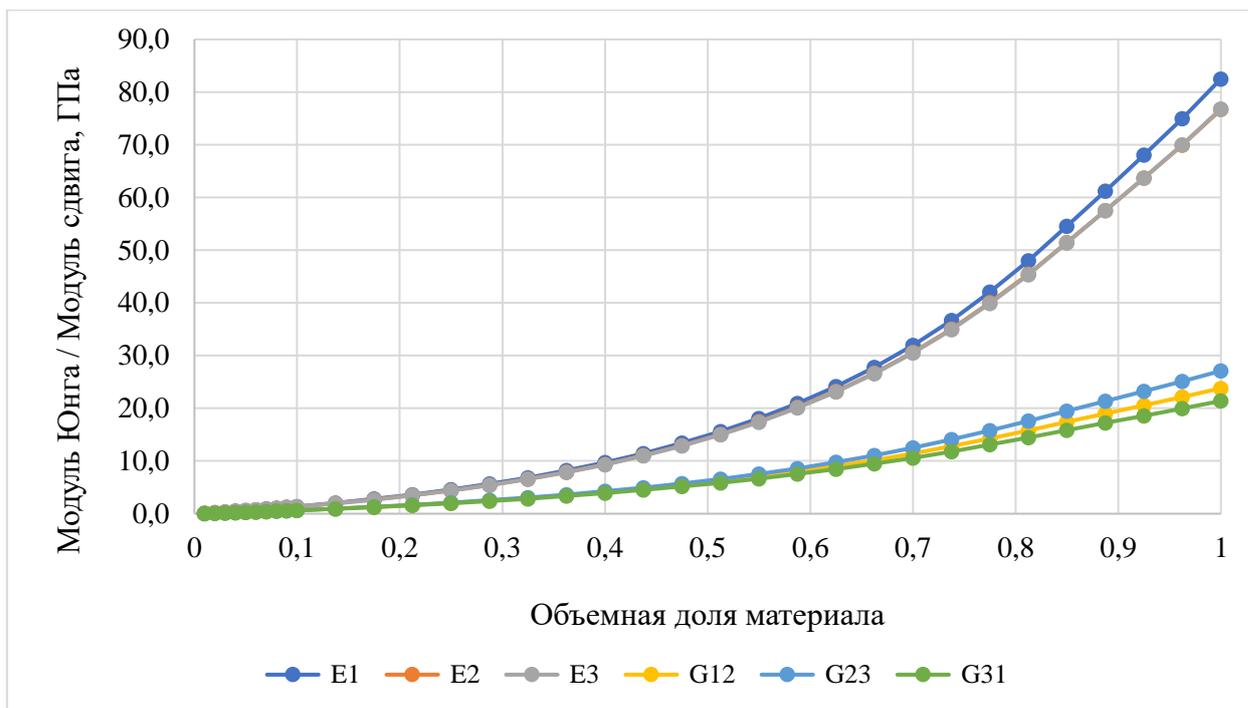


Рис.1.5.2.10. Зависимость значений модулей Юнга и модулей сдвига от объемной доли материала для ячейки типа 2

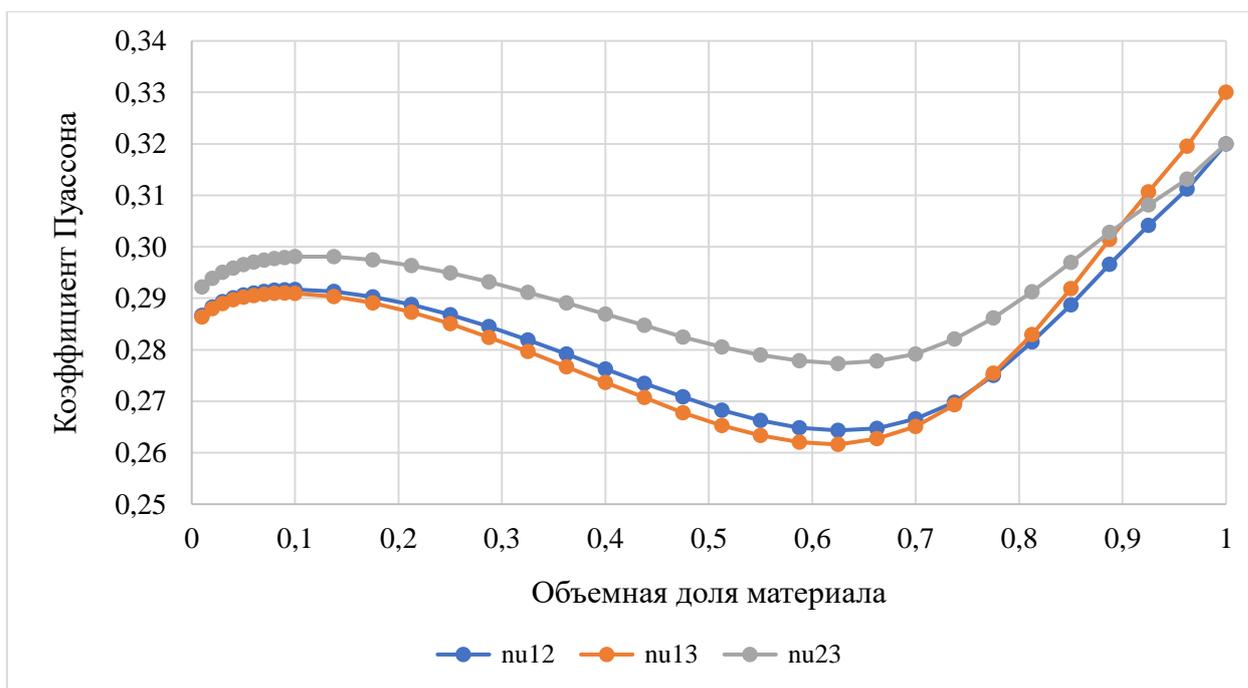


Рис.1.5.2.11. Зависимость значений коэффициента Пуассона от объемной доли материала для ячейки типа 2

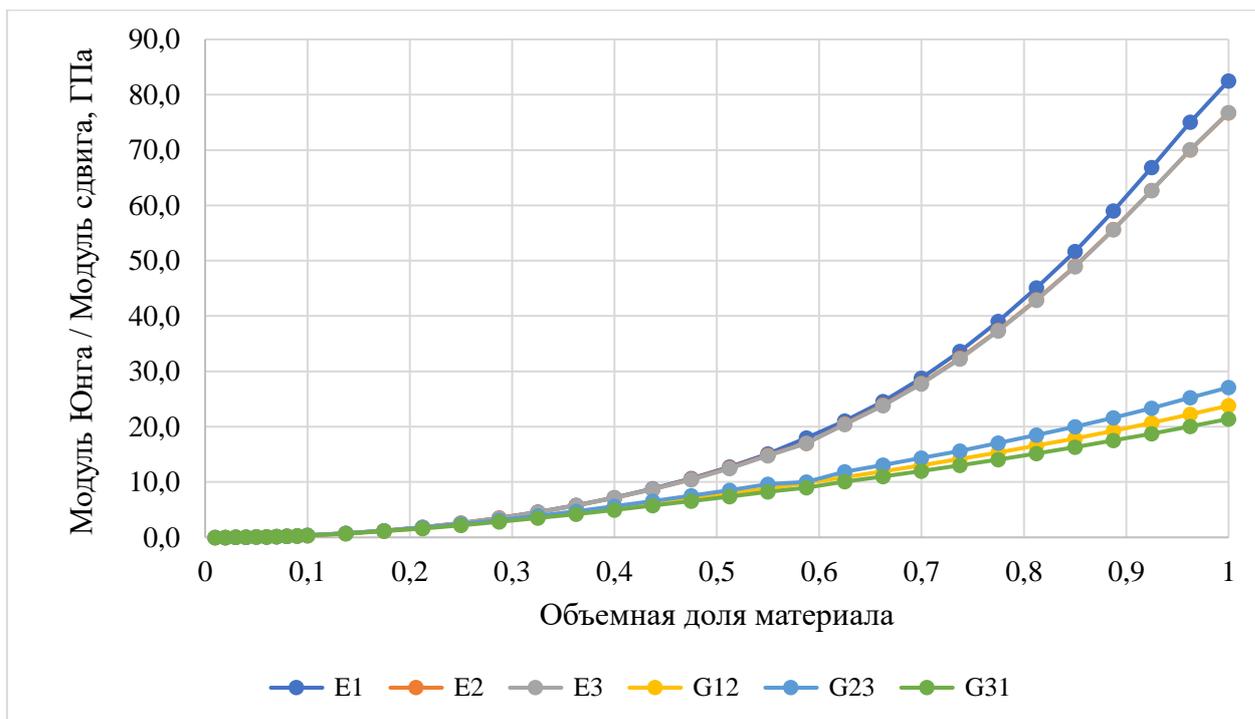


Рис.1.5.2.12. Зависимость значений модулей Юнга и модулей сдвига от объемной доли материала для ячейки типа 3

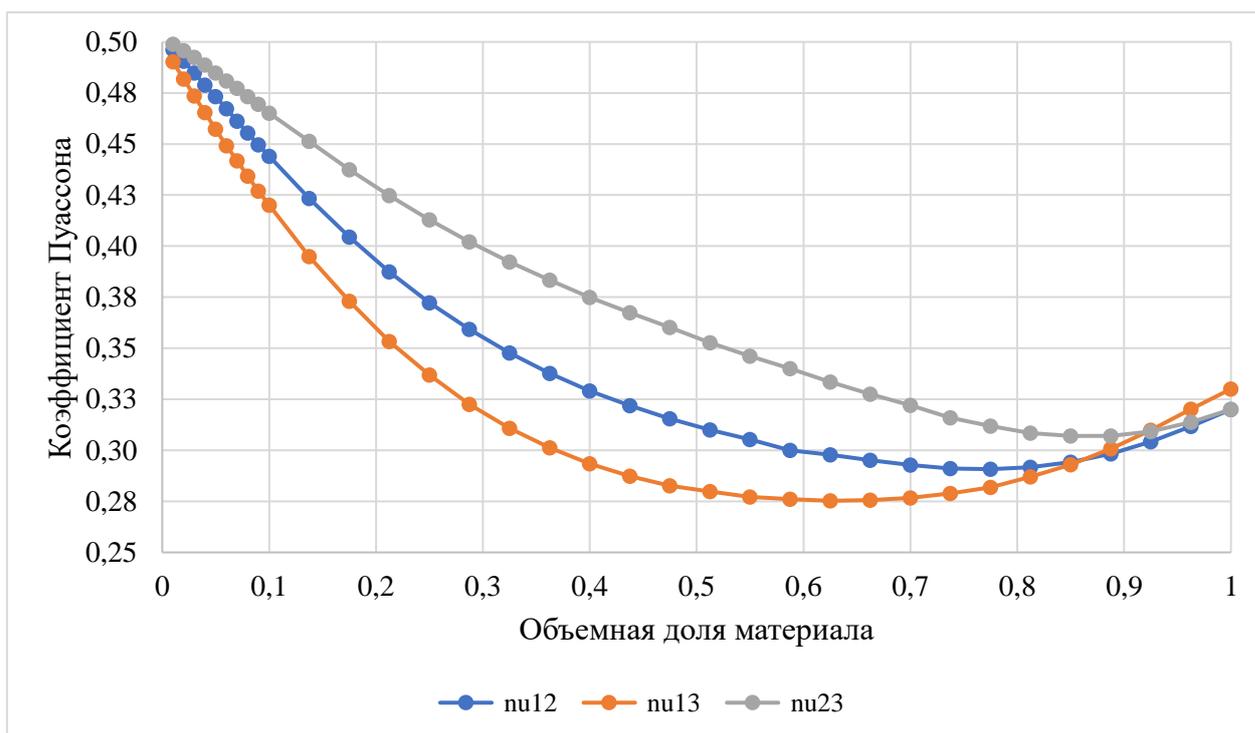


Рис.1.5.2.13. Зависимость значений коэффициента Пуассона от объемной доли материала для ячейки типа 3

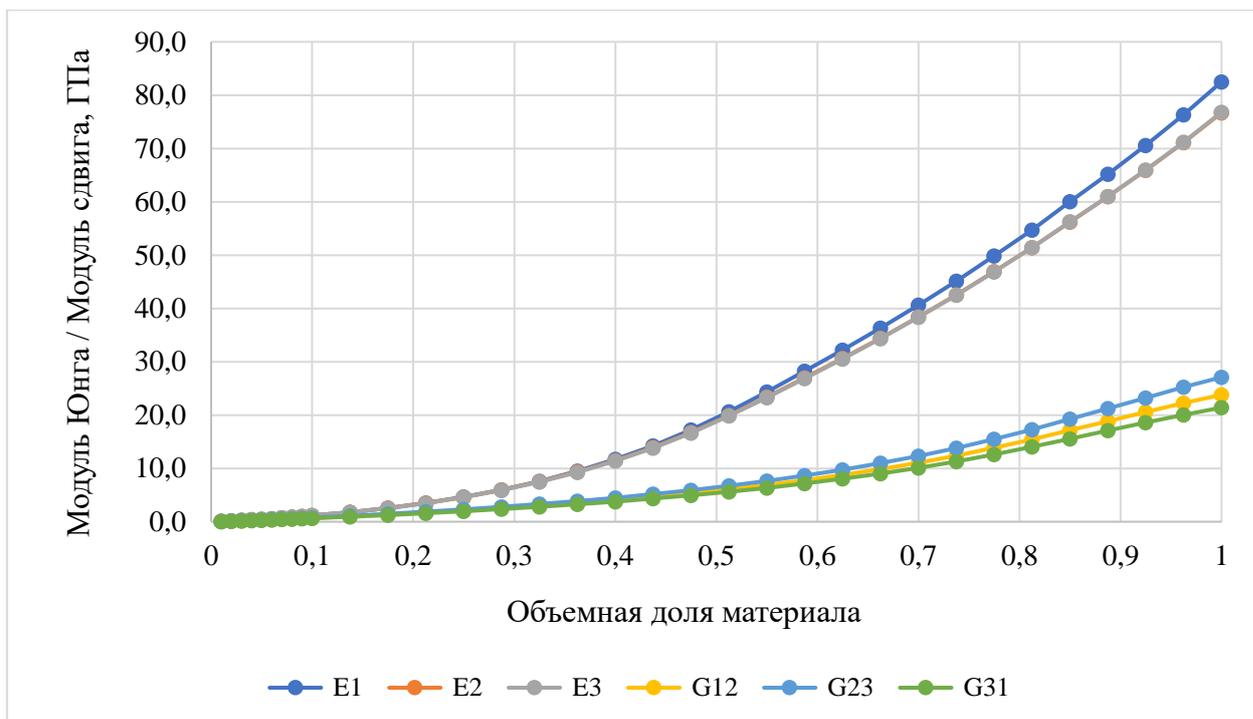


Рис.1.5.2.14. Зависимость значений модулей Юнга и модулей сдвига от объемной доли материала для ячейки типа 4

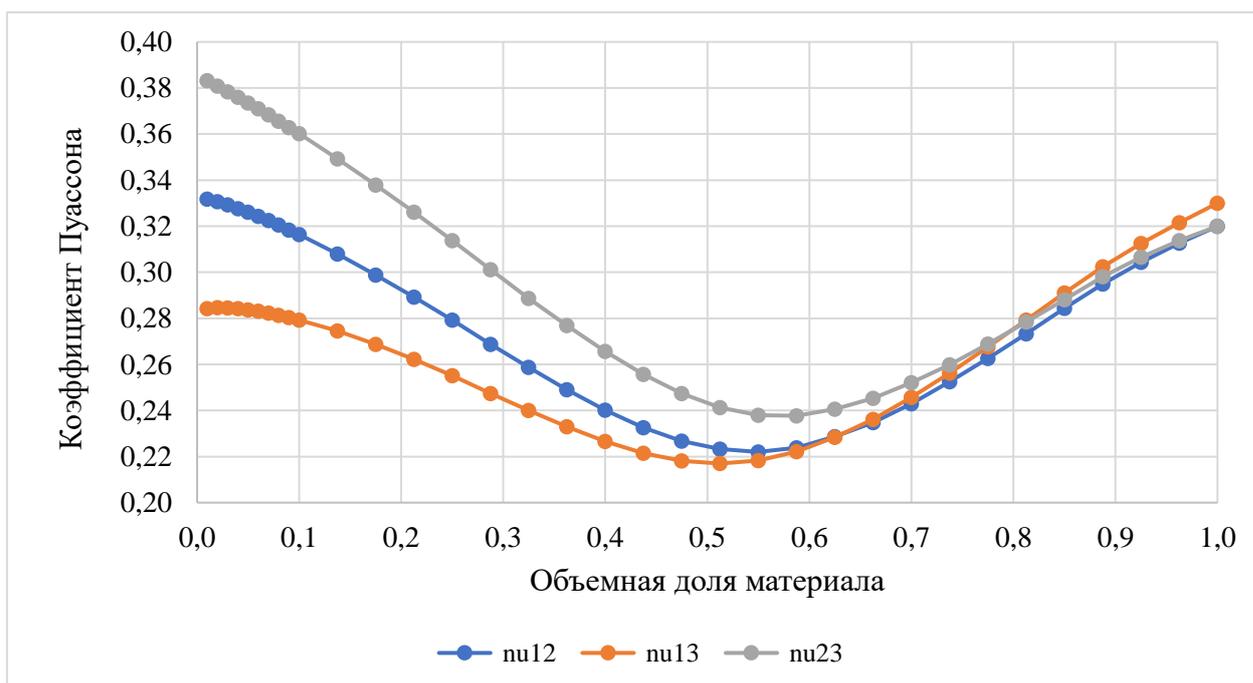


Рис.1.5.2.15. Зависимость значений коэффициента Пуассона от объемной доли материала для ячейки типа 4

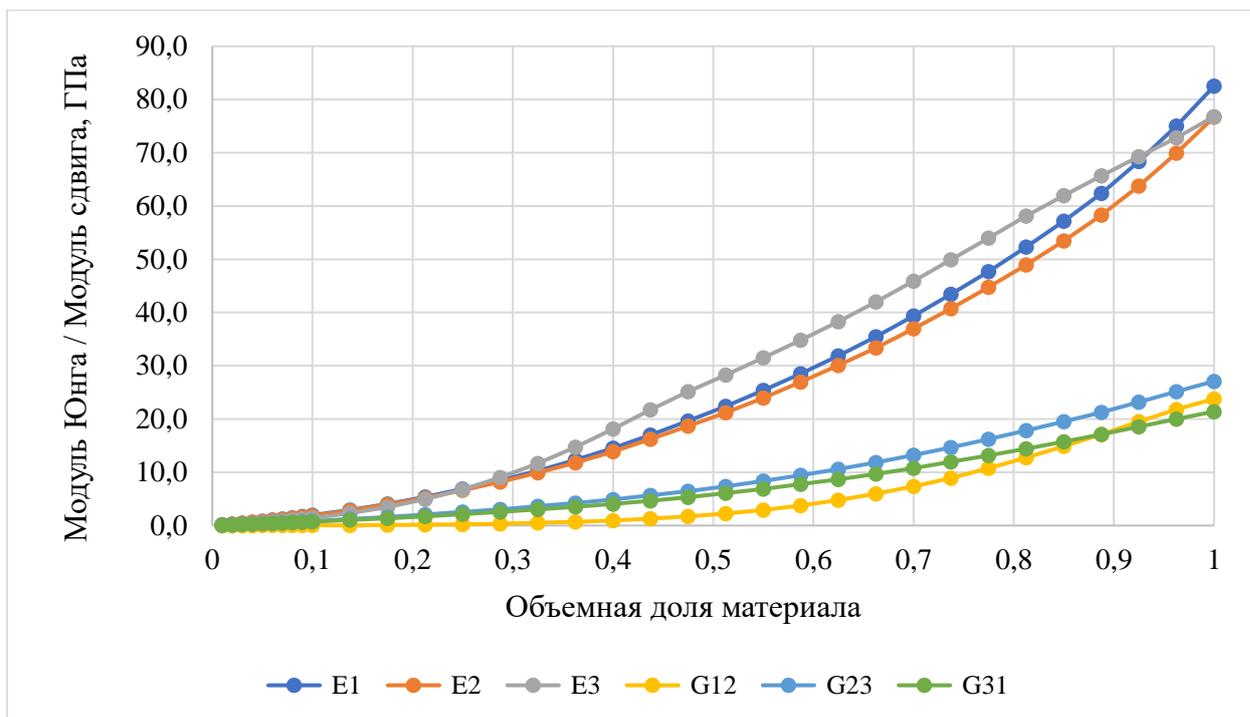


Рис.1.5.2.16. Зависимость значений модулей Юнга и модулей сдвига от объемной доли материала для ячейки типа 5

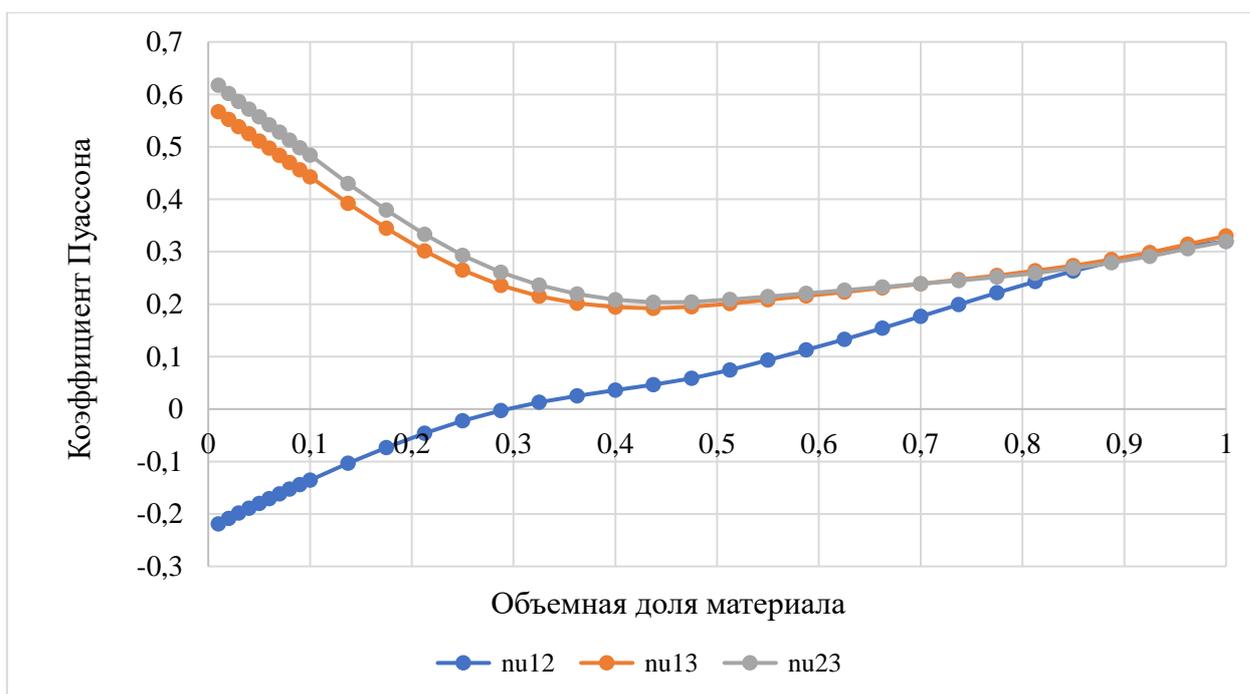


Рис.1.5.2.17. Зависимость значений коэффициента Пуассона от объемной доли материала для ячейки типа 5

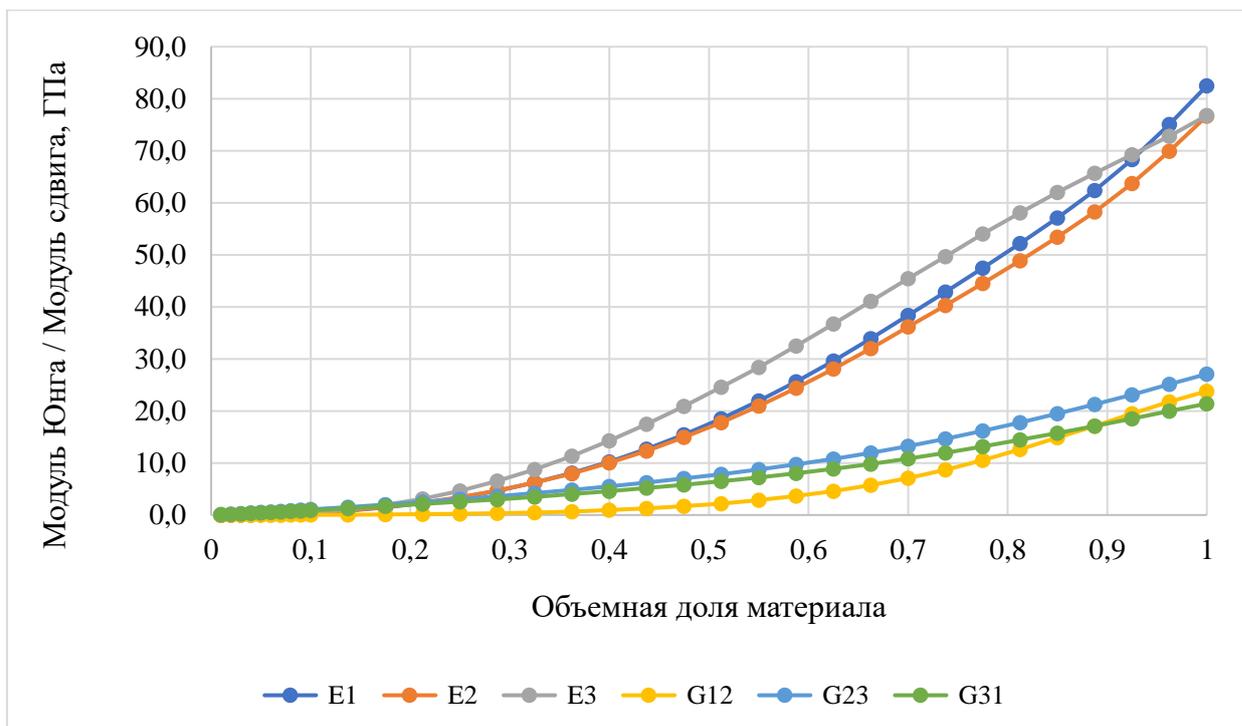


Рис.1.5.2.18. Зависимость значений модулей Юнга и модулей сдвига от объемной доли материала для ячейки типа б

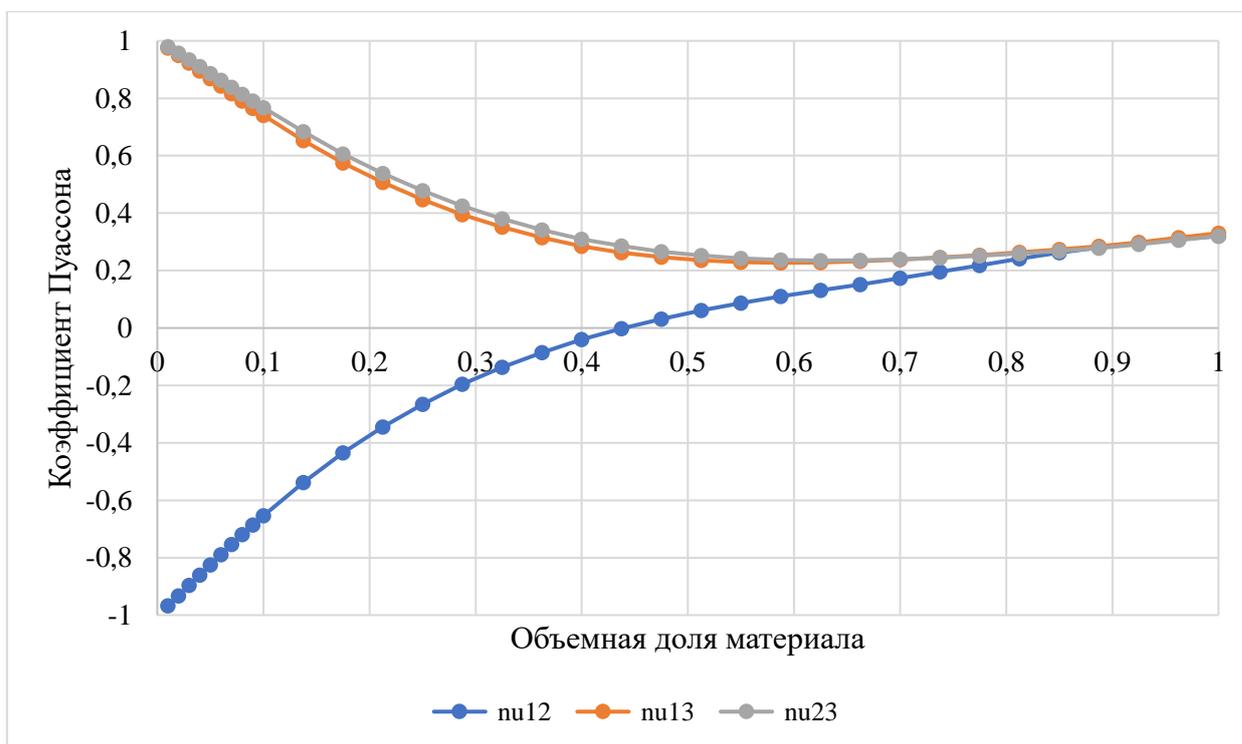


Рис.1.5.2.19. Зависимость значений коэффициента Пуассона от объемной доли материала для ячейки типа б

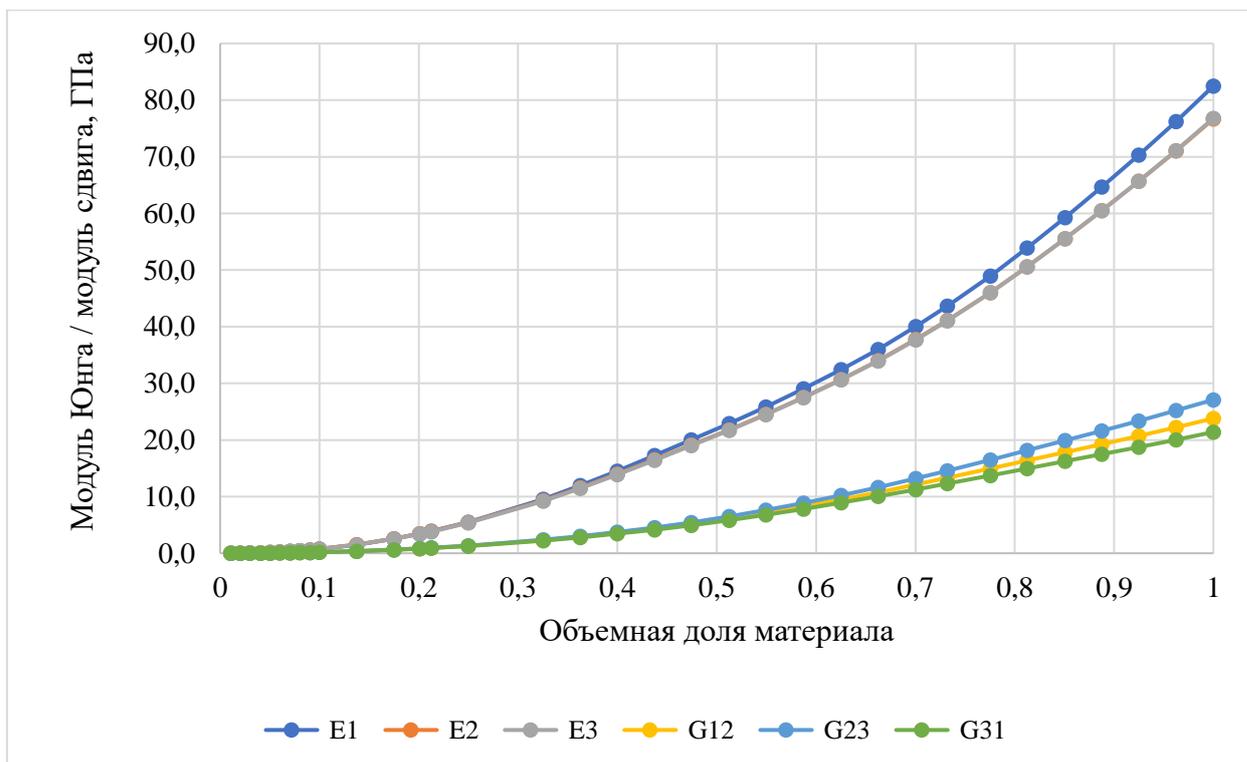


Рис.1.5.2.20. Зависимость значений модулей Юнга и модулей сдвига от объемной доли материала для ячейки типа 7

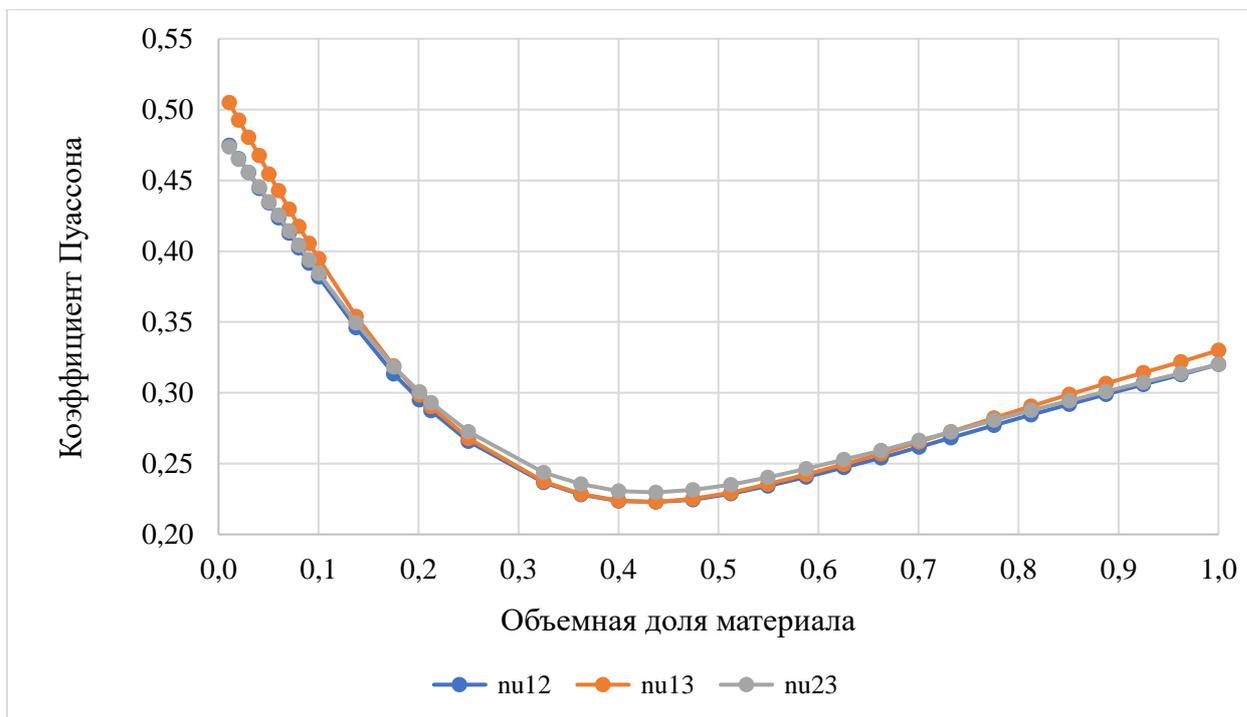


Рис.1.5.2.21. Зависимость значений коэффициента Пуассона от объемной доли материала для ячейки типа 7

Отметим, что модули упругости метаматериала с ростом объемной доли стремятся к значениям параметров сплошного материала, что полностью соответствует физическому смыслу. Степень анизотропии незначительно

повышается с увеличением относительной плотности. Зависимости параметров от относительной плотности материала большинства типов ячеек имеют существенно нелинейный характер. Механические свойства, полученные при анализе метаматериалов с промежуточной объемной долей материала 0,01; 0,1; 0,4 и 0,7 приведены в таблице (1.5.2.1).

Таблица 1.5.2.1

Значения механических характеристик ячеек типов 1-7 с объемной долей материала 0,01; 0,1; 0,4 и 0,7

Тип ячейки	Объемная доля материала	Модуль Юнга, ГПа			Модуль сдвига, ГПа			Коэффициент Пуассона		
		E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{yx}	G_{xz}	ν_{xy}	ν_{yz}	ν_{xz}
Тип 1	0,01	0,291	0,271	0,272	0,0005	0,0005	0,0005	0,017	0,017	0,018
	0,1	3,365	3,138	3,141	0,074	0,075	0,072	0,059	0,060	0,061
	0,4	17,914	16,760	16,763	2,227	2,374	2,091	0,142	0,144	0,146
	0,7	41,684	39,117	39,089	9,883	10,897	9,056	0,228	0,231	0,233
Тип 2	0,01	0,113	0,107	0,107	0,053	0,054	0,053	0,287	0,286	0,292
	0,1	1,392	1,325	1,325	0,643	0,654	0,633	0,292	0,291	0,298
	0,4	9,715	9,361	9,324	4,069	4,266	3,899	0,276	0,274	0,287
	0,7	31,945	30,621	30,487	11,430	12,499	10,589	0,267	0,265	0,279
Тип 3	0,01	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,496	0,490	0,499
	0,1	0,362	0,356	0,358	0,366	0,374	0,359	0,444	0,420	0,465
	0,4	7,214	7,148	7,116	5,260	5,623	4,964	0,329	0,293	0,375
	0,7	28,763	27,855	27,710	13,010	14,324	11,994	0,293	0,277	0,322
Тип 4	0,01	0,083	0,083	0,083	0,059	0,065	0,055	0,332	0,284	0,383
	0,1	1,156	1,159	1,154	0,698	0,762	0,648	0,316	0,279	0,360
	0,4	11,699	11,488	11,402	4,089	4,492	3,776	0,240	0,227	0,266
	0,7	40,627	38,440	38,336	11,075	12,335	10,121	0,243	0,246	0,252
Тип 5	0,01	0,144	0,137	0,088	0,000	0,072	0,061	-0,22	0,567	0,618
	0,1	1,932	1,851	1,404	0,023	0,840	0,711	-0,14	0,443	0,484
	0,4	14,525	13,880	18,115	0,955	4,896	4,058	0,036	0,194	0,209
	0,7	39,363	36,981	45,894	7,330	13,216	10,785	0,177	0,239	0,239
Тип 6	0,01	0,003	0,003	0,003	0,000	0,096	0,081	-0,97	0,975	0,980
	0,1	0,420	0,430	0,496	0,021	1,071	0,904	-0,65	0,741	0,768
	0,4	10,243	10,048	14,293	0,942	5,517	4,587	-0,04	0,285	0,310
	0,7	38,423	36,181	45,474	7,103	13,264	10,836	0,173	0,238	0,239
Тип 7	0,01	0,005	0,005	0,005	0,002	0,002	0,002	0,475	0,505	0,474

	0,1	0,746	0,764	0,749	0,190	0,193	0,187	0,382	0,395	0,384
	0,4	14,536	14,002	13,908	3,574	3,725	3,437	0,224	0,224	0,231
	0,7	40,039	37,772	37,704	12,131	13,218	11,261	0,262	0,265	0,266

Для наглядного сравнения полученных модулей для каждого из типов ячеек приведем сравнительные графики, по которым хорошо прослеживаются различия в изменении значения модуля Юнга ячеек каждого типа при одинаковом для каждой ячейки значении объемной доли материала.

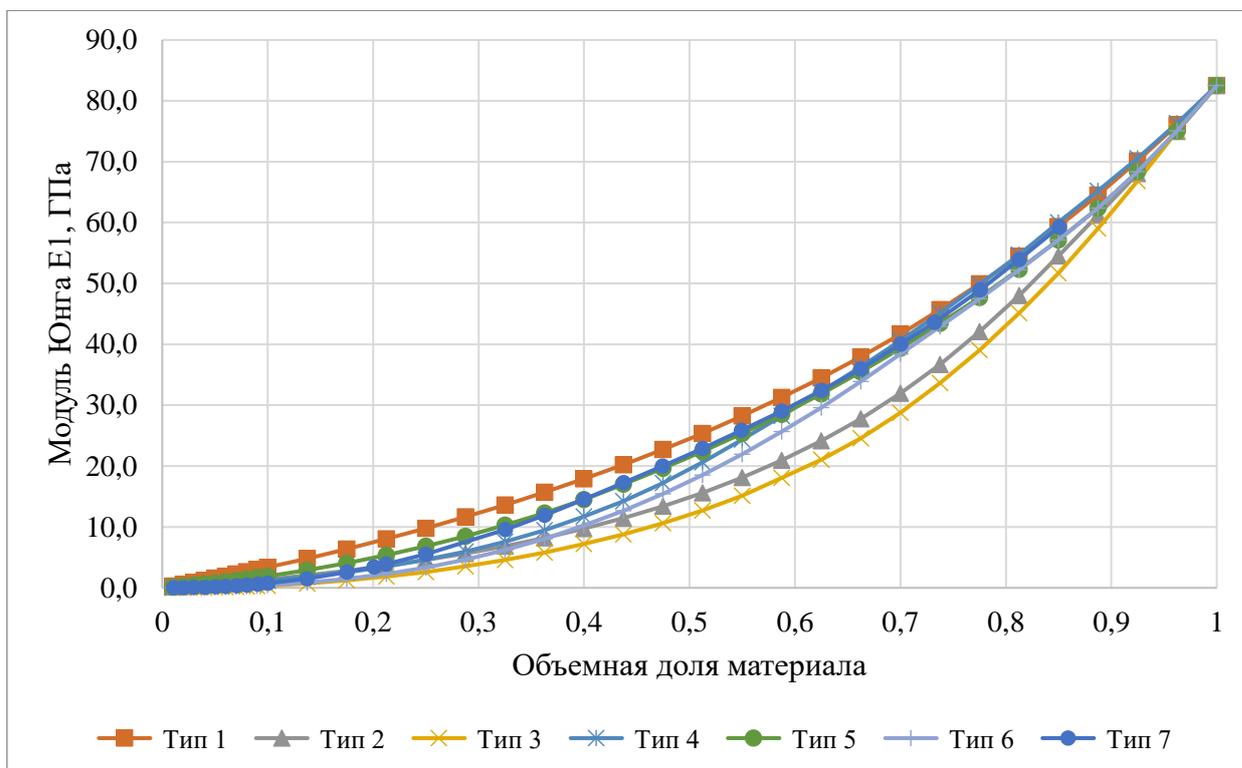


Рис. 1.5.2.22. Зависимость модуля Юнга E_1 от объемной доли материала для ячеек типов 1-7

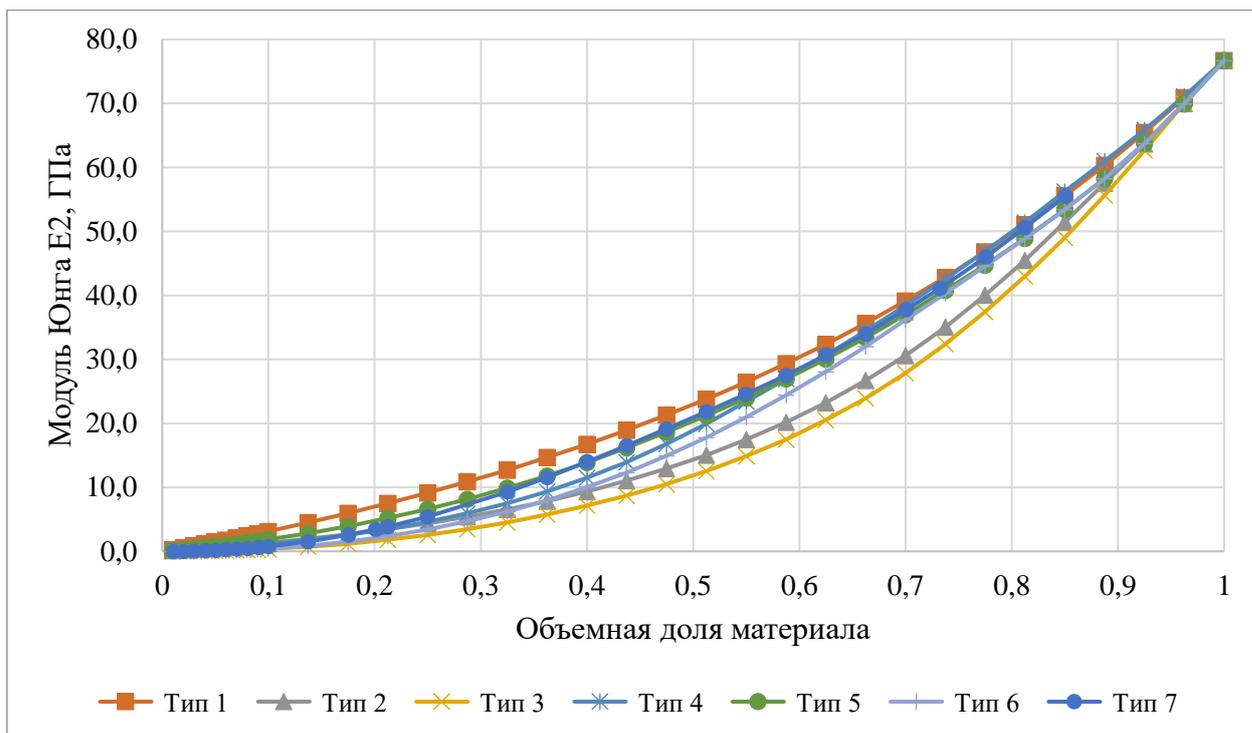


Рис.1.5.2.23. Зависимость модуля Юнга E_2 от объемной доли материала для ячеек типов 1-7

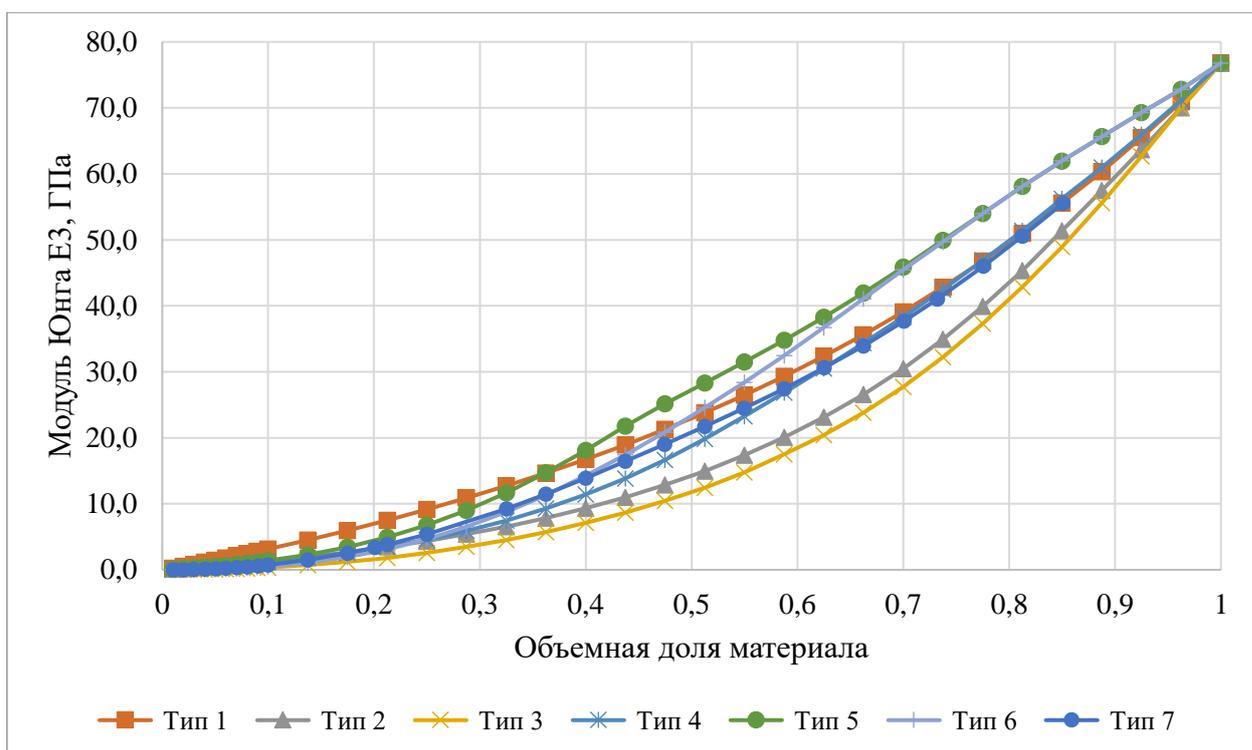


Рис.1.5.2.24. Зависимость модуля Юнга E_3 от объемной доли материала для ячеек типов 1-7

При анализе кривых хорошо прослеживается зависимость параметров материала от объемной доли материала. При сравнении упругих модулей в каждом направлении для всех рассматриваемых типов ячеек выделяются ячейки

с наибольшим и наименьшим показателем упругого модуля вдоль каждой из осей. Так наибольший модуль Юнга вдоль осей X и Y имеет ячейка типа 1, вдоль оси Z – при меньших значениях плотности заполнения больший модуль Юнга имеет ячейка типа 1, при средних – ячейка типа 5, при объемной доле, близкой к 1 – ячейки типов 5 и 6. Наименьший модуль упругости вдоль каждой из осей имеет ячейка типа 3. Зависимость параметров от относительной плотности материала схожа для каждого из типов ячеек, однако в силу отсутствия полной симметрии некоторых типов базовых ячеек, выделяются различия, в основном при рассмотрении модуля Юнга вдоль третьей оси. Также отметим, что метаматериалы, в основе которых лежат ячейки типа 3 и 4, демонстрируют «провисание» в значениях модулей Юнга при значениях объемных долей 0,3-0,8. Это может быть полезно с точки зрения выбора оптимальной комбинации массовых и жесткостных свойств.

1.5.3. Исследование влияния геометрических соотношений элементарной ячейки на механические характеристики метаматериала

В текущем разделе описывается исследование влияния геометрических соотношений ячейки элементарного объема на полученные характеристики метаматериала. Ранее рассматривались ячейки характерным размером $L_x = L_y = L_z = 10$ мм. Отойдём от привычного понимания кубической элементарной ячейки и введем диапазон изменения одного из геометрических параметров – значения длины L_x . Оценим тенденцию изменения параметров метаматериала при изменении соотношений размеров элементарной ячейки. Для каждой рассматриваемой ячейки значение длины L_x меняется от 10 до 1 мм с шагом в 1 мм. Далее представлен внешний вид и значения механических характеристик лишь для четырех топологий элементарной ячейки каждого типа. Для корректного анализа результатов, гомогенизация проводилась при фиксированном значении объемной доли, равной 0,05, и с сохранением поперечного сечения стержня.

Внешний вид элементарной ячейки каждого типа при $L_x \in \{10, 7, 4, 1\}$ представлен на рисунках ниже.

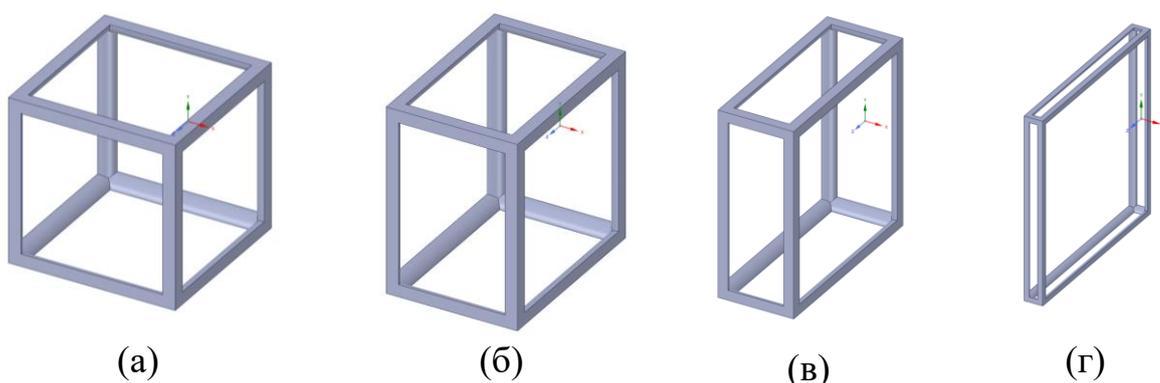


Рис.1.5.3.1. Внешний вид ячейки типа 1 при изменении геометрического размера L_x : (а) 10 мм, (б) 7 мм, (в) 4 мм, (г) 1 мм

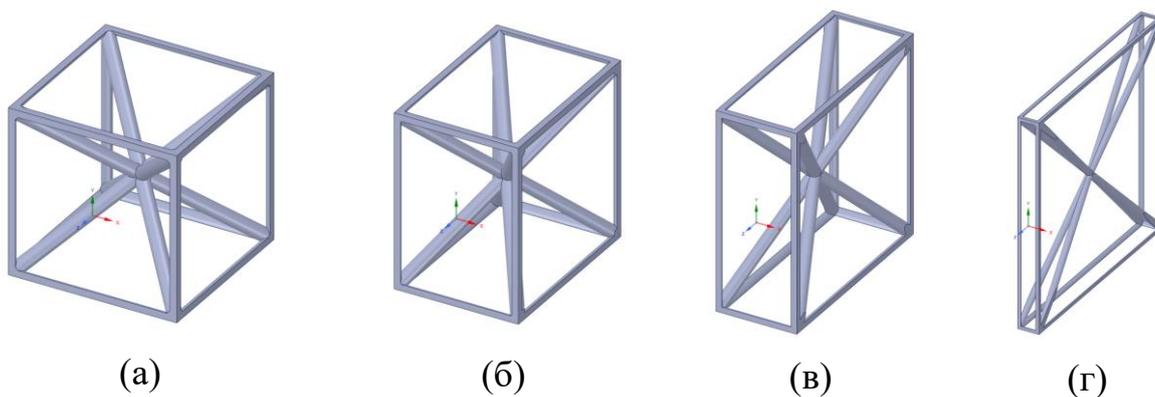


Рис.1.5.3.2. Внешний вид ячейки типа 2 при изменении геометрического размера L_x : (а) 10 мм, (б) 7 мм, (в) 4 мм, (г) 1 мм

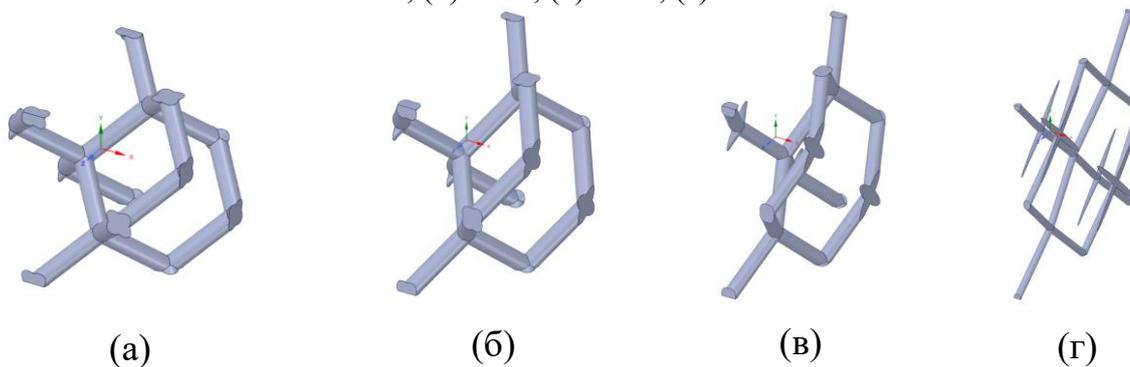


Рис.1.5.3.3. Внешний вид ячейки типа 3 при изменении геометрического размера L_x : (а) 10 мм, (б) 7 мм, (в) 4 мм, (г) 1 мм

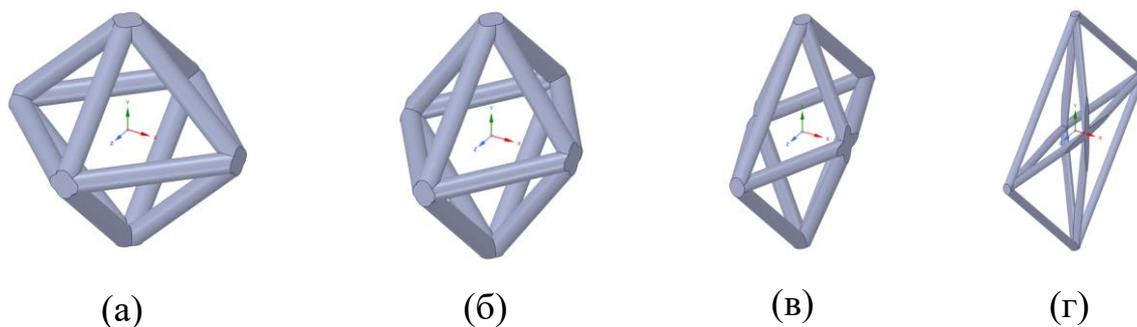


Рис.1.5.3.4. Внешний вид ячейки типа 4 при изменении геометрического размера L_x : (а) 10 мм, (б) 7 мм, (в) 4 мм, (г) 1 мм

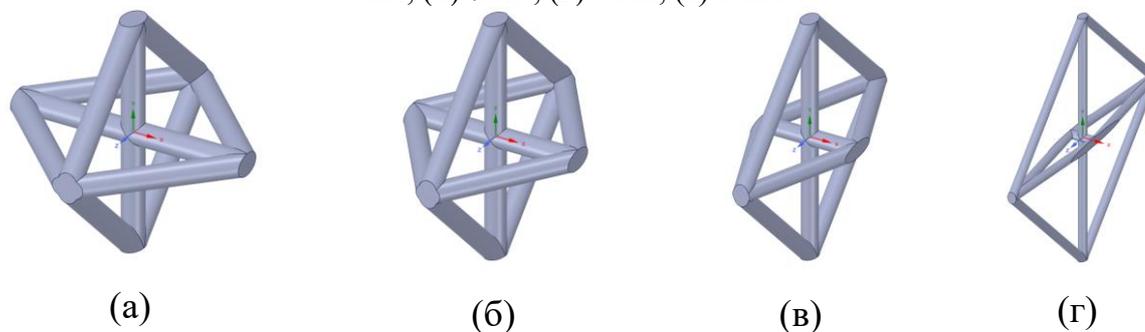


Рис.1.5.3.5. Внешний вид ячейки типа 5 при изменении геометрического размера L_x : (а) 10 мм, (б) 7 мм, (в) 4 мм, (г) 1 мм

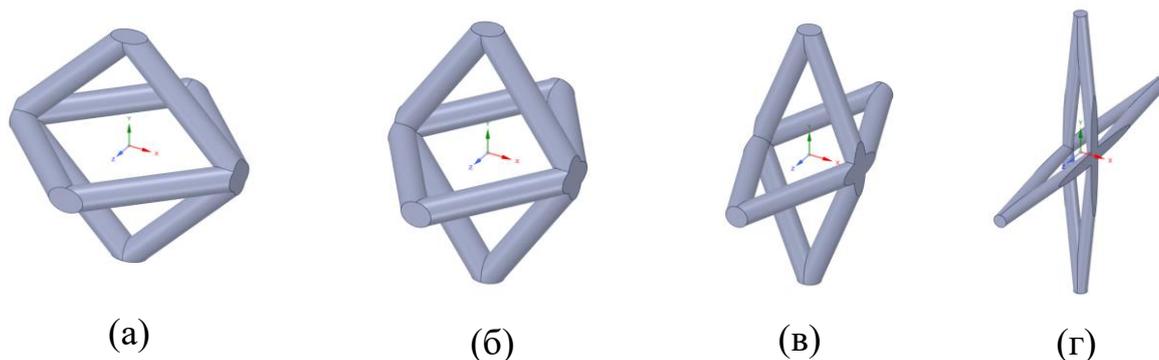


Рис.1.5.3.6. Внешний вид ячейки типа 6 при изменении геометрического размера L_x : (а) 10 мм, (б) 7 мм, (в) 4 мм, (г) 1 мм

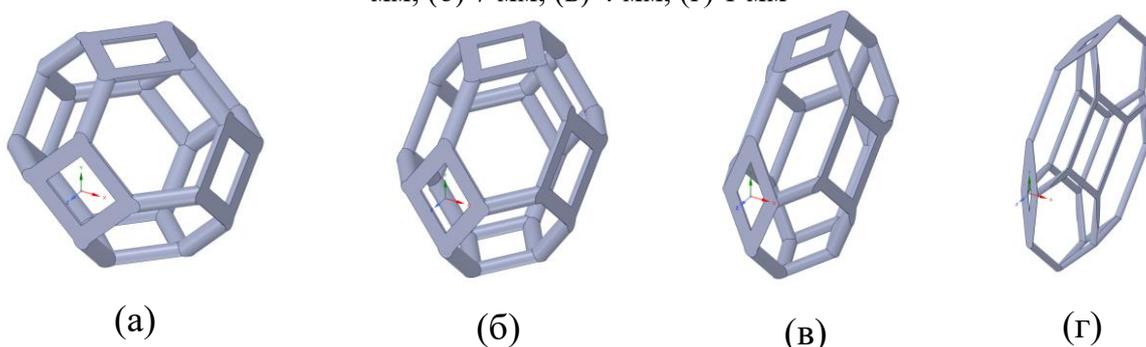


Рис.1.5.3.7. Внешний вид ячейки типа 7 при изменении геометрического размера L_x : (а) 10 мм, (б) 7 мм, (в) 4 мм, (г) 1 мм

Конечно-элементная гомогенизация проводилась с применением системы Ansys Material Designer в статической постановке с реализацией периодических граничных условий. Параметры сплошного материала заданы в соответствии со значениями таблицы (1.2.1). Геометрия каждого метаматериала состоит из одной элементарной ячейки, ограничение на максимальный размер конечного элемента расчетной сетки также составляет 1 мм.

Таблица 1.5.3.1

Значения механических характеристик элементарных ячеек типов 1-7 при изменении геометрического размера L_x

Тип ячейки	Значение L_x , мм	Модуль Юнга, ГПа			Модуль сдвига, ГПа			Коэффициент Пуассона		
		E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{yx}	G_{xz}	ν_{xy}	ν_{yz}	ν_{xz}
Тип 1	10	1,521	1,417	1,418	0,014	0,014	0,014	0,039	0,040	0,040
	7	1,193	1,563	1,564	0,015	0,012	0,014	0,035	0,036	0,035
	4	0,776	1,728	1,730	0,012	0,008	0,012	0,029	0,029	0,028
	1	0,233	1,880	1,882	0,004	0,002	0,004	0,016	0,017	0,015
Тип 2	10	0,605	0,575	0,575	0,283	0,287	0,280	0,291	0,290	0,296
	7	0,407	0,689	0,689	0,214	0,414	0,212	0,165	0,165	0,409
	4	0,233	0,791	0,791	0,107	0,551	0,106	0,062	0,062	0,512

	1	0,065	0,849	0,850	0,013	0,614	0,013	0,007	0,008	0,538
Тип 3	10	0,076	0,075	0,076	0,079	0,080	0,078	0,474	0,458	0,486
	7	0,033	0,099	0,100	0,050	0,139	0,050	0,237	0,231	0,593
	4	0,007	0,096	0,096	0,015	0,255	0,015	0,079	0,078	0,783
	1	0,0001	0,028	0,028	0,0003	0,549	0,0003	0,005	0,005	0,974
Тип 4	10	0,470	0,471	0,470	0,312	0,340	0,290	0,326	0,284	0,374
	7	0,176	0,673	0,672	0,267	0,372	0,250	0,209	0,192	0,196
	4	0,029	0,910	0,907	0,154	0,397	0,147	0,083	0,081	0,046
	1	0,001	1,264	1,264	0,018	0,412	0,018	0,006	0,006	0,235
Тип 5	10	0,807	0,768	0,531	0,004	0,376	0,319	-0,18	0,513	0,559
	7	0,554	0,883	0,774	0,004	0,409	0,275	-0,11	0,319	0,439
	4	0,315	0,994	1,183	0,003	0,440	0,167	-0,04	0,131	0,321
	1	0,084	1,041	1,436	0,001	0,464	0,025	0,001	0,015	0,285
Тип 6	10	0,089	0,083	0,082	0,448	0,004	0,415	0,951	0,950	-0,84
	7	0,051	0,181	0,180	0,407	0,005	0,380	0,473	0,472	-0,8
	4	0,022	0,554	0,549	0,259	0,004	0,247	0,156	0,156	-0,61
	1	0,016	1,779	1,779	0,043	0,001	0,042	0,010	0,010	0,010
Тип 7	10	0,148	0,154	0,151	0,041	0,041	0,040	0,436	0,457	0,437
	7	0,077	0,183	0,181	0,032	0,049	0,032	0,220	0,230	0,633
	4	0,025	0,152	0,151	0,017	0,043	0,018	0,075	0,077	0,846
	1	0,003	0,043	0,043	0,003	0,013	0,003	0,005	0,005	0,976

На расчеты для каждой элементарной ячейки, не считая построения геометрии, уходит до 5 минут в зависимости от сложности геометрии. Далее представлены наборы кривых, отражающие зависимость значений упругих характеристик материала при изменении соотношения сторон для каждой элементарной ячейки.

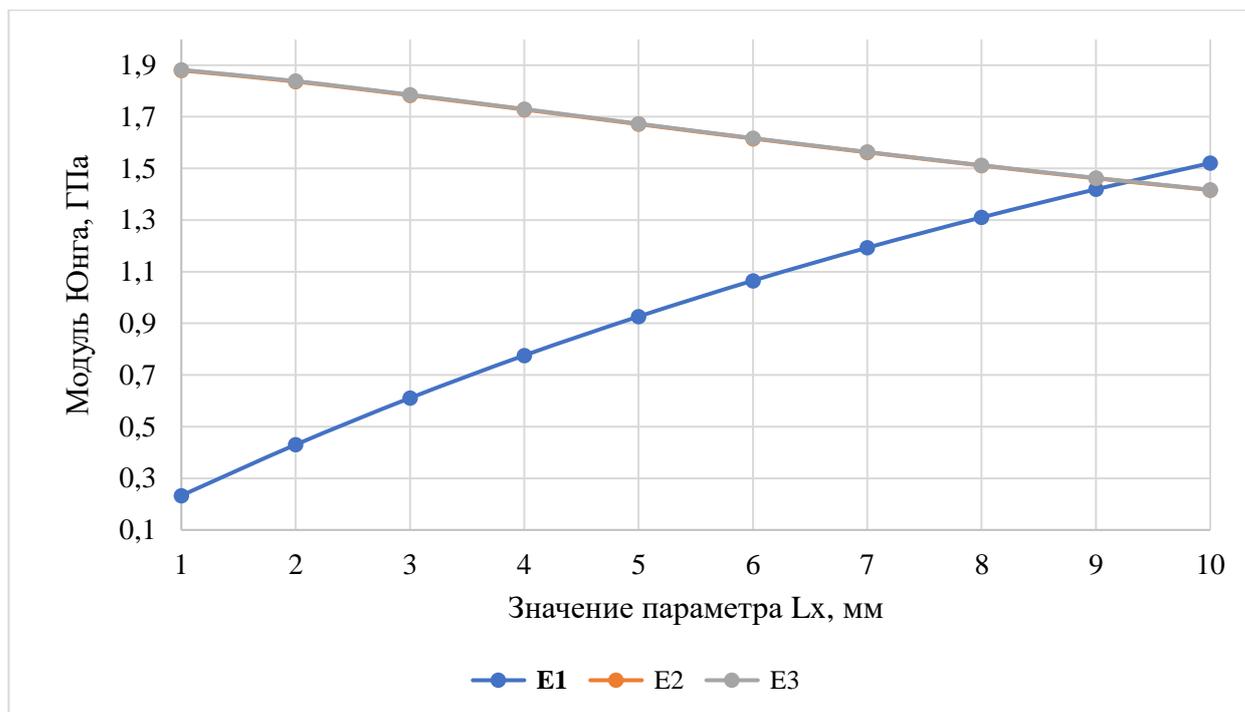


Рис.1.5.3.8. Зависимость значений модулей Юнга от параметра L_x для ячейки типа 1

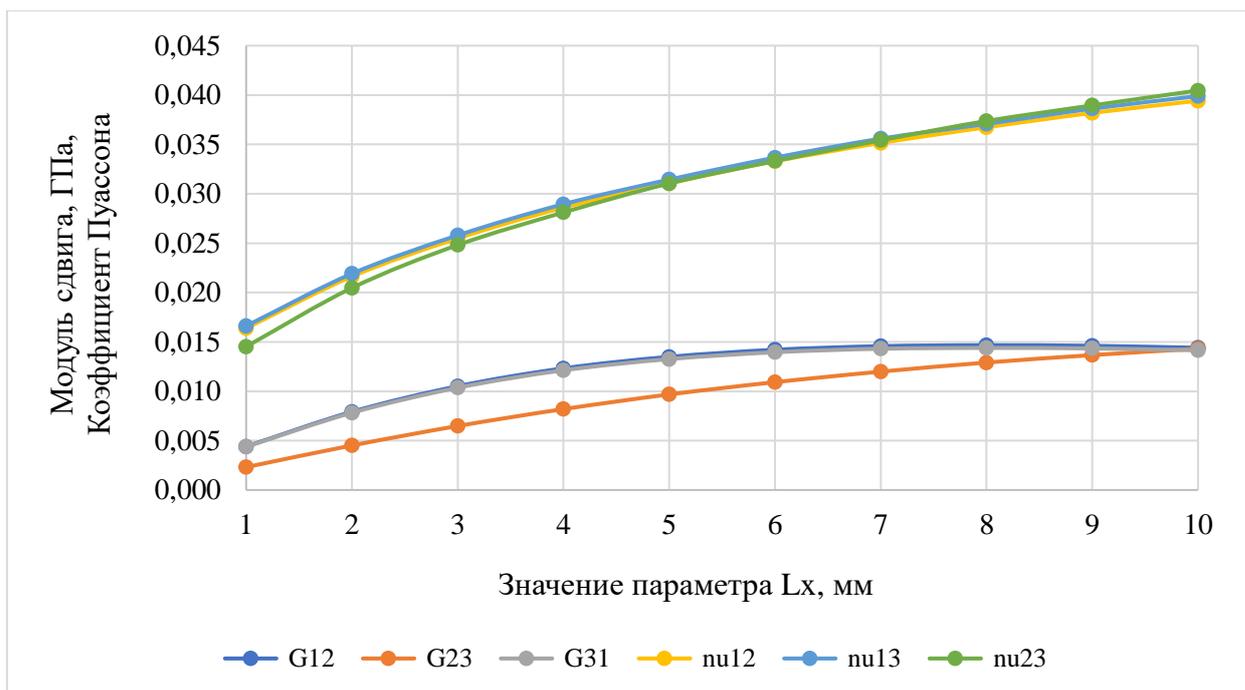


Рис.1.5.3.9. Зависимость значений модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от параметра L_x для ячейки типа 1

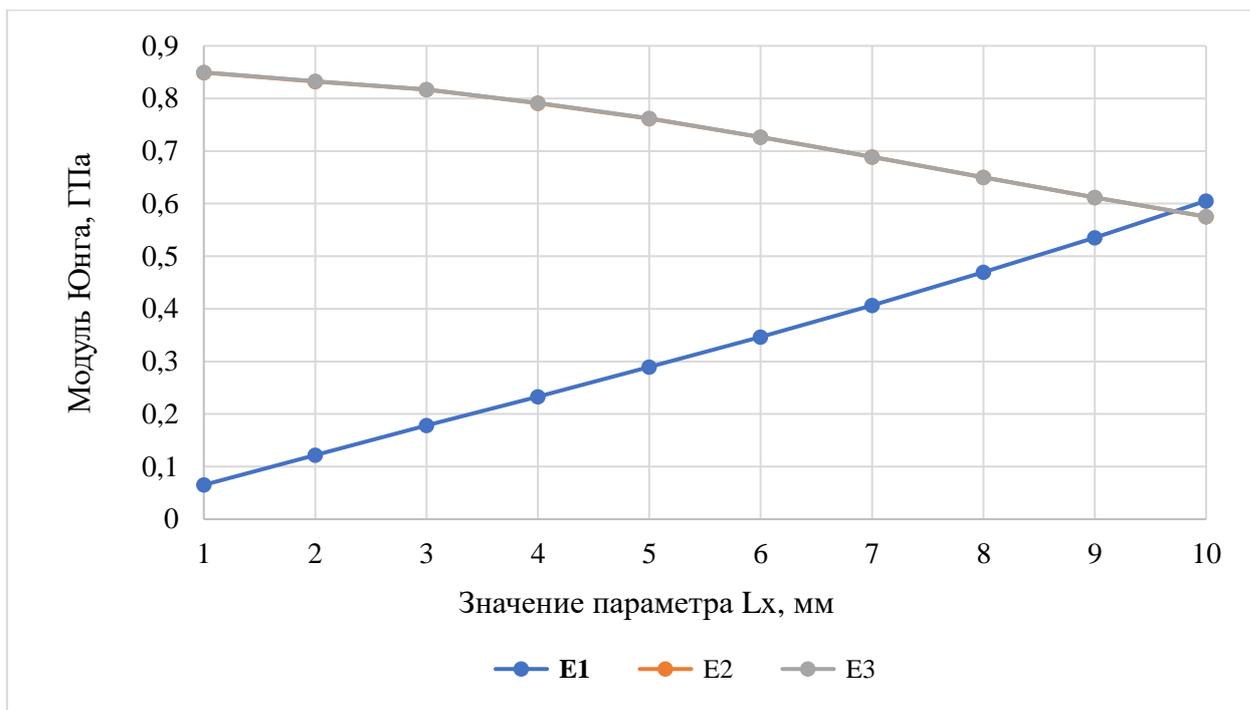


Рис.1.5.3.10. Зависимость значений модулей Юнга от параметра L_x для ячейки типа 2

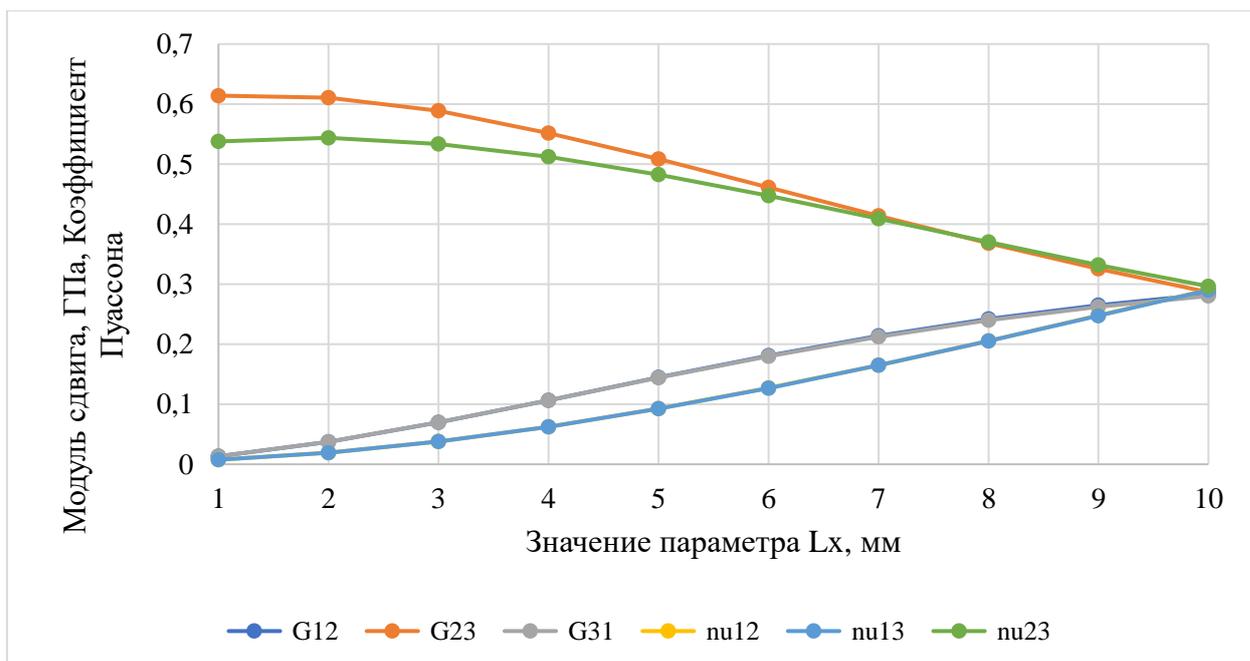


Рис.1.5.3.11. Зависимость значений модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от параметра L_x для ячейки типа 2

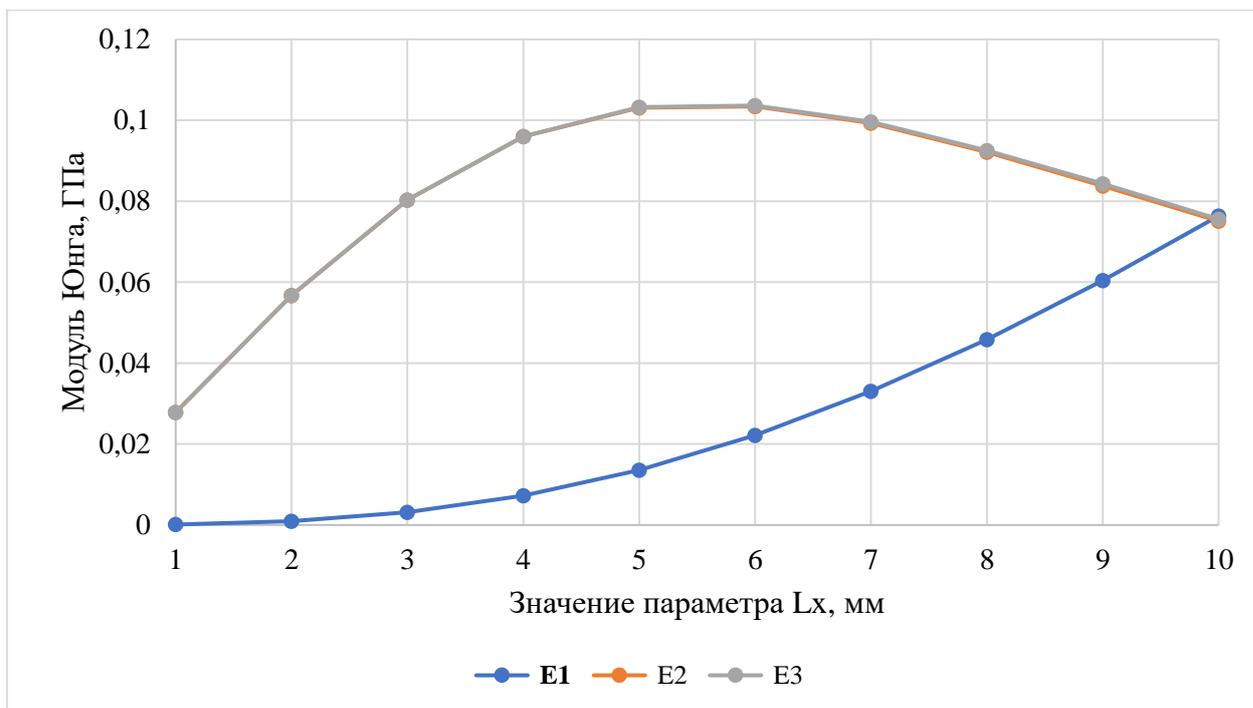


Рис.1.5.3.12. Зависимость значений модулей Юнга от параметра L_x для ячейки типа 3

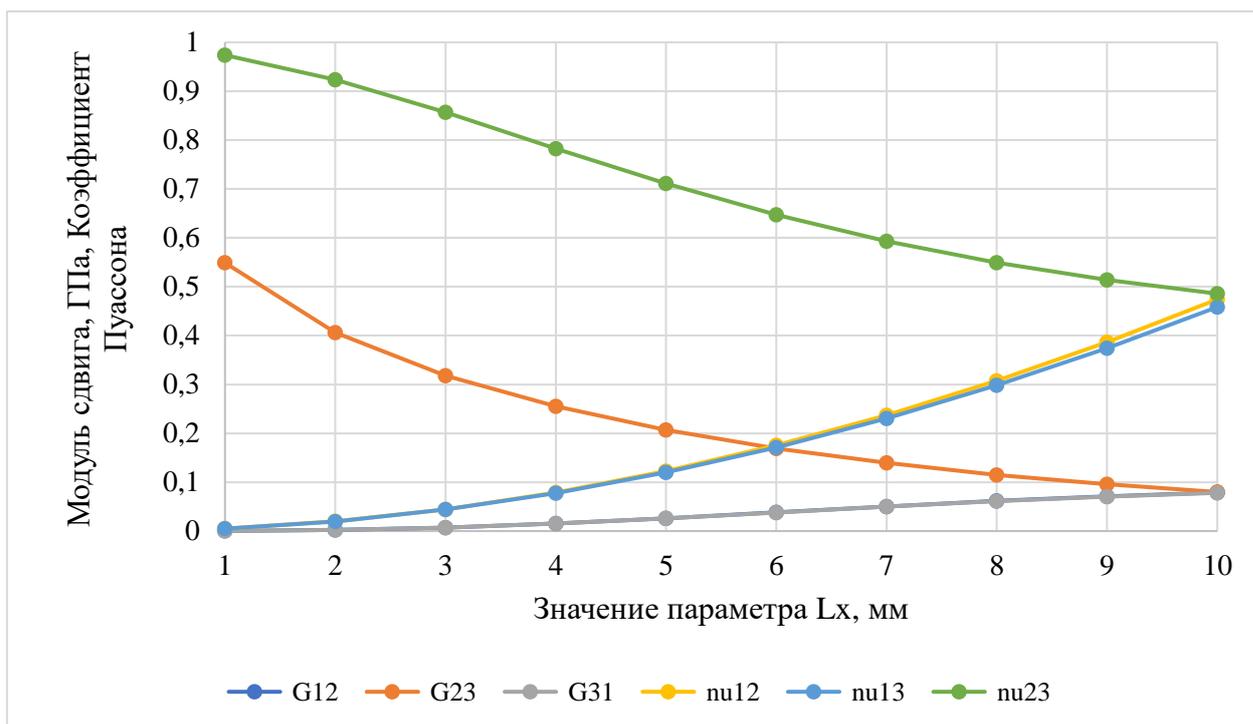


Рис.1.5.3.13. Зависимость значений модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от параметра L_x для ячейки типа 3

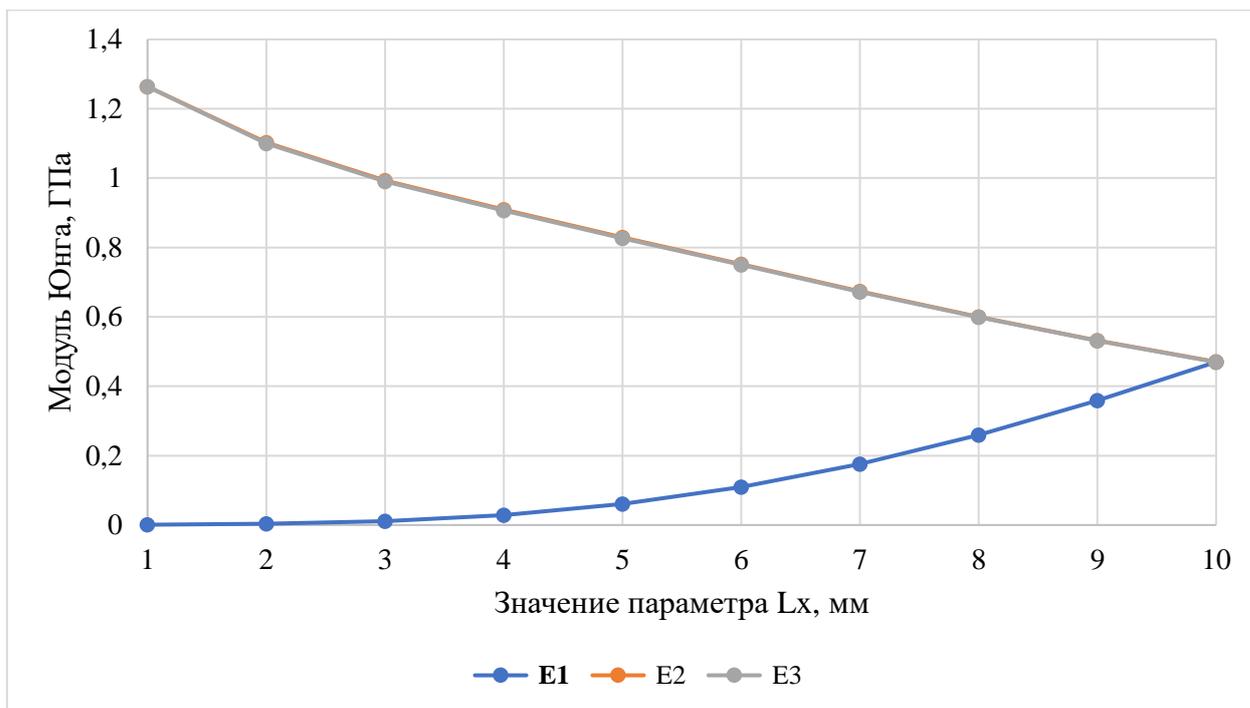


Рис.1.5.3.14. Зависимость значений модулей Юнга от параметра L_x для ячейки типа 4

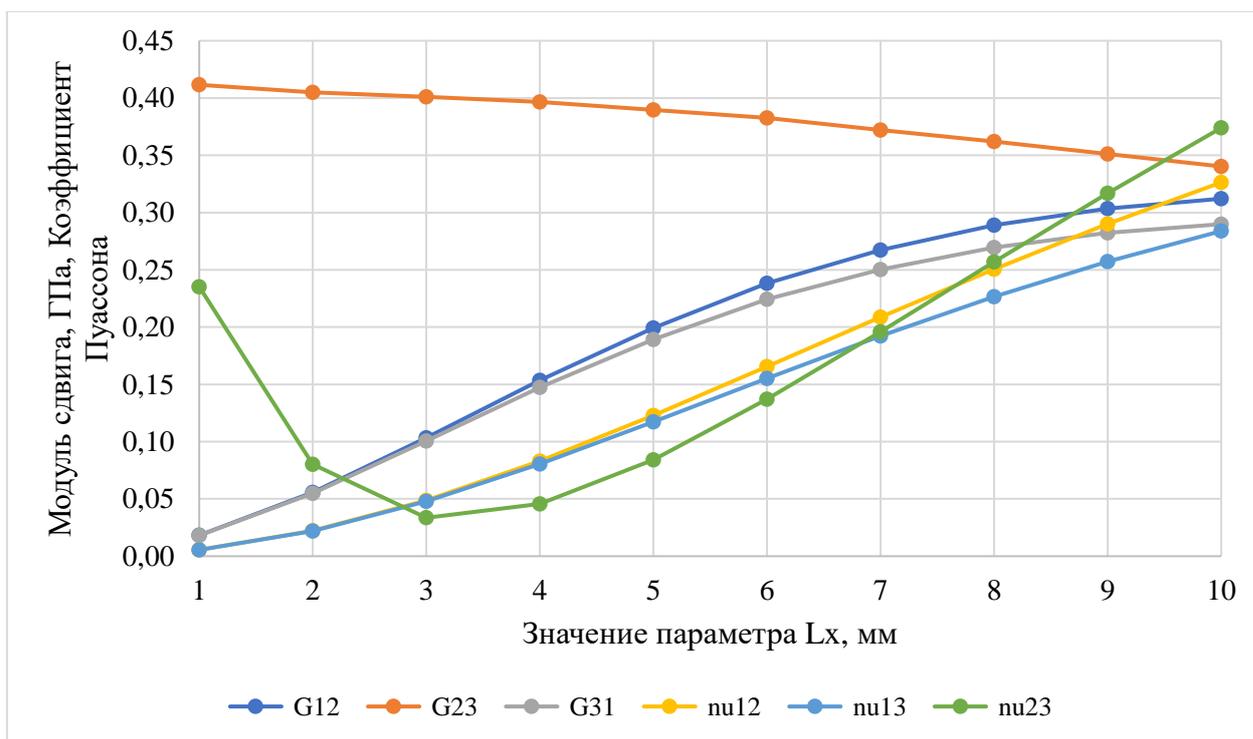


Рис.1.5.3.15. Зависимость значений модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от параметра L_x для ячейки типа 4

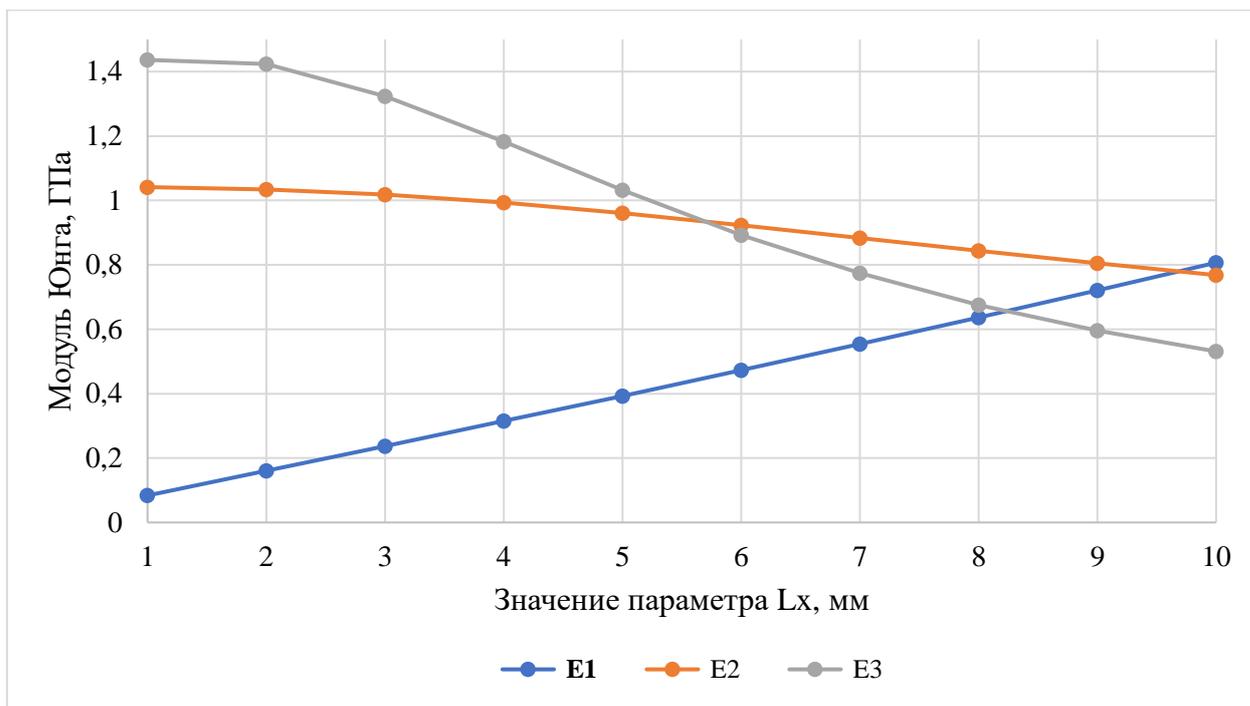


Рис.1.5.3.16. Зависимость значений модулей Юнга от параметра L_x для ячейки типа 5

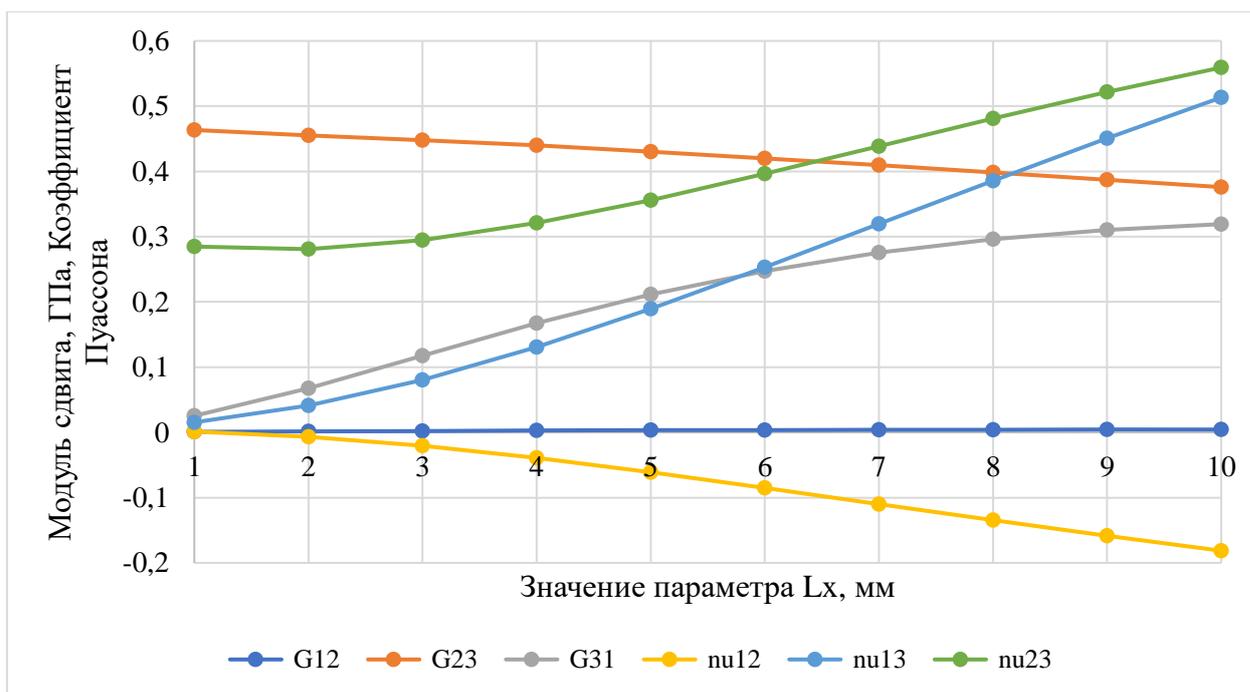


Рис.1.5.3.17. Зависимость значений модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от параметра L_x для ячейки типа 5

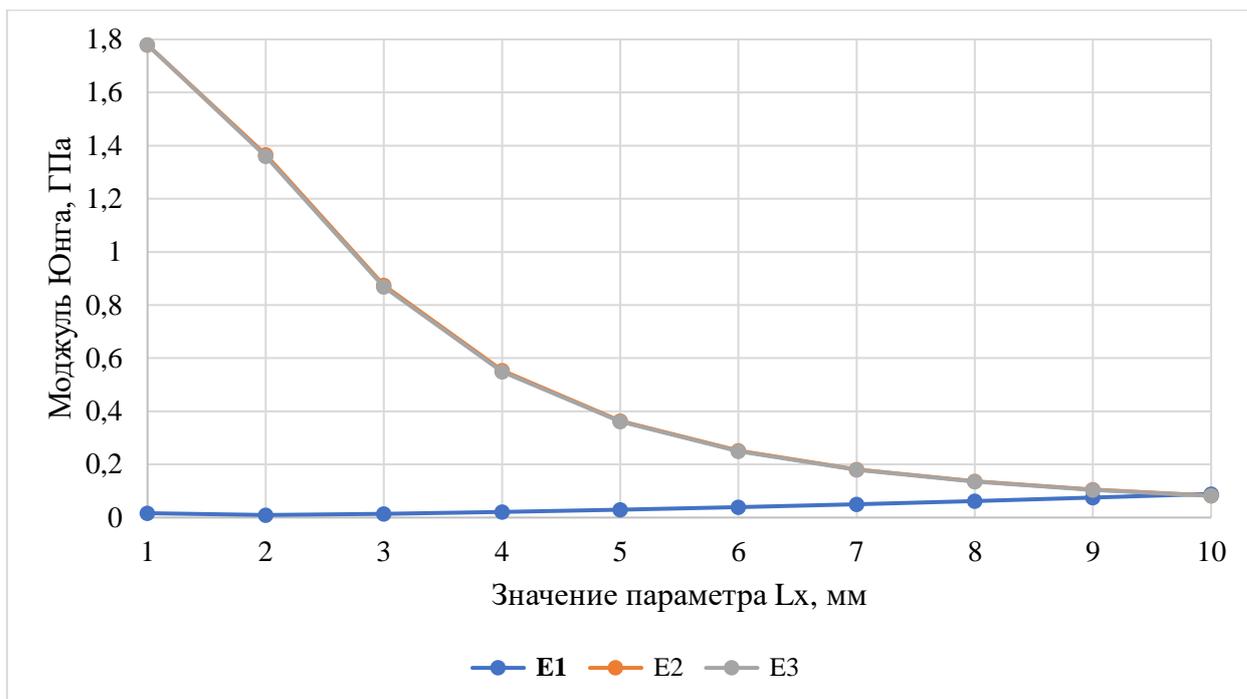


Рис.1.5.3.18. Зависимость значений модулей Юнга от параметра L_x для ячейки типа 6

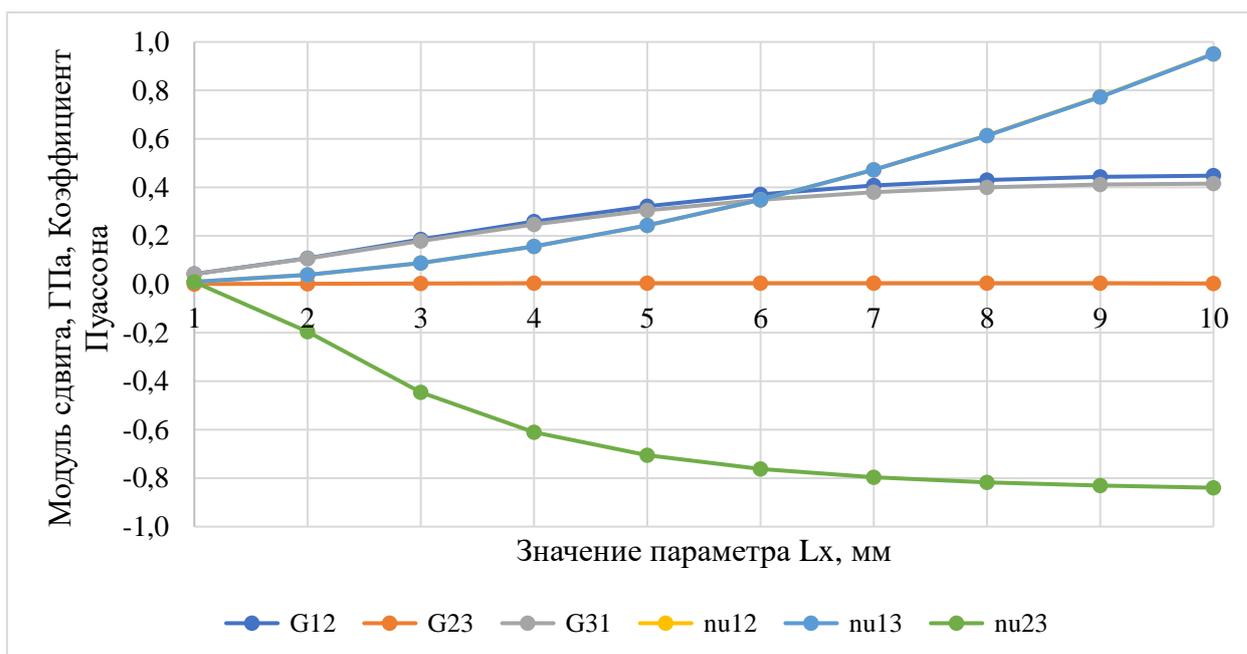


Рис.1.5.3.19. Зависимость значений модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от параметра L_x для ячейки типа 6

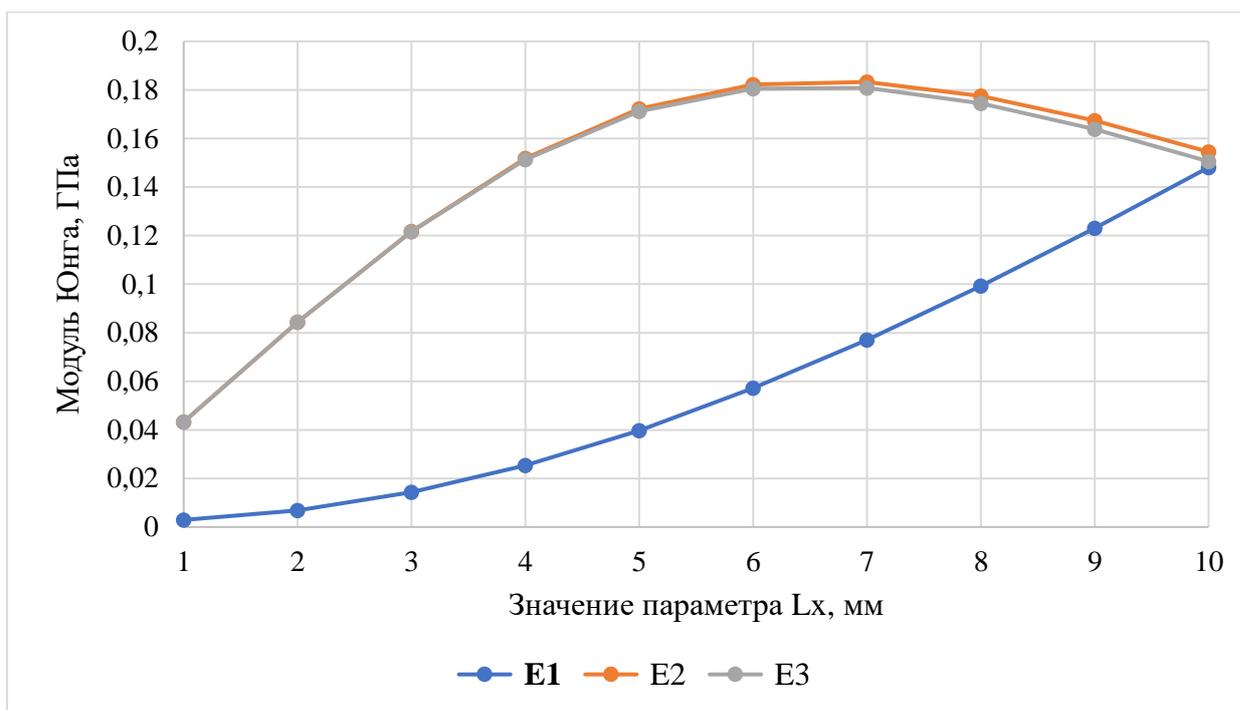


Рис.1.5.3.20. Зависимость значений модулей Юнга от параметра L_x для ячейки типа 7

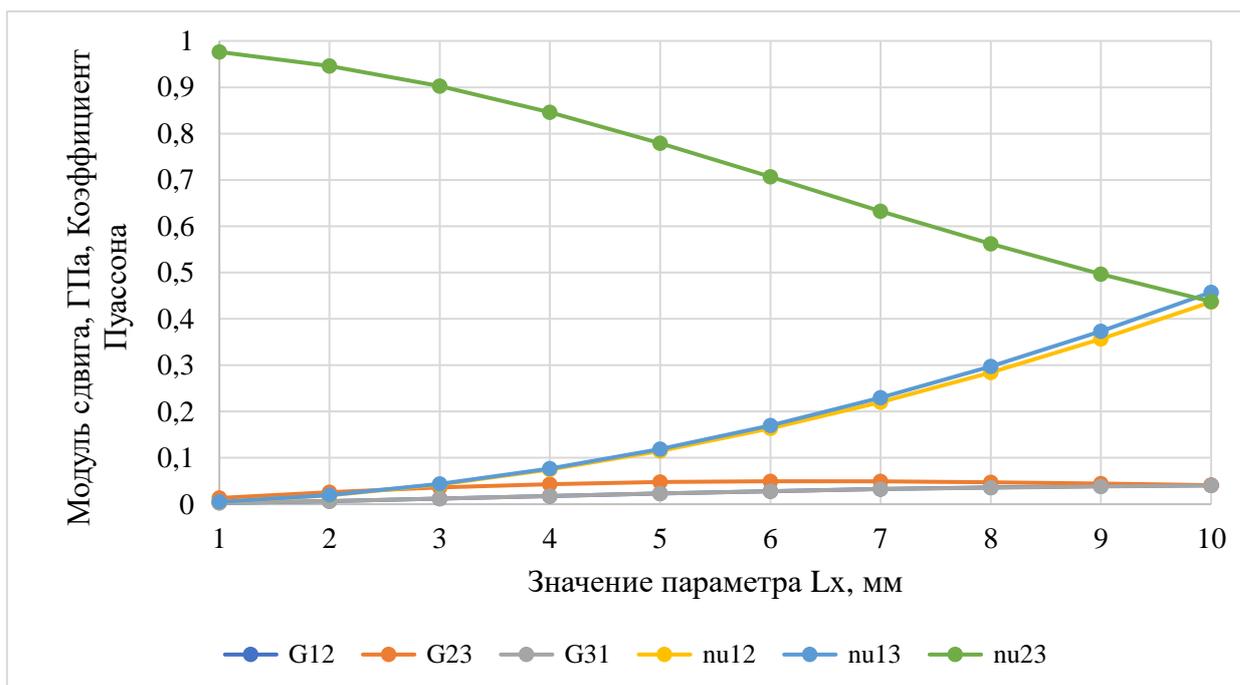


Рис.1.5.3.21. Зависимость значений модулей сдвига и коэффициентов Пуассона от параметра L_x для ячейки типа 7

По итогам конечно-элементной гомогенизации ячеек с переменным соотношением сторон отметим, что при снижении значения L_x выявлено снижение модуля Юнга вдоль оси X, по которой проводилось изменение геометрического размера. Причиной тому служит снижение эффективной площади сечения, перпендикулярного оси X, связанное с уменьшением толщины

стержня. Значения упругих модулей вдоль двух других осей повышаются, что объясняется, напротив, повышением эффективной площади сечения перпендикулярного осям Y и Z . Заметим, что скорость снижения E_x выше скорости роста E_y и E_z . У ячеек типа 1 и 2 характер изменения модулей Юнга вдоль каждой из осей близок к линейному.

Отметим также, что до снижения параметра L_x механические характеристики метаматериала близки изотропным. Ячейка типа 6 имеет значительный рост значений модулей Юнга вдоль осей Y , Z , и при этом незначительное снижение модуля Юнга вдоль оси X . Ячейки типов 3 и 7, напротив, имеют незначительный рост модулей Юнга E_2, E_3 и значительное снижение E_1 при уменьшении параметра L_x менее, чем в 2 раза, но также и имеют спад в значениях модулей Юнга вдоль каждой из трех осей при снижении параметра L_x более, чем в 2 раза.

Так как расчет механических характеристик ячеек с различным значением параметра L_x проводился при фиксированном значении объемной доли материала, а значит и при постоянном значении массы элементарной ячейки, удастся добиться повышения модулей Юнга вдоль осей Y , Z , не прибегая к повышению количества материала. Таким образом, варьирование соотношений сторон элементарной ячейки позволяет гибко подстраивать жесткость метаматериала под требуемые значения.

1.5.4. Исследование влияния изменения угла между стержнями, образующими ячейку, на механические характеристики метаматериала

Другим возможным изменением формы элементарной ячейки, влияющей на параметры метаматериала, может стать изменение градусной меры угла между стержнями, образующими ячейку. В частности, под этим подразумевается то, что, к примеру, у ячейки типа 1, стержни которой находятся под углом 90 градусов друг к другу, угол между вертикальными и горизонтальными

стержнями станет отличным от прямого. Наглядно такое изменение геометрии показано на рисунке (1.5.4.1). Объемная доля материала в данном случае также 0,05.

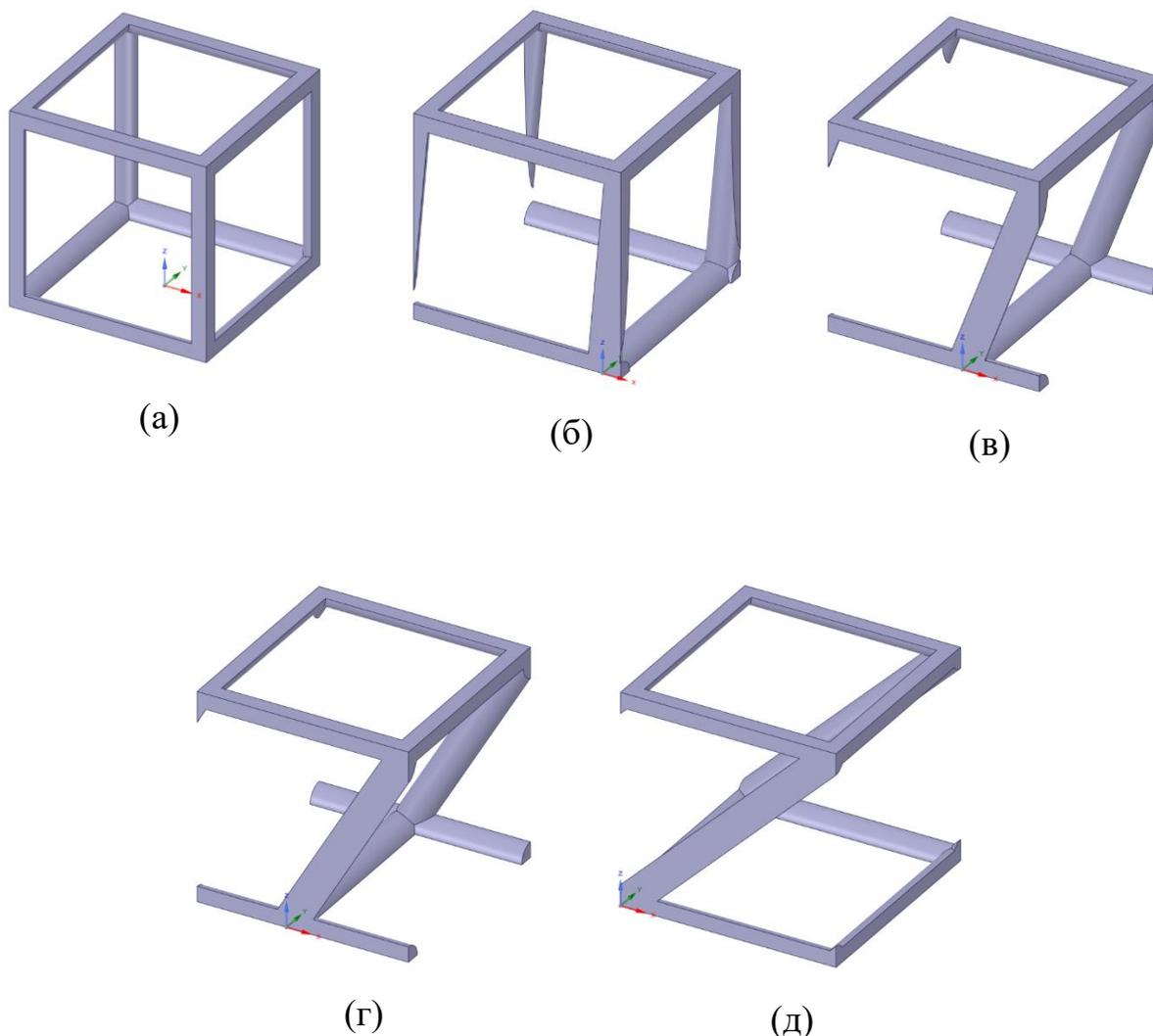


Рис.1.5.4.1. Внешний вид элементарной ячейки типа 1 при изменении угла между стержнями: (а) 90 градусов; (б) 85 градусов; (в) 70 градусов; (г) 60 градусов; (д) 45 градусов

Однако очевидным становится факт несовпадения противоположащих граней, в частности, верхней и нижней, что делает невозможным применение периодических граничных условий для корректного расчета параметров метаматериала. Чтобы добиться совпадения противоположных сторон ячейки, отразим зеркально всю элементарную ячейку относительно горизонтальной плоскости, проходящей через верхнюю грань ячейки. Однако невозможно строго оценить влияние угла между стержнями решетки на механические параметры метаматериала, так как из-за симметричного отражения направление изменения

угла в материале будет меняться. На рисунке (1.5.4.2) показан вид полученных ячеек с геометрическими размерами $10 \times 10 \times 20$ мм.

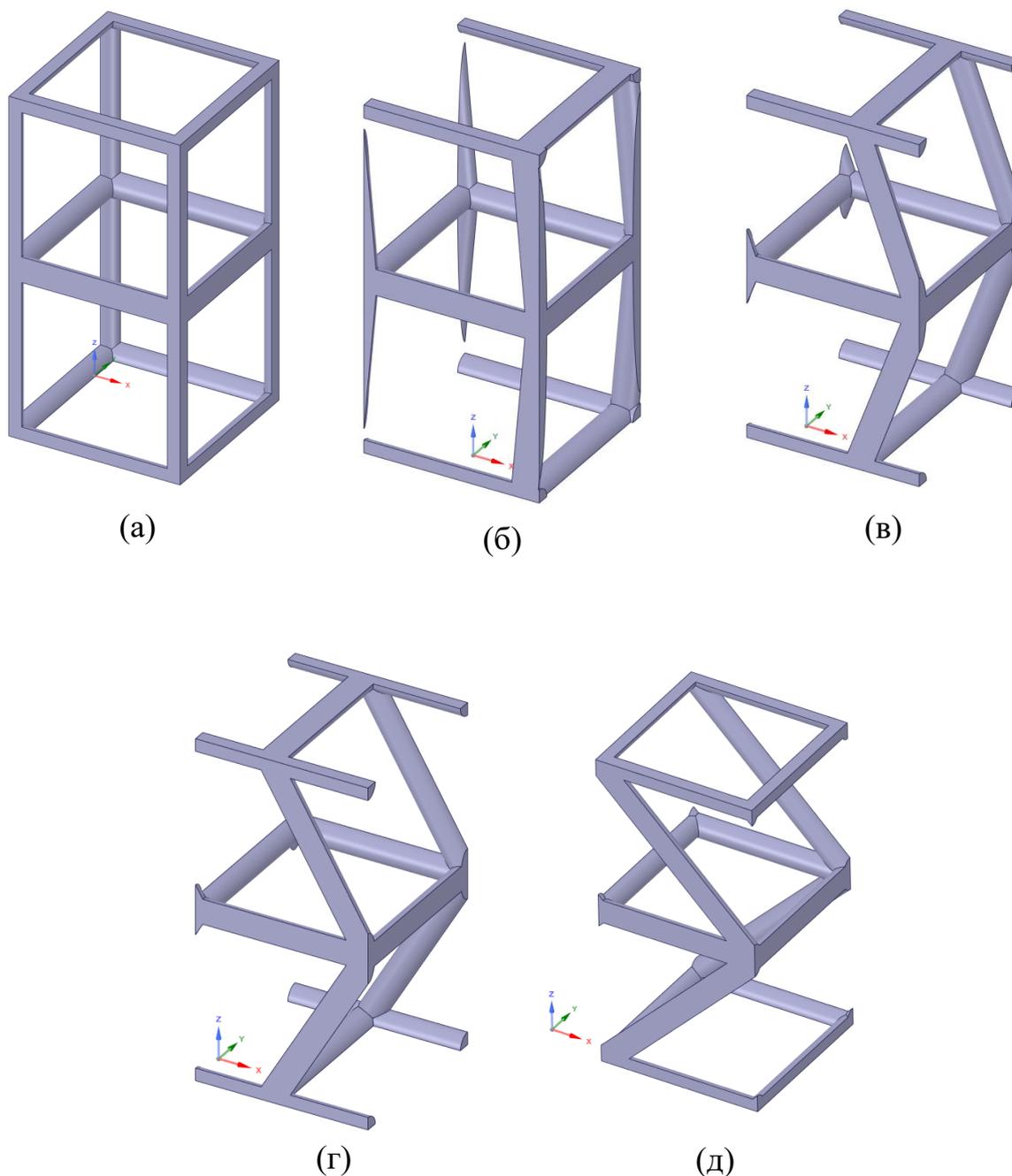


Рис.1.5.4.2. Внешний вид элементарной ячейки типа 1 при изменении угла между стержнями после симметричного отражения: (а) 90 градусов; (б) 85 градусов; (в) 70 градусов; (г) 60 градусов; (д) 45 градусов

Исследование проводилось при изменении угла от 90 до 45 с шагом 5 градусов. При значении угла менее 45 градусов наклонные стержни ячейки выходят за пределы геометрических размеров решетки, таким образом полученная геометрия состоит из двух не пересекающихся элементов, что уже

не подходит под описание е элементарной ячейки. Ниже приведены параметры некоторых полученных решеток. Однако дальнейшее рассмотрение влияния изменения угла для каждого из типов ячеек не имеет смысла ввиду описанных ранее причин.

Таблица 1.5.4.1

Значения механических характеристик при изменении угла между стержнями для ячейки типа 1

Тип ячейки	Значение угла между стержнями	Модуль Юнга, ГПа			Модуль сдвига, ГПа			Коэффициент Пуассона		
		E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{yx}	G_{xz}	ν_{xy}	ν_{yz}	ν_{xz}
Ячейка типа 1	90	1,518	1,413	1,414	0,014	0,014	0,014	0,039	0,040	0,040
	85	1,517	1,413	1,029	0,014	0,014	0,014	0,039	0,039	0,038
	70	1,491	1,383	0,172	0,014	0,012	0,013	0,040	0,029	0,004
	60	1,453	1,340	0,065	0,013	0,009	0,012	0,040	0,001	-0,03
	45	1,354	1,230	0,016	0,011	0,005	0,010	0,044	-0,14	-0,08

Далее представлены кривые, отражающие зависимости параметров от величины угла для решеток, описанных ранее в текущем разделе.

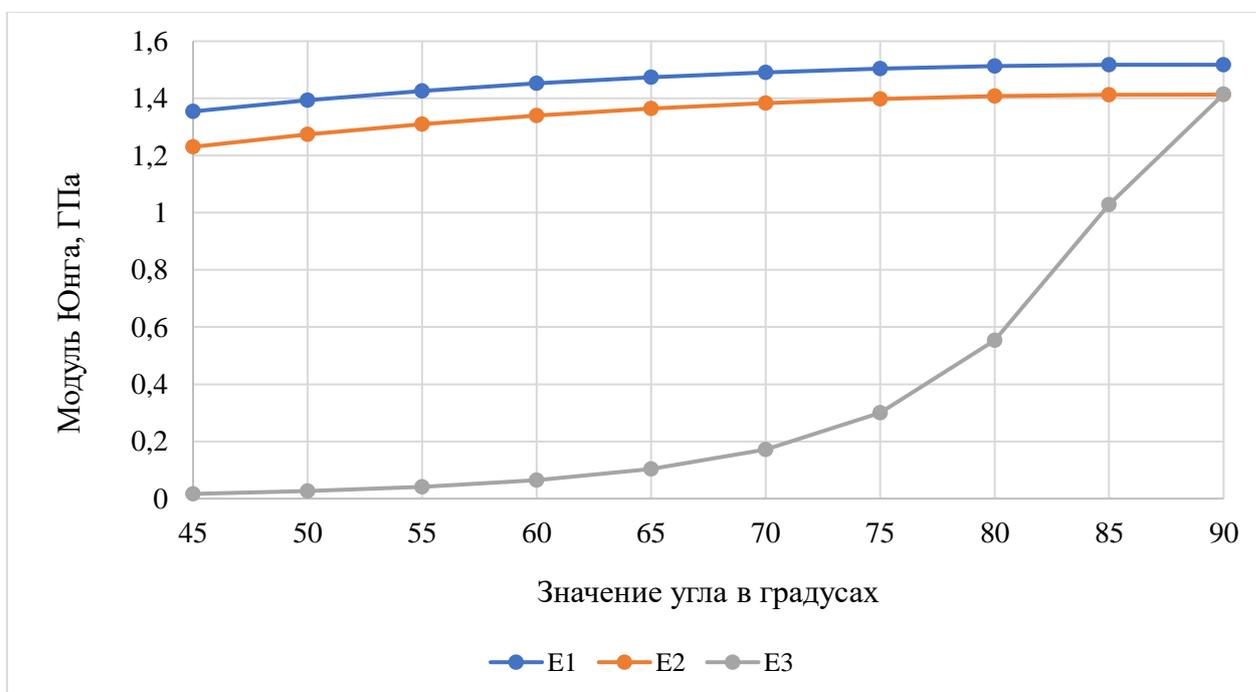


Рис.1.5.4.3. Зависимость модулей Юнга от значения градусной меры угла между стержнями для ячейки типа 1

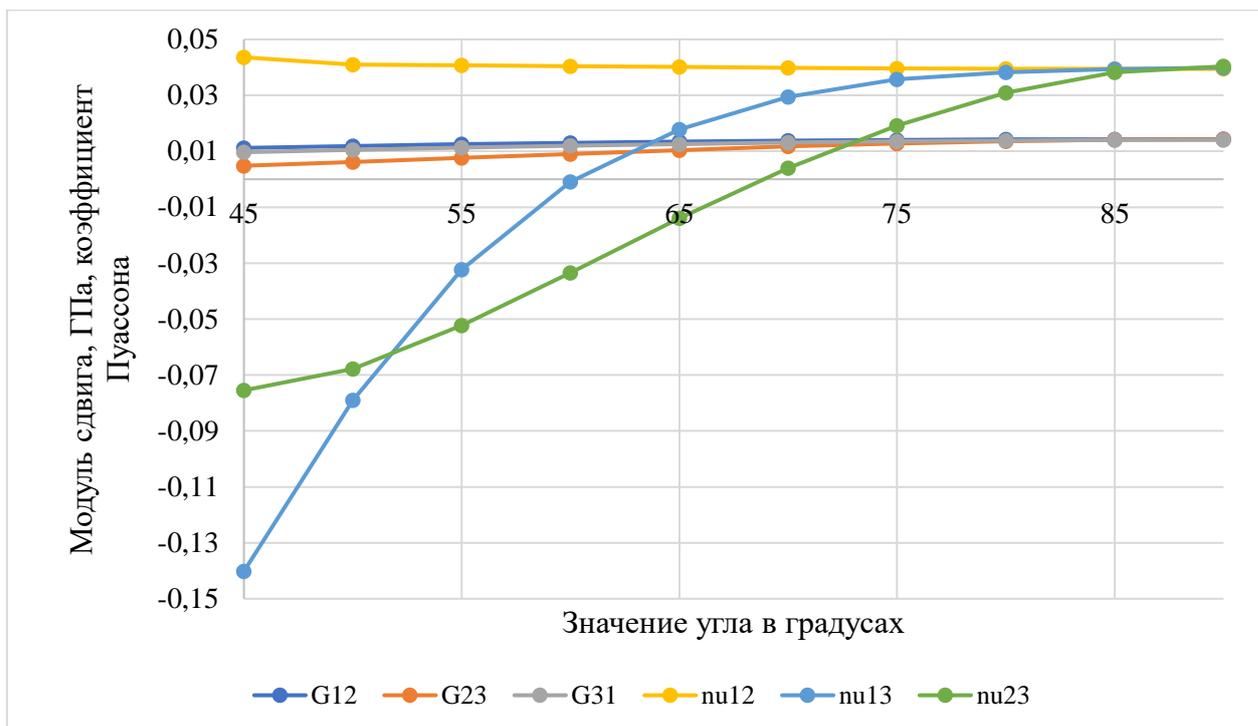


Рис.1.5.4.4. Зависимость модулей сдвига, коэффициента Пуассона от значений градусной меры угла между стержнями для ячейки типа 1

По полученным значениям механических свойств материала заметим, что при изменении угла ячейки типа 1 значения упругих модулей снижаются. Наиболее резкое снижение модуля Юнга наблюдается вдоль оси Z. Причиной тому служит наклон стержней, которые до изменения угла были соосны растяжению элементарной ячейки, а теперь работают не на растяжение, а на изгиб и сдвиг, в связи с чем жесткость в данном направлении снижается. Модули сдвига незначительно снижаются. Коэффициенты Пуассона ν_{13} , ν_{23} переходят в отрицательную зону при изменении угла более, чем на 30 градусов относительно изначальной ячейки, что говорит о том, что материал становится ауксетиком по отношению к определенным сценариям нагружения. Значение коэффициентов Пуассона для решетки с углом 45 градусов по модулю превышают более, чем в 2 раза, в сравнении с базовой элементарной ячейкой с углом 90 градусов. Коэффициент ν_{12} имеет незначительный рост. Таким образом, изменение градусной меры угла между стержнями ячейки типа 1 не дало роста в значениях характеристик элементарной ячейки ни при каком из значений угла. Это говорит

о том, что изменение угла не дает положительного эффекта в виде увеличения жесткости ячейки типа 1 при рассмотрении ее механических характеристик.

1.5.5. Исследование влияния направления локальных осей элементарной ячейки на механические характеристики метаматериала

Ранее рассматривалось поведение решеток, главные оси которых были направлены по ребрам параллелепипеда, описывающего элементарную ячейку. Однако изменение направления локальных осей элементарной ячейки позволяет оценить характеристики метаматериала в другом направлении, что может дать положительный эффект в изменении параметров элементарной ячейки и метаматериала в целом, а именно может оказаться, что в направлении повернутых осей значения упругих характеристик элементарной ячейки выше, что позволит более рационально расположить решетчатую структуру в проектируемом изделии и обеспечить его бóльшие сопротивления прикладываемым нагрузкам. В текущем разделе рассматривается поведение свойств решетки при повороте локальных осей элементарной ячейки относительно глобальных осей периодического материала.

В уравнении будем «поворачивать» матрицу упругих модулей. Направления деформации остаются без изменений.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix},$$

$$[C] = [D]^{-1}.$$

В качестве тензора поворота взята комбинация трех поворотов вокруг трех ортогональных векторов X, Y, Z. Однако повернуть матрицу 6x6 матрицей поворота 3x3 не представляется возможным. Для этого по правилу нотации Фойгта тензор 4 ранга должен быть восстановлен из матрицы 6x6.

$$\left(\begin{array}{cccccc} C_{11} \rightarrow C_{1111} & C_{12} \rightarrow C_{1122} & C_{13} \rightarrow C_{1133} & C_{14} \rightarrow C_{1123} & C_{15} \rightarrow C_{1131} & C_{16} \rightarrow C_{1112} \\ C_{21} \rightarrow C_{2211} & C_{22} \rightarrow C_{2222} & C_{23} \rightarrow C_{2233} & C_{24} \rightarrow C_{2223} & C_{25} \rightarrow C_{2231} & C_{26} \rightarrow C_{2212} \\ C_{31} \rightarrow C_{3311} & C_{32} \rightarrow C_{3322} & C_{33} \rightarrow C_{3333} & C_{34} \rightarrow C_{3323} & C_{35} \rightarrow C_{3331} & C_{36} \rightarrow C_{3312} \\ C_{41} \rightarrow C_{2311} & C_{42} \rightarrow C_{2322} & C_{43} \rightarrow C_{2333} & C_{44} \rightarrow C_{2323} & C_{45} \rightarrow C_{2331} & C_{46} \rightarrow C_{2312} \\ C_{51} \rightarrow C_{3111} & C_{52} \rightarrow C_{3122} & C_{53} \rightarrow C_{3133} & C_{54} \rightarrow C_{3123} & C_{55} \rightarrow C_{3131} & C_{56} \rightarrow C_{3112} \\ C_{61} \rightarrow C_{1211} & C_{62} \rightarrow C_{1222} & C_{63} \rightarrow C_{1233} & C_{64} \rightarrow C_{1223} & C_{65} \rightarrow C_{1231} & C_{66} \rightarrow C_{1212} \end{array} \right)$$

Тензор 4 ранга C_{ijkl} обладает симметрией по первой и второй парам индексов:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}.$$

Элементы могут быть записаны в виде матрицы 6х6 при помощи следующей подстановки индексов:

$$11 \rightarrow 1,$$

$$22 \rightarrow 2,$$

$$33 \rightarrow 3,$$

$$23,32 \rightarrow 4,$$

$$13,31 \rightarrow 5,$$

$$12,21 \rightarrow 6.$$

При переходе из одной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 в другую декартову систему координат x'_1, x'_2, x'_3 путем поворота ортов, компоненты тензора упругих модулей преобразуются следующим образом (здесь используется соглашение Эйнштейна о суммировании по повторяющимся индексам):

$$C'_{ijkl} = n_{i\alpha} n_{j\beta} n_{k\gamma} n_{l\delta} C_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где n_{mn} — направляющие косинусы между осями m, n .

Поворот осей для всех решеток осуществлен на угол $\alpha = 9,74^\circ$ вокруг начальной оси Z, угол $\beta = 60^\circ$ вокруг повернутой оси X, на угол $\gamma = 54,73^\circ$ вокруг повернутой оси Z. Повернутые оси имеют вид:

$$x'_1 [0,5; 0,5; 0,71],$$

$$x'_2 [-0,85; 0,15; 0,5],$$

$$x'_3 [0,15; -0,85; 0,5].$$

Оси подобраны таким образом, чтобы одна из осей находилась по диагонали 1 октанта, а две другие оси находились симметрично относительно диагональной плоскости. Такое расположение ортов позволяет отказаться от расположения осей вдоль направляющих элементарной ячейки и определить наиболее подходящее положение решетки в материале. Также для ячеек типа 3, 4, 6, 7 дополнительно были рассмотрены варианты расположения осей внутри ячейки, которые могли бы обеспечить большую жесткость решетки в одном из направлений повернутых осей.

Для удобства преобразование матриц, поворот ортов и другие сопутствующие вычисления реализованы в виде кода в пакете Matlab [см. Приложение 1].

Такие преобразования проводились для всех типов элементарных ячеек. Была проверена связь модуля Юнга вдоль первой оси E_x , модуля сдвига G_{xy} и коэффициента Пуассона ν_{xy} для каждой решетки в начальных и повернутых осях.

Далее наглядно показано расположение осей для каждого из рассматриваемых типов ячеек и механические свойства, полученные до и после поворота осей на заданные углы.

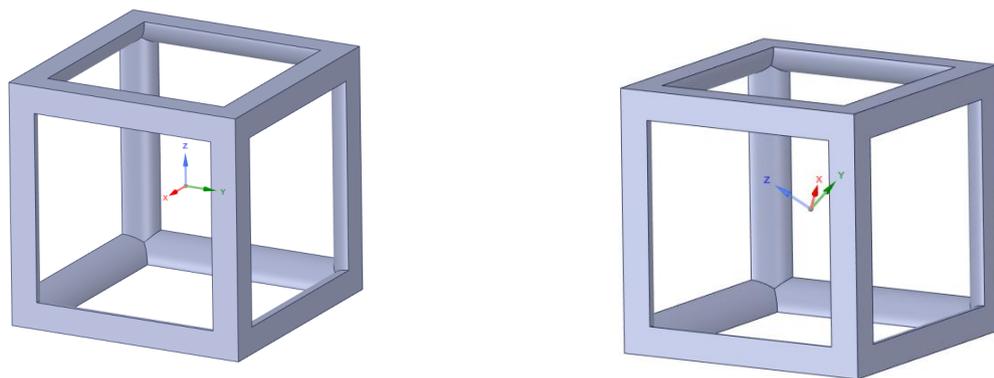


Рис.1.5.5.1. Внешний вид ячейки типа 1 до и после поворота локальных осей

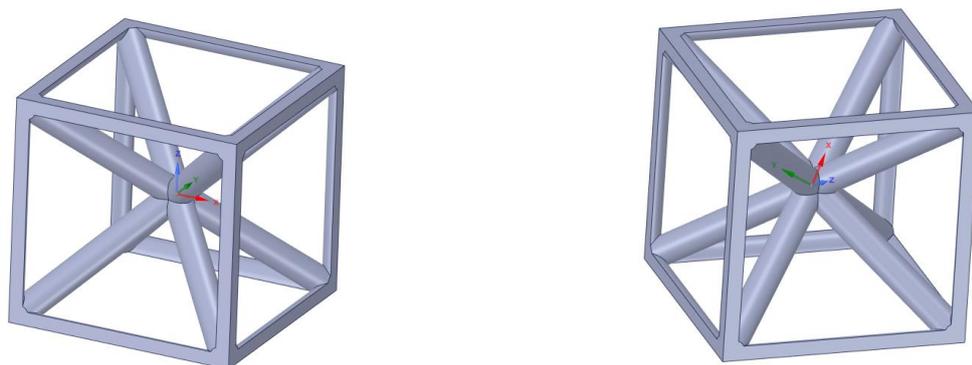


Рис.1.5.5.2. Внешний вид ячейки типа 2 до и после поворота локальных осей

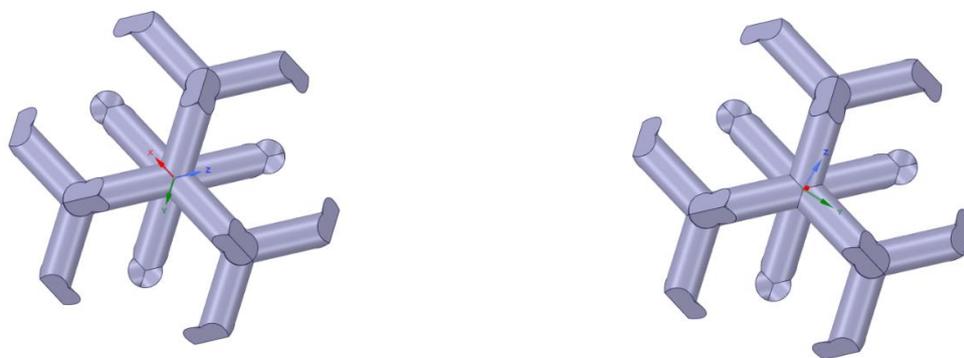


Рис.1.5.5.3. Внешний вид ячейки типа 3 до и после поворота локальных осей

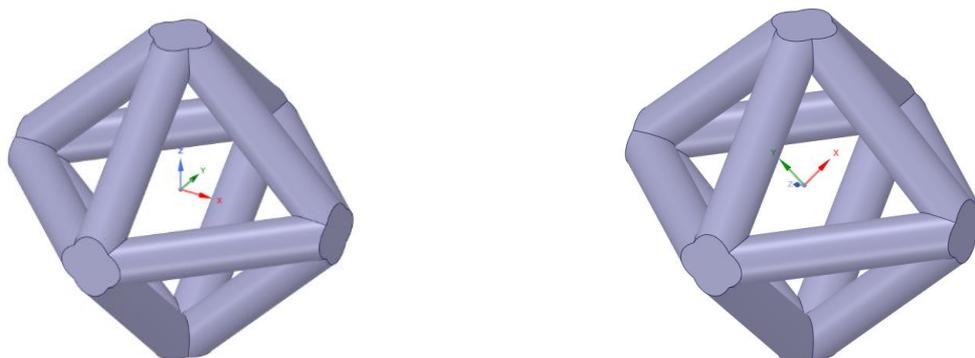


Рис.1.5.5.4. Внешний вид ячейки типа 4 до и после поворота локальных осей

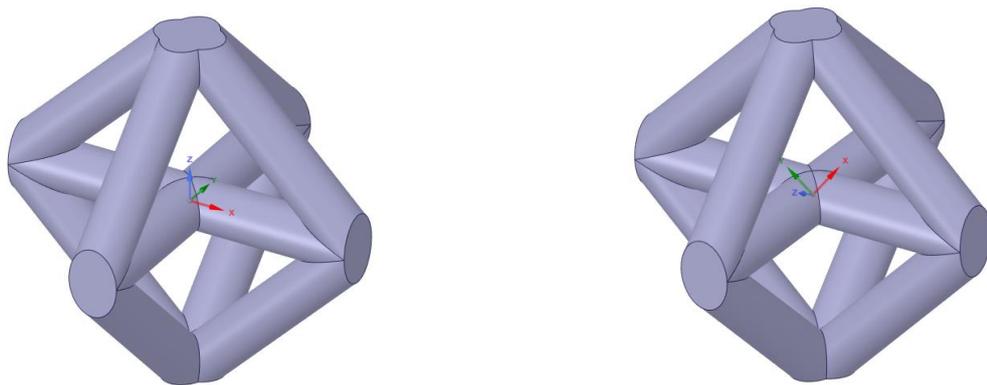


Рис.1.5.5.5. Внешний вид ячейки типа 5 до и после поворота локальных осей

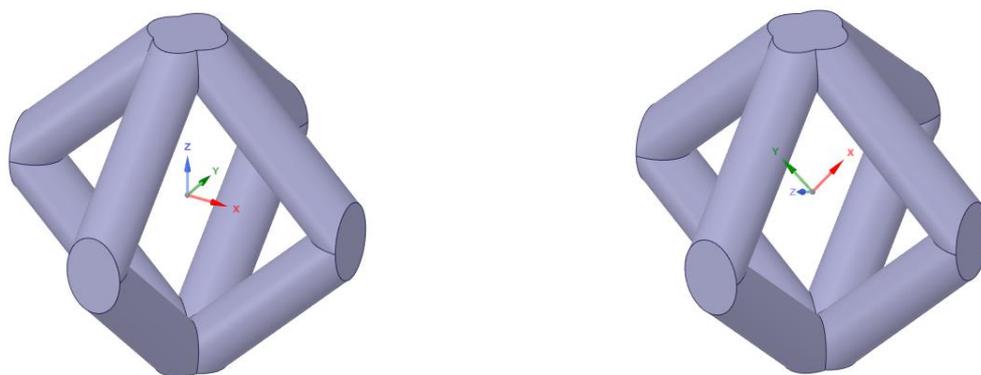


Рис.1.5.5.6. Внешний вид ячейки типа 6 до и после поворота локальных осей

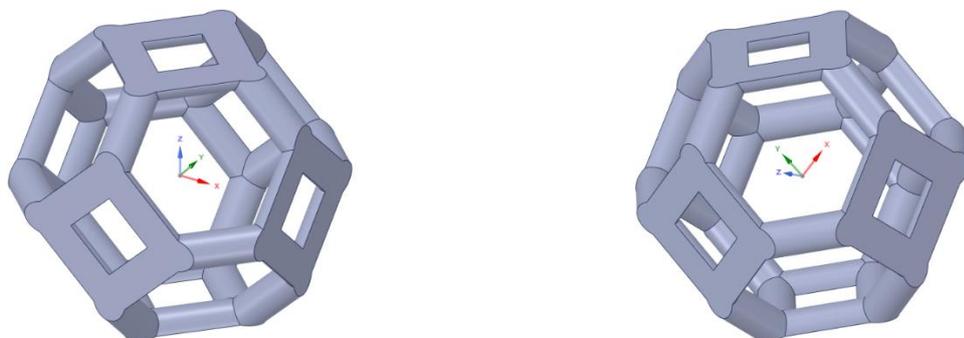


Рис.1.5.5.7. Внешний вид ячейки типа 7 до и после поворота локальных осей

Таблица 1.5.5.1

Значения механических характеристик до и после поворота локальных осей для ячеек типов 1-7

Тип ячейки	До/после поворота осей	Модуль Юнга, ГПа			Модуль сдвига, МПа			Коэффициент Пуассона		
		E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{yx}	G_{xz}	ν_{xy}	ν_{yz}	ν_{xz}
Ячейка типа 1	До	3,37	3,14	3,14	73,9	74,6	71,9	0,06	0,06	0,06
	После	0,23	0,345	0,341	88,4	181,0	181,0	0,69	0,69	0,21
	До	1,39	1,32	1,32	643	654	633	0,29	0,29	0,29

Ячейка типа 2	После	1,59	1,53	1,48	611	554	565	0,23	0,24	0,30
Ячейка типа 3	До	0,362	0,356	0,358	0,366	0,374	0,359	0,444	0,465	0,420
	После	0,889	0,585	0,589	0,267	0,162	0,168	0,339	0,571	0,378
Ячейка типа 4	До	1,16	1,16	1,15	0,698	0,762	0,648	0,316	0,360	0,279
	После	1,69	1,46	1,47	0,609	0,497	0,523	0,196	0,335	0,274
Ячейка типа 5	До	1,93	1,85	1,4	0,023	0,84	0,711	-0,14	0,484	0,443
	После	0,173	1,45	0,122	0,148	0,147	0,148	-0,17	2,001	1,130
Ячейка типа 6	До	0,420	0,430	0,496	0,021	1,070	0,904	-0,65	0,768	0,741
	После	0,161	0,790	0,107	0,119	0,099	0,099	-0,19	0,843	1,111
Ячейка типа 7	До	0,746	0,764	0,749	0,190	0,193	0,187	0,382	0,384	0,395
	После	0,550	0,610	0,608	0,200	0,235	0,232	0,413	0,358	0,423

В зависимости от типа ячейки модуль Юнга как повышается, так и понижается в направлении каждой из ортогональных осей, что хорошо прослеживается на диаграммах ниже. Так у ячеек типа 1, 5, 7 наблюдается снижение модуля Юнга в 2-11 раз по каждому из направлений при повороте осей. Ячейки типа 2, 3, 4, 9 имеют рост значений модулей Юнга по каждой из осей в 1,5 – 2,5 раза. Для наглядности сравнение параметров ячеек, полученных до и после поворота осей, приведено на диаграммах (1.5.5.8-1.5.5.14).

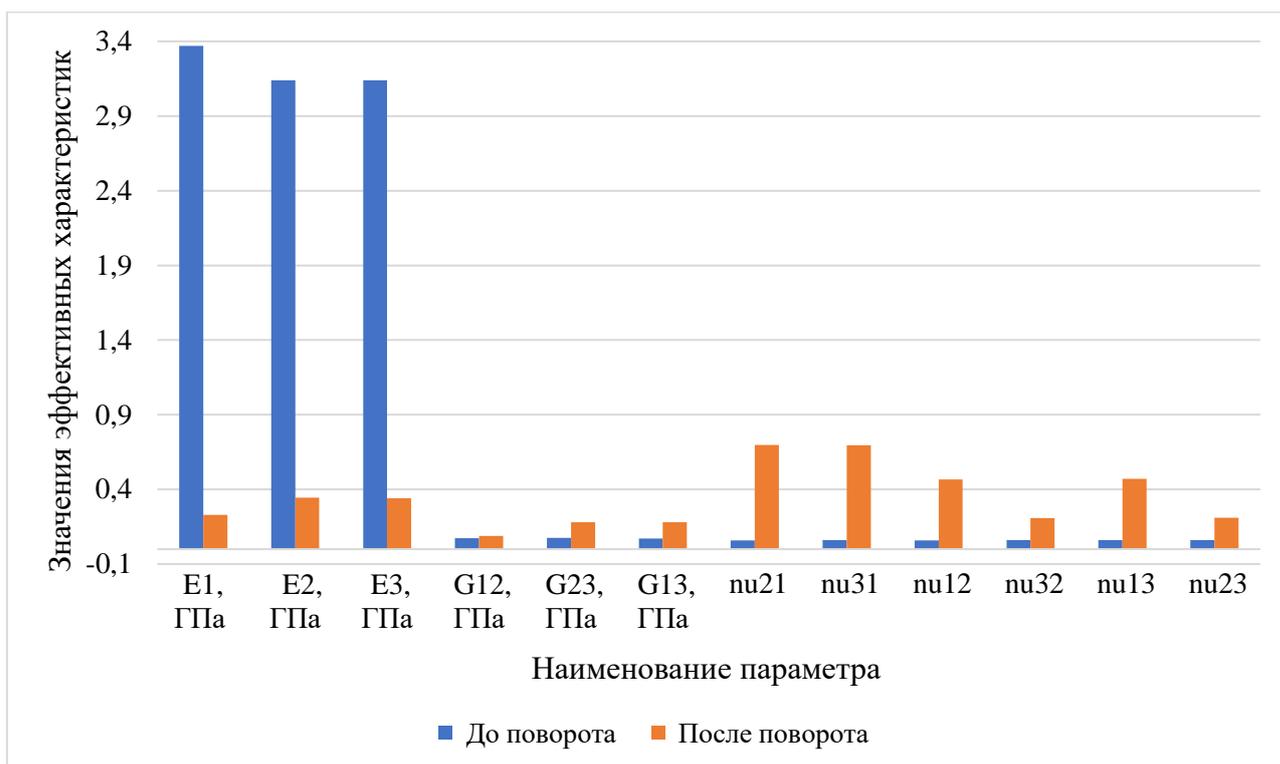


Рис.1.5.5.8. Значения эффективных характеристик до и после поворота локальных осей для элементарной ячейки типа 1

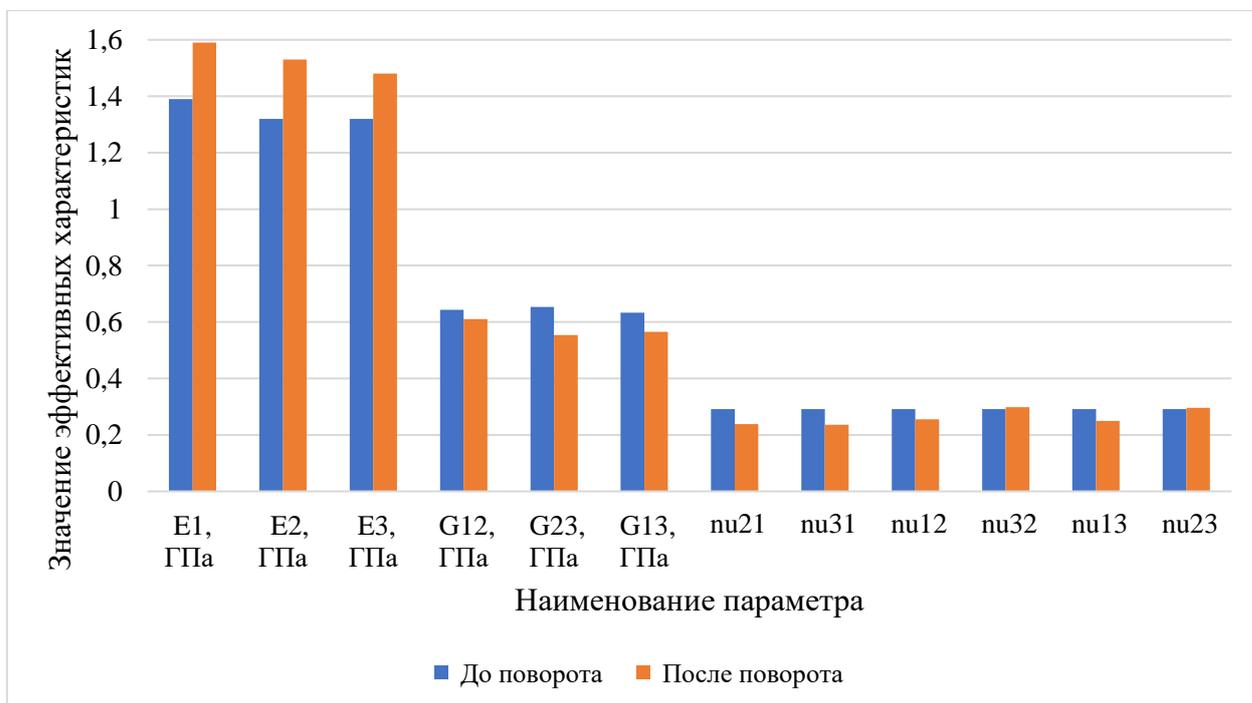


Рис.1.5.5.9. Значения эффективных характеристик до и после поворота локальных осей для элементарной ячейки типа 2

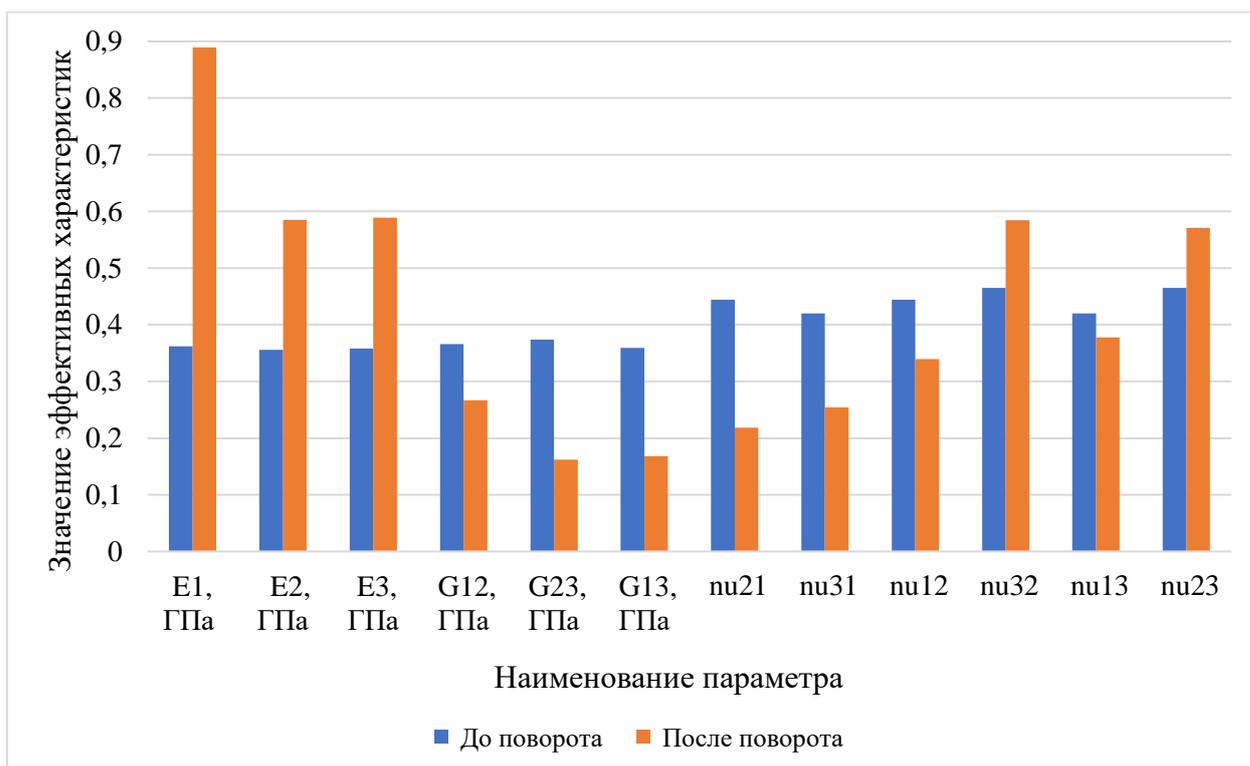


Рис.1.5.5.10. Значения эффективных характеристик до и после поворота локальных осей для элементарной ячейки типа 3

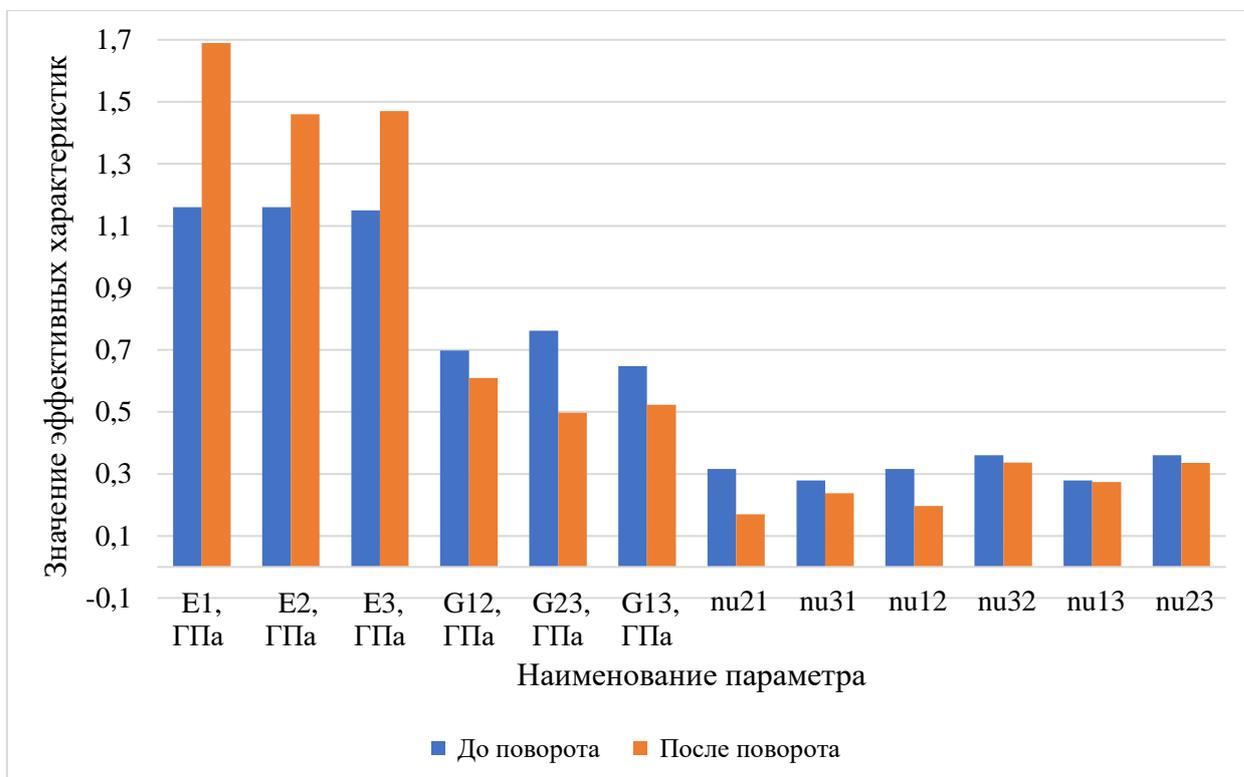


Рис.1.5.5.11. Значения эффективных характеристик до и после поворота локальных осей для элементарной ячейки типа 4

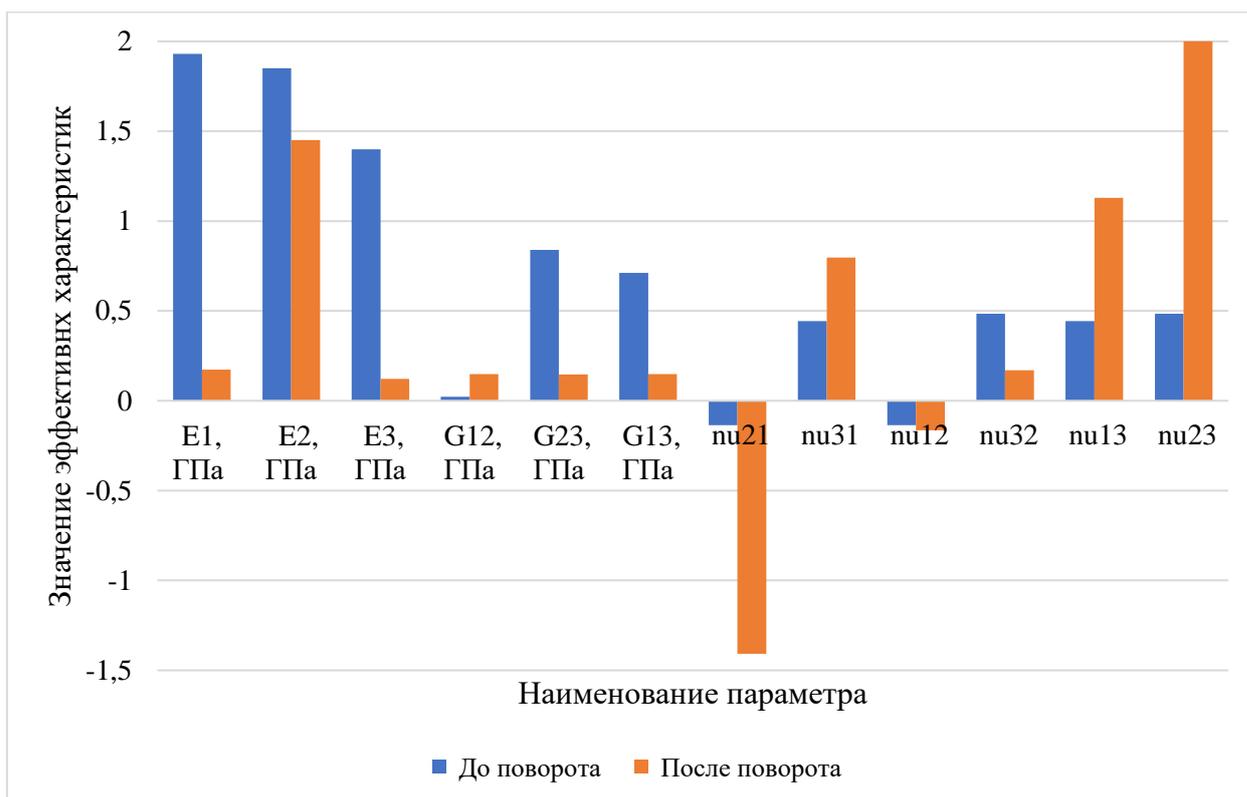


Рис.1.5.5.12. Значения эффективных характеристик до и после поворота локальных осей для элементарной ячейки типа 5

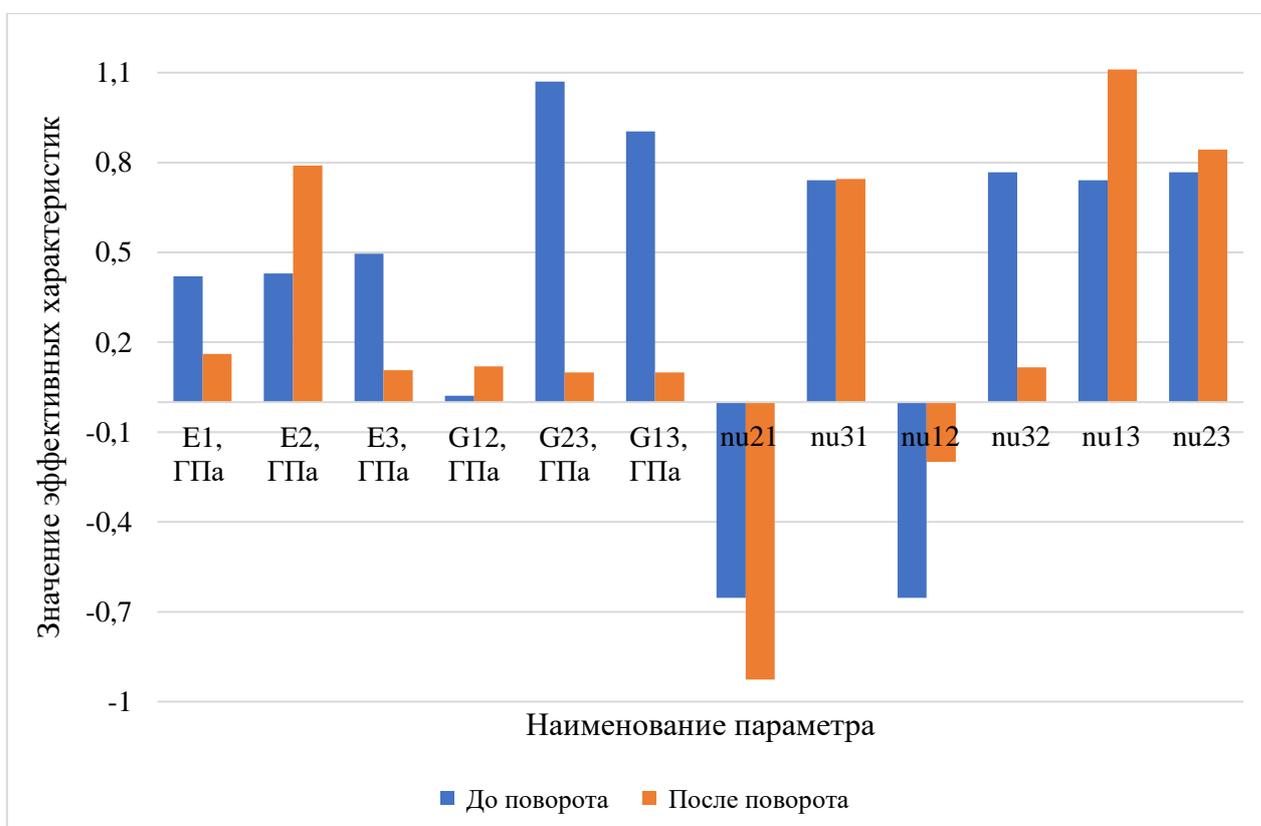


Рис.1.5.5.13. Значения эффективных характеристик до и после поворота локальных осей для элементарной ячейки типа 6

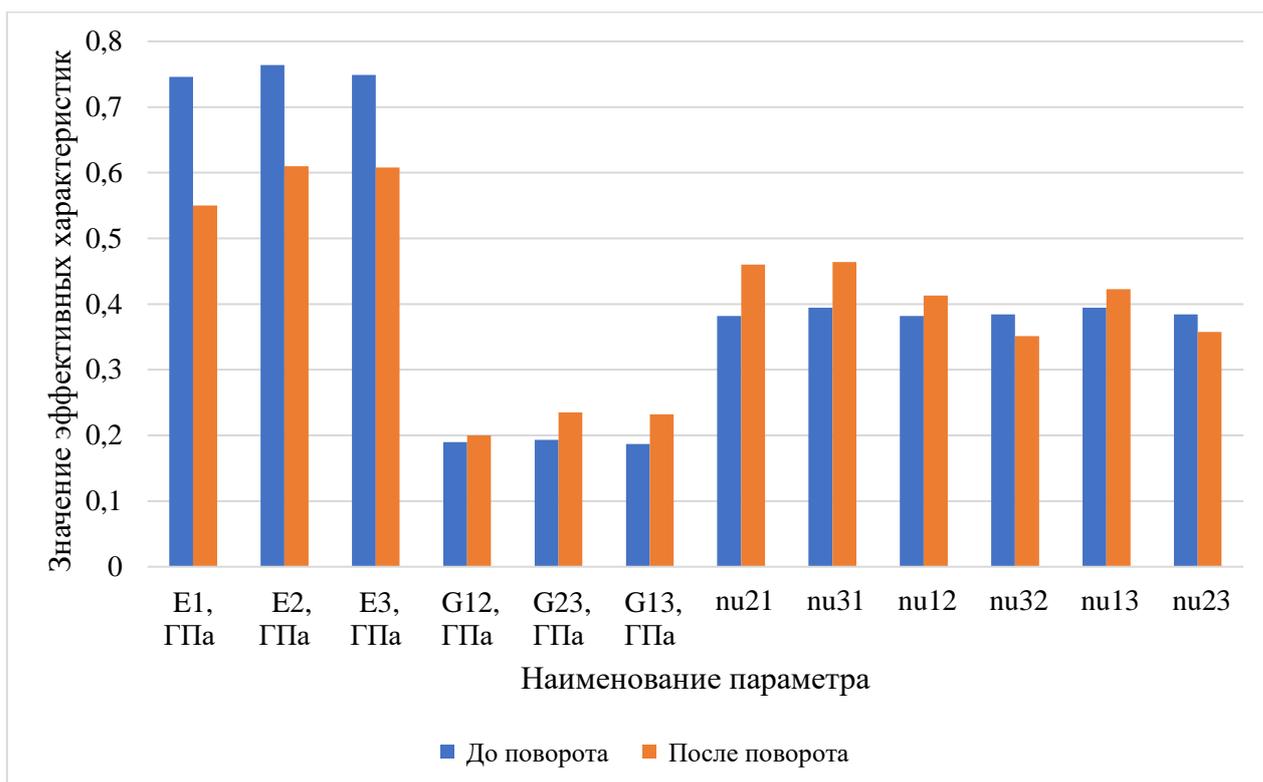


Рис.1.5.5.14. Значения эффективных характеристик до и после поворота локальных осей для элементарной ячейки типа 7

Анализируя диаграммы, представленные выше, отметим, что для ячеек, стержни которых были выровнены с глобальными осями, значения диагональных компонент тензора упругих модулей до поворота имели существенно большие значения, а после поворота разброс значений всех компонент тензора уменьшился. Такие распределенные значения могут трактоваться как средняя жесткость при произвольном направлении растяжения метаматериала. Для других ячеек, наоборот, при изменении направления осей наблюдается значительное увеличение некоторых компонент, соответствующих направлению нагружения в новых осях, что говорит о нахождении более рациональной ориентации осей при однородном нагружении.

Проверим связь модуля Юнга, модуля сдвига и коэффициента Пуассона, как в случае изотропного материала. Для каждого типа ячеек рассмотрена такая связь до и после поворота осей. Связь параметров рассчитывалась по следующей формуле:

$$\nu_{xy} = \frac{E_x}{2G_{xy}} - 1$$

Полученные результаты приведены в таблице.

Таблица 1.5.5.2

Сравнение значений коэффициента Пуассона для ячеек типов 1-7

Тип ячейки	Коэффициент Пуассона в глобальных осях, полученный на основе гомогенизации	Коэффициент Пуассона в глобальных осях, полученный аналитически	Коэффициент Пуассона в повернутых осях, полученный на основе гомогенизации	Коэффициент Пуассона в повернутых осях, полученный аналитически
1	0,059	21,801	0,466	0,301
2	0,292	0,080	0,255	0,302
3	0,444	0,495	0,339	0,664
4	0,316	-0,169	0,196	0,387
5	-0,135	40,956	-0,165	-0,415
6	-0,653	8,813	-0,199	-0,323
7	0,382	0,963	0,413	0,375

Во многих ячейках при повороте локальных осей значение коэффициента Пуассона, вычисленного по формуле, упомянутой ранее, близко к значению, которое получено при расчете параметров ячейки. Связь коэффициентов до поворота локальных осей прослеживается слабо, о чем говорит сильное различие в значениях, одно из которых получено при расчете ячейки, другое вычислено по формуле. Такое различие в значениях подтверждает присутствие анизотропии в материале. Также после поворота осей пропали случаи радикальных различий для ячейки типа 1. Значения механических характеристик для ячеек типов 2, 4, 7 при повороте осей остаются практически без изменений в связи с большим порядком геометрической симметрии элементарной ячейки.

1.5.6. Выводы о влиянии топологии решетчатой структуры на механические свойства метаматериала

Как можно видеть в таблицах 1.5.1.1 и 1.5.1.2, значения механических характеристик метаматериалов сильно зависят от типа элементарной ячейки. При дальнейшем анализе была рассмотрена зависимость упругих модулей от эффективной плотности метаматериала. По результатам исследования отметим, что характер зависимости совпадает с интуитивными представлениями о поведении метаматериала и коррелирует с базовыми представлениями механики деформируемого твердого тела. При повышении объемной доли материала решетчатой структуры механические характеристики растут и стремятся к значениям модулей сплошного материала $AlSi10Mg$. Однако интенсивность изменения механических характеристик при одинаковом темпе изменения эффективной плотности для каждой элементарной ячейки различна, о чем свидетельствуют графики 1.5.2.16 – 1.5.2.18. Можем отметить существенное влияние объемной доли материала элементарной ячейки на ее механические характеристики.

Результатом исследования влияния геометрических соотношений сторон представительного элемента объема является существенное снижение модуля Юнга в направлении оси, вдоль которой происходило изменение геометрического размера ячейки, однако при этом наблюдается существенный рост модулей Юнга вдоль двух других осей. Отметим также различие характера изменения этих параметров у различных типов ячеек. Так у ячеек типа 1, 2, 4, 5 характер преимущественно линейный, изменение модулей Юнга ячеек типа 3, 6, 7 носит более сложный характер.

Ограничения в возможностях определения эквивалентных свойств периодических решетчатых структур не позволили в полной мере провести оценку влияния изменения градусной меры угла между стержнями элементарной ячейки. Однако проделанной работы в данной области исследования достаточно, чтобы зафиксировать снижение механических параметров структуры в

направлении каждой из осей при отклонении стержня ячейки от направления, совпадающего с направлением одной из локальных осей представительного объема, о чем свидетельствует рисунок 1.5.4.3.

Изменение направления локальных осей элементарной ячейки позволило определить более рациональное расположение осей, при котором значения механических характеристик повышаются для некоторых из рассматриваемых элементарных ячеек, что видно из рисунков 1.5.5.2–1.5.5.8. При этом у некоторых ячеек, наоборот, наблюдается снижение параметров, в частности, такой эффект наблюдается у ячеек типа 1, 5, 6, 7.

Далее приводится подробное описание примера проектирования детали с интегрированными в нее решетчатыми структурами. При создании и анализе результатов расчета геометрии применялись результаты, полученные в первой главе документа.

ГЛАВА 2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДЕТАЛИ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ В СЕБЯ РЕШЕТЧАТЫЕ СТРУКТУРЫ

Ранее в документе было описано исследование влияния топологии решетчатой структуры на механические параметры метаматериала. По результатам исследований сделаны выводы, которые можно применять при разработке изделий, включающих в себя решетчатые структуры. Отметим, что интересной и важной особенностью метаматериалов является возможность варьирования их характеристик в пределах одной конструкции. В текущей главе рассмотрим применение подхода, связанного с внедрением решетчатых структур с переменными характеристиками, на примере проектирования бедренного компонента эндопротеза тазобедренного сустава.

2.1. Описание конечно-элементной модели

Геометрия бедренной кости и бедренного компонента эндопротеза тазобедренного сустава представлена на рисунке ниже.

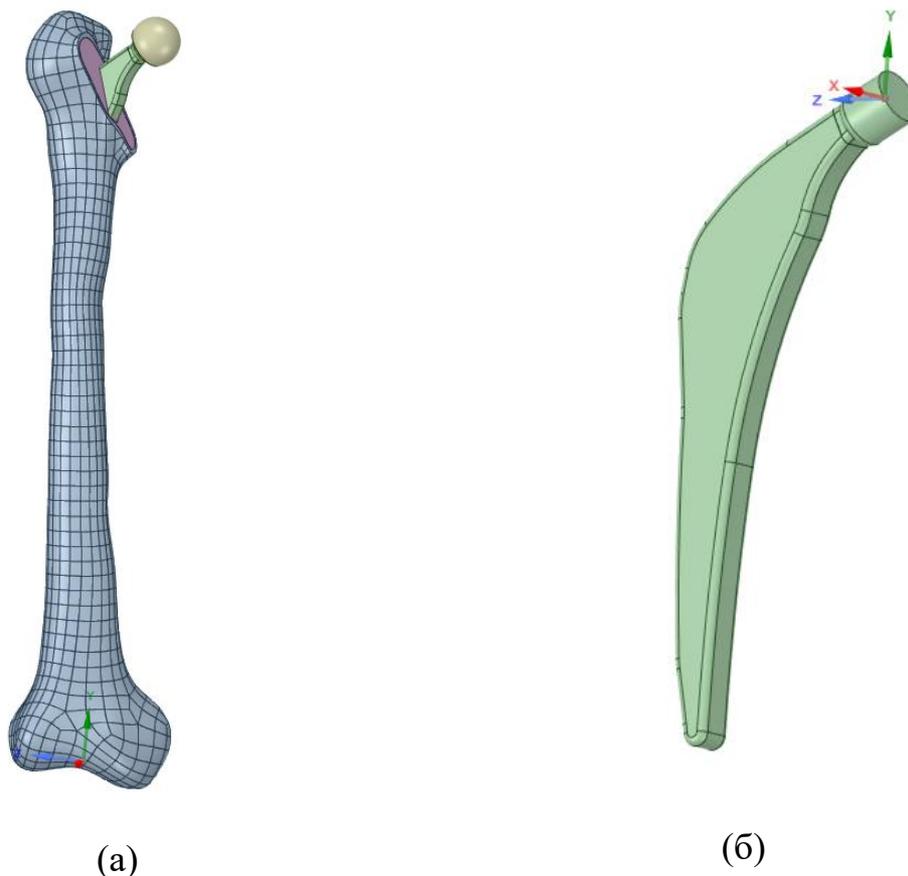


Рис.2.1.1. Внешний вид геометрии эндопротеза тазобедренного сустава, (а) общий вид, (б) крупное представление элемента эндопротеза

Зачастую металлические метаматериалы применяются в качестве заменителей костной ткани. Благодаря своей пористости, структура материала обеспечивает эффективное врастание костной ткани в имплантат, обеспечивая замещение костных дефектов скелета человека. Однако ключевыми критериями выбора материала при изготовлении эндопротеза являются его биосовместимость, механическая прочность и функциональность. Предполагается, что рассматриваемый эндопротез будет изготовлен метаматериала, в основе которого лежит сплошной материал - титановый сплав Ti6Al4V, достоинством которого является хорошая биосовместимость. Модель кости включает в себя 2 слоя – наружный слой, состоящий из кортикальной костной ткани, и внутренний объем, заполненный спонгиозной костной тканью, геометрия, заменяющая головку бедренной кости выполнена из высокопрочной керамики. Параметры перечисленных материалов приведены в таблице (2.1.1).

Таблица 2.1.1
 Параметры материалов

Материал	Плотность, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	Модуль Юнга, МПа	Коэффициент Пуассона
Спонгиозная костная ткань	0,2	360	0,2
Кортикальная костная ткань	1,7	17 000	0,3
Титановый сплав Ti6Al4V	4,43	113 800	0,342
Высокопрочная керамика	2,15	430	0,3

На основе описанной геометрии построена конечно-элементная модель, состоящая из элементов-тетраэдров первого порядка. Характерный размер конечного элемента расчетной модели – 2 мм. Для создания конформной сетки использована опция совместной топологии между соприкасающимися телами. На рисунке представлена полученная конечно-элементная модель системы, состоящей из части бедренной кости и компонента эндопротеза.

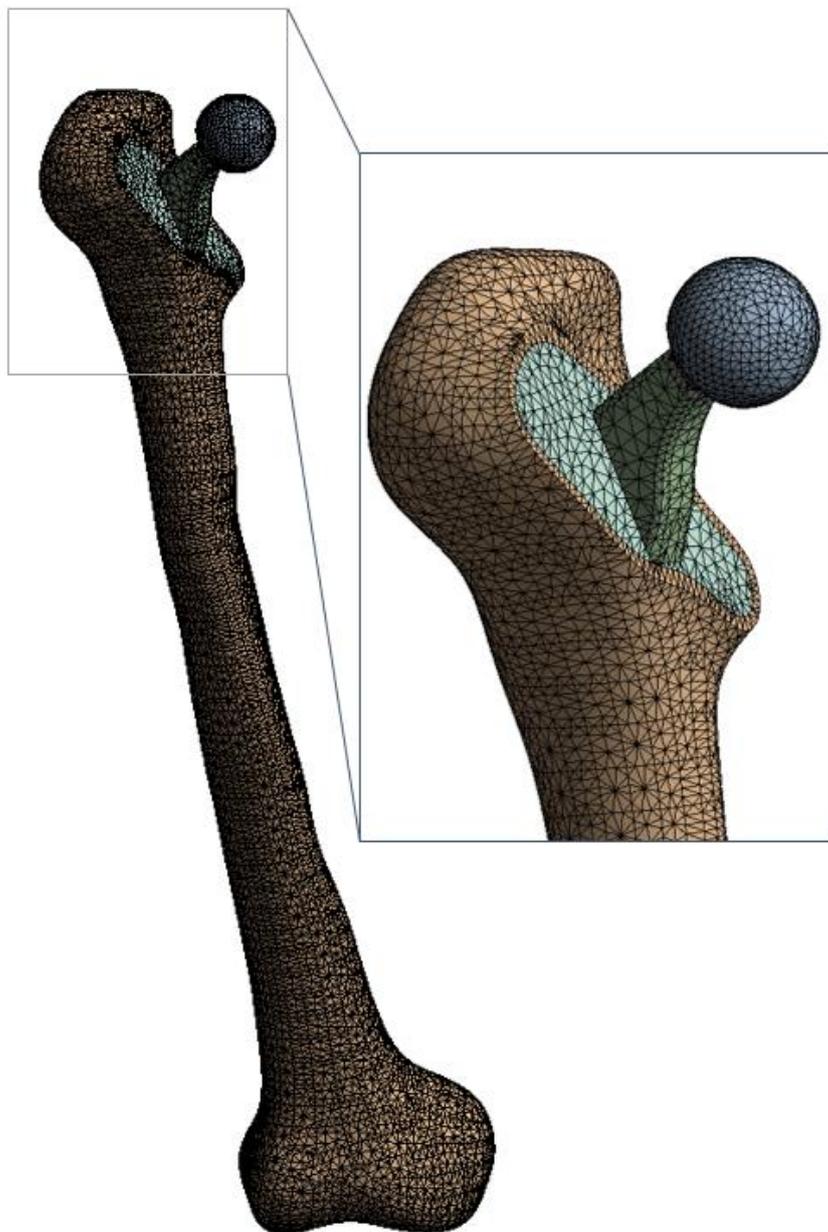
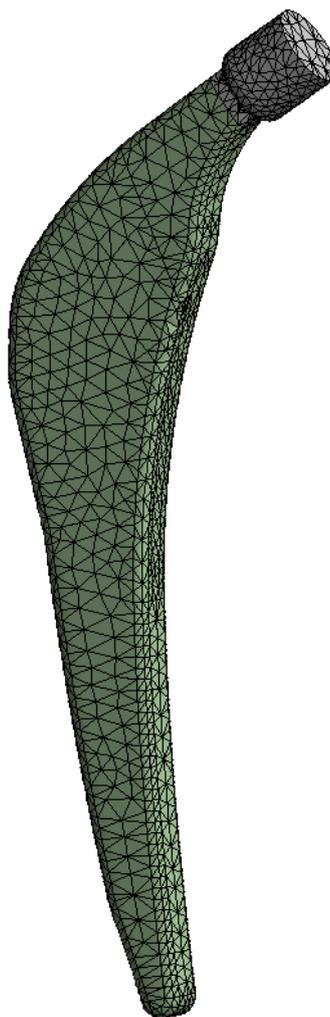


Рис.2.1.2. Внешний вид конечно-элементной модели системы

Далее наглядно показана конечно-элементная модель компонента эндопротеза, в которую в дальнейшем будут интегрированы решетчатые структуры с градиентными свойствами.



Количественные характеристики конечно-элементной сетки рассматриваемой системы приведены в таблице (2.1.2):

Таблица 2.1.2

Количественные характеристики конечно-элементной модели

	Количество узлов	Количество элементов
Титановый эндопротез	14 966	8 097
Наружный слой кости	137 097	70 646
Внутренний слой кости	105 896	60 996
Головка бедренной кости	9 447	5 333
Общее количество	220 339	145 072

2.2. Описание нагрузок и результаты

В текущем разделе рассматриваются 2 сценария нагружения модели бедренного компонента эндопротеза: случай стояния на одной ноге, а также рассматривается момент фазы шага человека, когда вокруг вертикальной оси, проходящей через центральную часть бедренной кости, совершается поворот.

2.2.1. Первый сценарий нагружения

В данном подразделе описаны нагрузки, приходящиеся на бедренный компонент эндопротеза в случае стояния на одной ноге. Нагрузка на бедренную кость человека состоит из сил более 20 различных мышц, охватывающих тазобедренный сустав, а также силы реакции в самом суставе, возникающей под действием собственного веса человека. Далее рассмотрены только те мышцы, которые относятся к группе мышц тазобедренного сустава, что позволяет исключить рассмотрение мышц, которые не вносят существенного вклада в данный сценарий нагружения [4,5,8]. В данном случае ключевую роль играет малая ягодичная мышца (рис. 2.2.1.1).

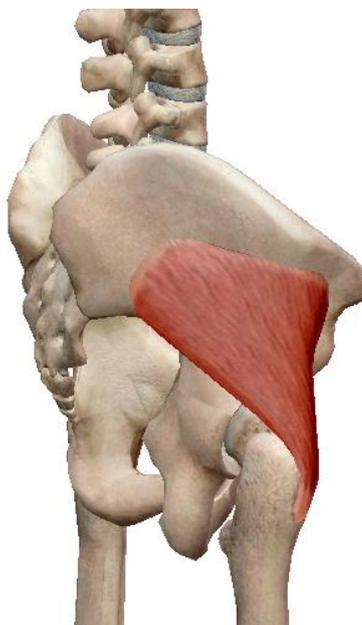


Рис.2.2.1.1. Расположение малой ягодичной мышцы

Далее наглядно представлена схема нагружения модели таза для первого сценария нагружения.

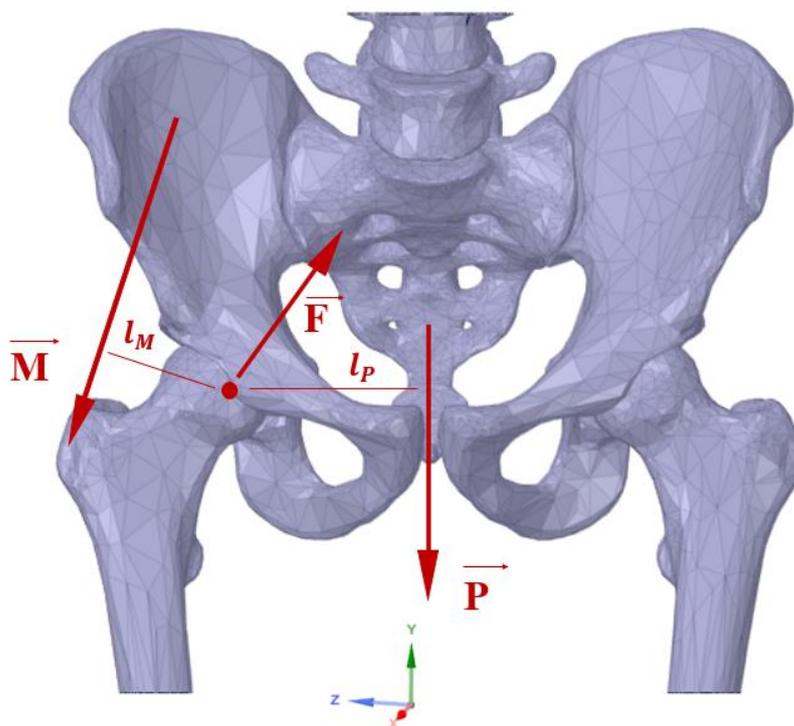


Рис.2.2.1.2. Схема нагружения модели таза. 1 сценарий нагружения

Здесь P – вес человека, приходящийся на тазобедренный сустав при стоянии человека на одной ноге. В среднем масса одной ноги составляет порядка 20% всей массы. Будем рассматривать человека средней массы 80 кг. Величина угла α наклона силы M определена из геометрических соображений и составляет $78,5^\circ$ по отношению к горизонтальной оси Z . Величины сил M и F неизвестны, они определяются из системы уравнений баланса сил и моментов:

$$\begin{cases} M \cdot l_M - P \cdot l_P = 0 & (2.2.1.1) \\ F_y = P + M \sin \alpha, & (2.2.1.2) \\ F_z = M \cos \alpha & (2.2.1.3) \end{cases}$$

где (2.2.1.1) – баланс моментов, записанный относительно точки приложения силы F ;

(2.2.1.2) – баланс сил в проекции на ось Y ;

(2.2.1.3) – баланс сил в проекции на ось Z ;

l_M и l_P – величины плеч сил M и F соответственно.

Далее представлены нагрузки и ограничения, приходящиеся на рассматриваемую геометрию. На нижней части геометрии площадка на поверхности кости имеет нулевые перемещения в трех направлениях.

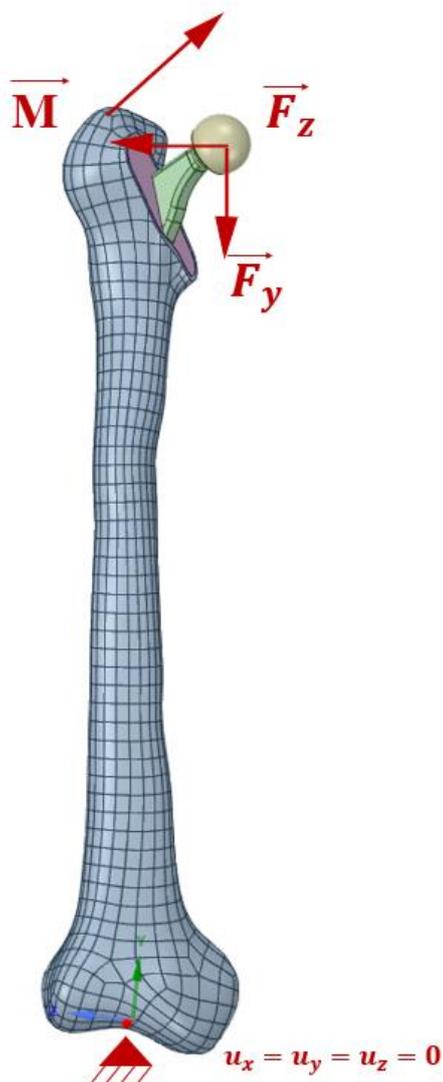
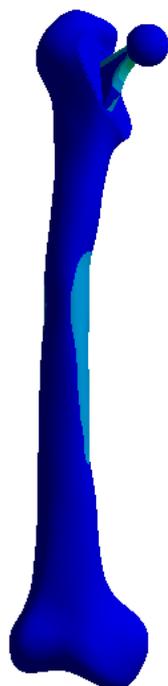


Рис.2.2.1.3. Нагрузки и ограничения, приходящиеся на рассматриваемую геометрию. 1 сценарий нагружения

В ходе расчета получены характеристики эквивалентных напряжений (по Мизесу) и модуля вектора перемещений рассматриваемой системы под действием первого сценария нагружения.

D: Static Structural
Equivalent Stress
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: MPa

317.1 Max
281.87
246.63
211.4
176.17
140.94
105.71
70.477
35.245
0.013668 Min



D: Static Structural
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: mm

11.913 Max
10.589
9.2654
7.9418
6.6182
5.2945
3.9709
2.6473
1.3236
0 Min

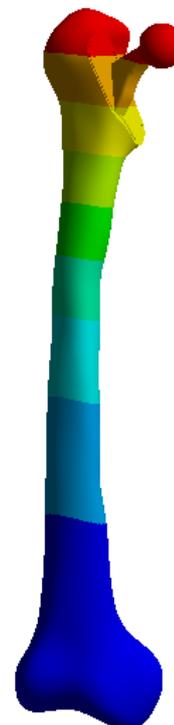
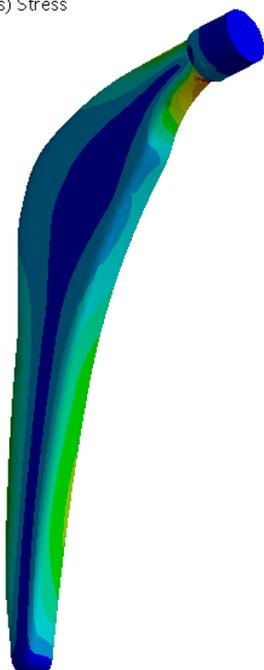


Рис.2.2.1.4. Распределение эквивалентных напряжений (по Мизесу) и модуля вектора перемещений для системы в случае 1 сценария нагружения

D: Static Structural
Equivalent Stress 2
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: MPa

143.31 Max
127.45
111.59
95.735
79.876
64.017
48.157
32.298
16.438
0.57904 Min



D: Static Structural
Total Deformation 2
Type: Total Deformation
Unit: mm

11.582 Max
10.734
9.8866
9.039
8.1914
7.3438
6.4963
5.6487
4.8011
3.9535 Min

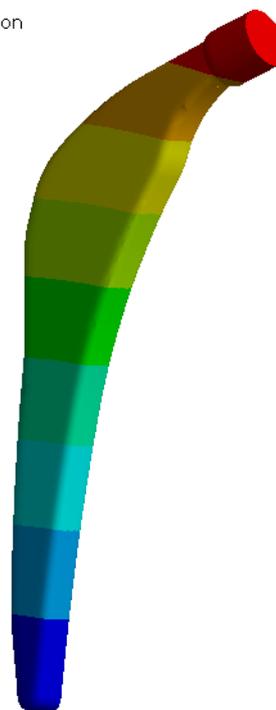


Рис.2.2.1.5. Распределение эквивалентных напряжений (по Мизесу) и модуля вектора перемещений для компонента эндопротеза в случае 1 сценария нагружения

2.2.2. Второй сценарий нагружения

В текущем подразделе описаны нагрузки в момент фазы шага, при которой вокруг вертикальной оси, проходящей через центр бедренной кости, совершается поворот. В таком случае к нагрузкам, описанным в первом сценарии нагружения, добавляются усилия, связанные с поворотом. В данном сценарии нагружения большую роль играет грушевидная мышца. Вклад других мышц пренебрежимо мал [8].

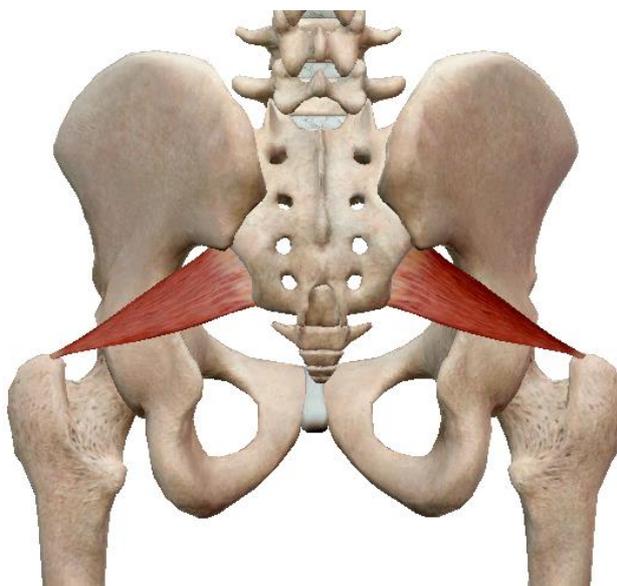


Рис.2.2.2.1. Расположение грушевидной мышцы

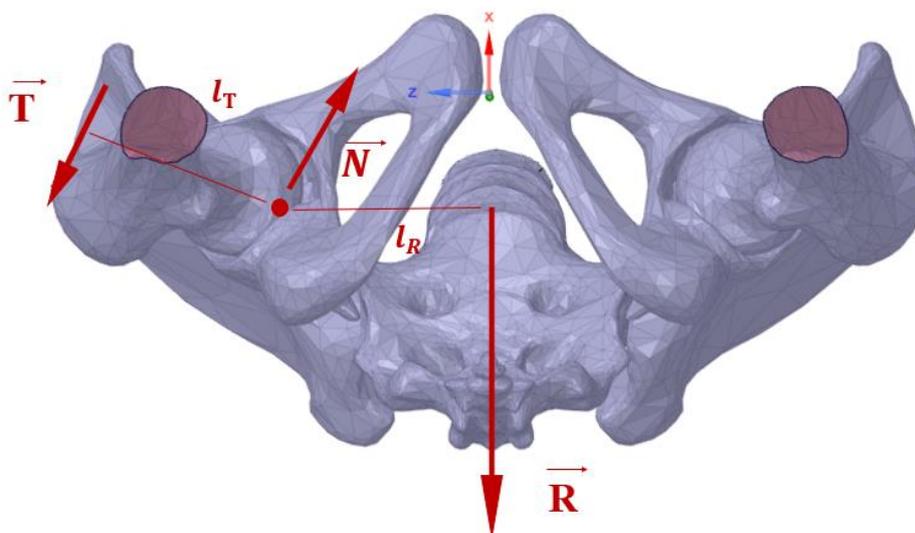


Рис.2.2.2.2. Схема нагружения модели таза. 2 сценарий нагружения

Здесь R – сила, полученная в соответствии со вторым законом Ньютона при условии, что на тело действует 80% массы человека с ускорением $1,5 \frac{M}{c^2}$. Значение ускорения получено экспериментальным путем при проведении замеров с применением трехосевого акселерометра, размещенного на теле движущегося человека ориентировочно в точке центра масс. Величина угла наклона γ силы T по отношению к оси Z определена исходя из геометрических соображений, основываясь на анатомическом расположении мест креплений грушевидной мышцы. Как и в первом случае, значения сил N и T , а также направление силы N получены из системы уравнений баланса сил и моментов.

$$\begin{cases} T \cdot l_T - R \cdot l_R = 0 & (2.2.2.1) \\ N_x = R + T \sin \gamma, & (2.2.2.2) \\ N_z = T \cos \gamma & (2.2.2.3) \end{cases}$$

где (2.2.2.1) – баланс моментов, записанный относительно точки приложения силы N ;

(2.2.2.2) – баланс сил в проекции на ось X ;

(2.2.2.3) – баланс сил в проекции на ось Z ;

l_T и l_R – величины плеч сил T и R соответственно.

Далее представлен вид сверху на нагрузки и ограничения, приходящиеся на рассматриваемую геометрию.

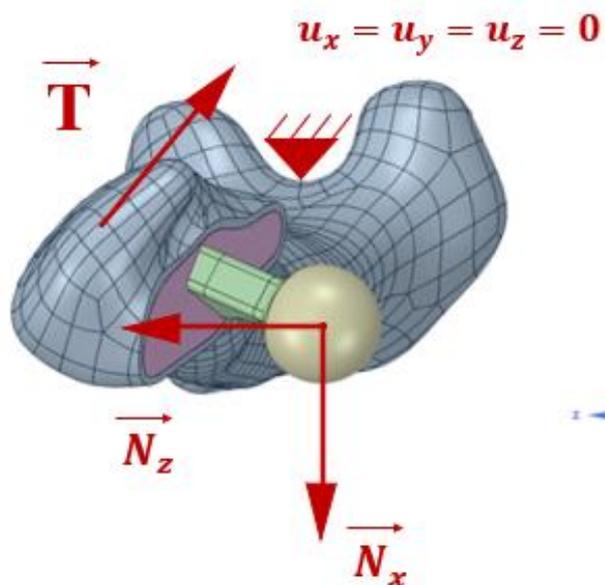
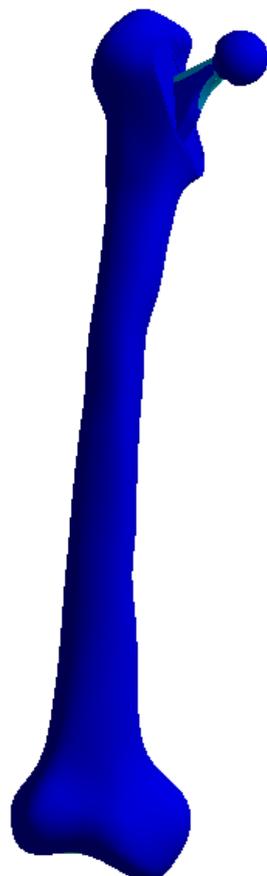


Рис.2.2.2.3. Нагрузки и ограничения, приходящиеся на рассматриваемую геометрию. 2 сценарий нагружения

В ходе расчета получены характеристики эквивалентных напряжений (по Мизесу) и модуля вектора перемещений рассматриваемой системы под воздействием второго сценария нагружения.

E: Static Structural
 Equivalent Stress
 Type: Equivalent (von-Mises) Stress
 Unit: MPa

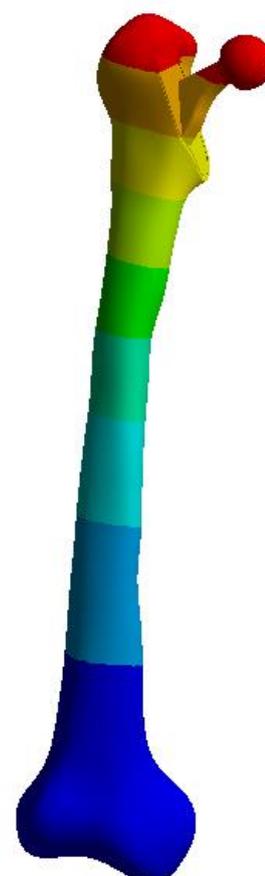
469.76 Max
 417.57
 365.38
 313.18
 260.99
 208.8
 156.6
 104.41
 52.215
0.021069 Min



(a)

E: Static Structural
 Total Deformation
 Type: Total Deformation
 Unit: mm

13.239 Max
 11.768
 10.297
 8.826
 7.355
 5.884
 4.413
 2.942
 1.471
0 Min

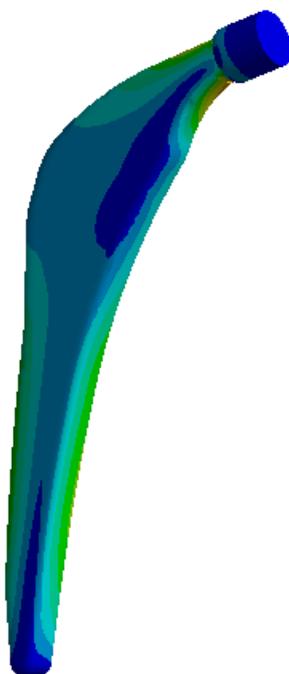


(б)

Рис.2.2.2.4. Распределение эквивалентных напряжений (по Мизесу) и модуля вектора перемещений для системы в случае 2 сценария нагружения

E: Static Structural
 Equivalent Stress 2
 Type: Equivalent (von-Mises) Stress
 Unit: MPa

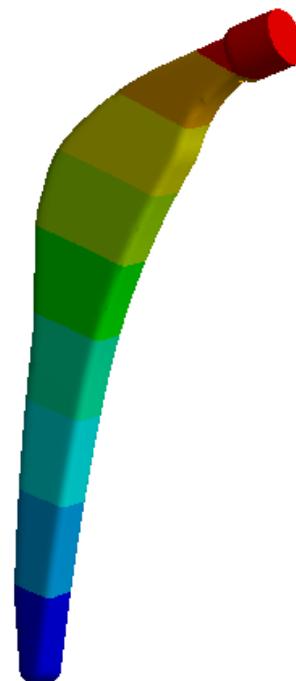
146.72 Max
 130.54
 114.36
 98.18
 82.001
 65.822
 49.643
 33.463
 17.284
 1.1051 Min



(a)

E: Static Structural
 Total Deformation 2
 Type: Total Deformation
 Unit: mm

12.867 Max
 11.979
 11.091
 10.203
 9.3155
 8.4275
 7.5396
 6.6517
 5.7638
 4.8758 Min



(б)

Рис.2.2.2.5. Распределение эквивалентных напряжений (по Мизесу) и модуля вектора перемещений для компонента эндопротеза в случае 2 сценария нагружения

2.3. Проектирование геометрии, включающей в себя решетчатые структуры

Проведем решение задачи оптимизации для представленных сценариев нагружения с целью определения распределения эффективной плотности материала. В качестве целевой функции рассматривалась энергия деформации, минимизация которой приводит к получению оптимальной жесткости конструкции. В качестве ограничения выступала итоговая масса изделия, значение которой не должно было превышать 50%. В качестве переменной проектирования использовалась эффективная плотность в области оптимизации, значение которой находились в промежутке от 0,3 до 0,7. Граничные значения эффективной плотности были выбраны в соответствии с технологическими

ограничениями аддитивного производства. Тип ячейки выбирался в соответствии с проведенным ранее исследованием, по результатам которого наиболее подходящей оказалась ячейка типа 4, размер которой при проектировании решетчатой структуры компонента эндопротеза составляет 3,7 мм.

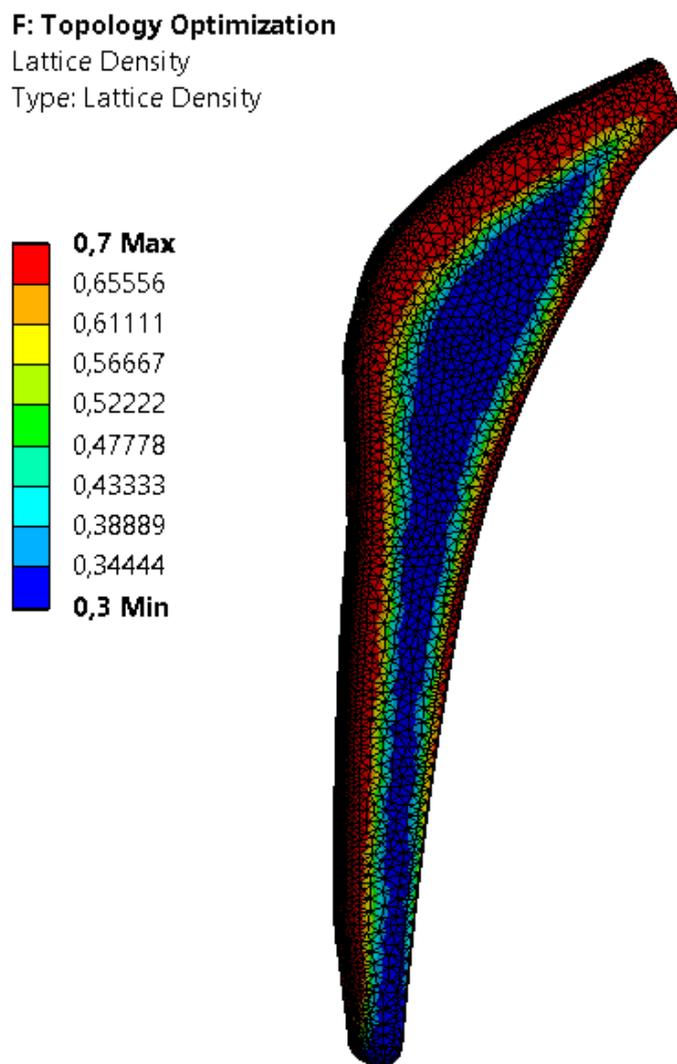


Рис.2.3.1. Распределение эффективной плотности метаматериала

Отметим, что большая объемная доля материала сосредоточена на периферии геометрии, что соответствует характеру распределения напряжений в модели и в целом достаточно логично, потому как при изгибе, который реализуется при стоянии и ходьбе, и при кручении, которое возникает при

повороте, большой уровень напряжений характерен для материала, расположенного на периферии. Решетчатая структура с меньшим процентом объемной доли сосредоточена в центральной части геометрии эндопротеза.

По полученному распределению плотностей построена геометрия эндопротеза, включающая в себя решетчатые структуры с градиентными свойствами. Элементарная ячейка, лежащая в основе построения решетчатой периодической структуры – ячейка типа 4, имеющая высокие значения модулей Юнга и модулей сдвига в сравнении с другими типами элементарных ячеек. На основе ячейки типа 4 сформировано градиентное поле плотности, позволяющее еще более эффективно внедрить структуру в эндопротез. Данная ячейка наилучшим образом подходит для обеспечения качественной остеоинтеграции среди тех базовых ячеек, которые доступны в Ansys для генерации решетчатых структур с градиентными свойствами. Внешний вид полученной геометрии представлен на рисунке (2.3.2).

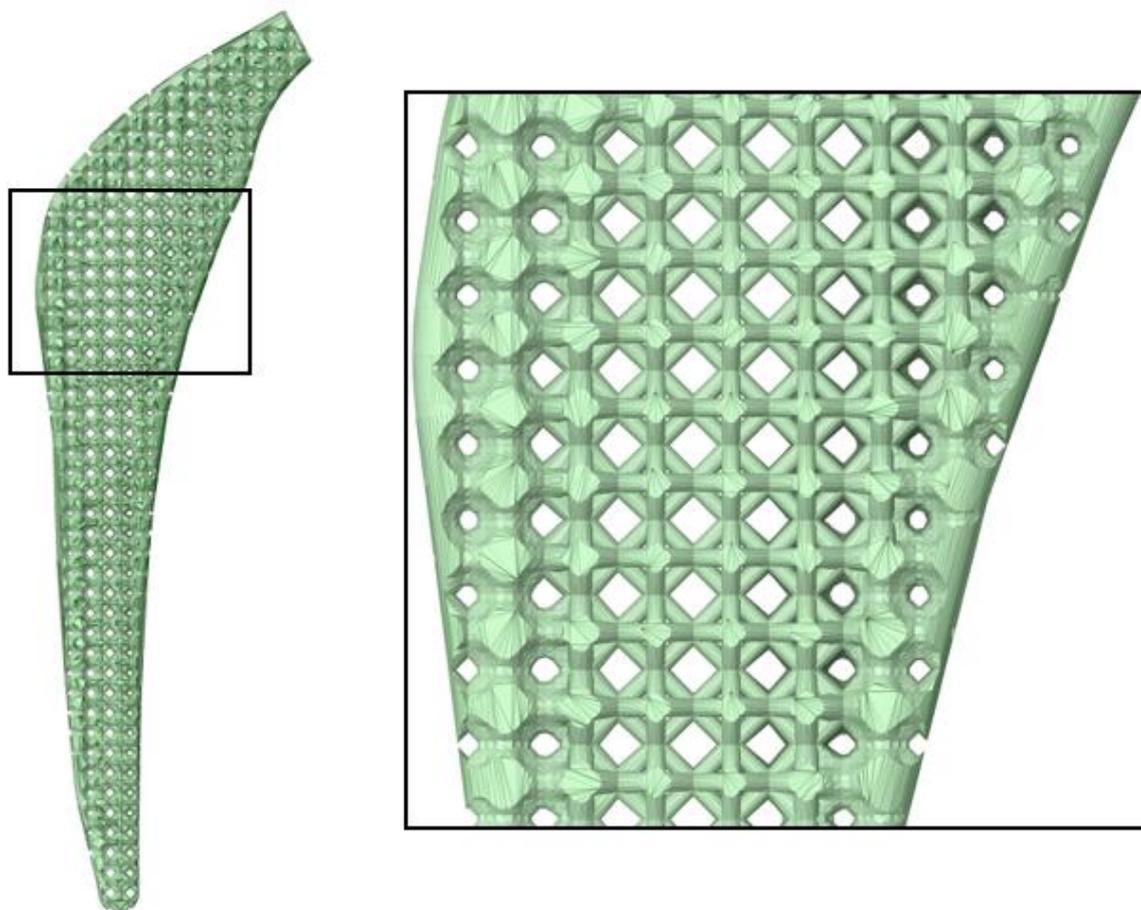


Рис.2.3.2. Внешний вид геометрии компонента эндопротеза, включающей в себя решетчатые структуры

2.4. Результат нагружения геометрии, включающей решетчатые структуры

Анализ полей напряжений и перемещений спроектированной геометрии производился при сценариях нагружения, описанных ранее. Для проверки сеточной сходимости была построена модель не очень большой размерности, для которой возможно корректно оценить результаты при различных значениях размеров конечных элементов расчетной сетки. Результаты перемещений брались при моделировании эксперимента на изгиб и растяжение. Вид геометрической модели с указанными граничными условиями представлен на рисунке ниже.

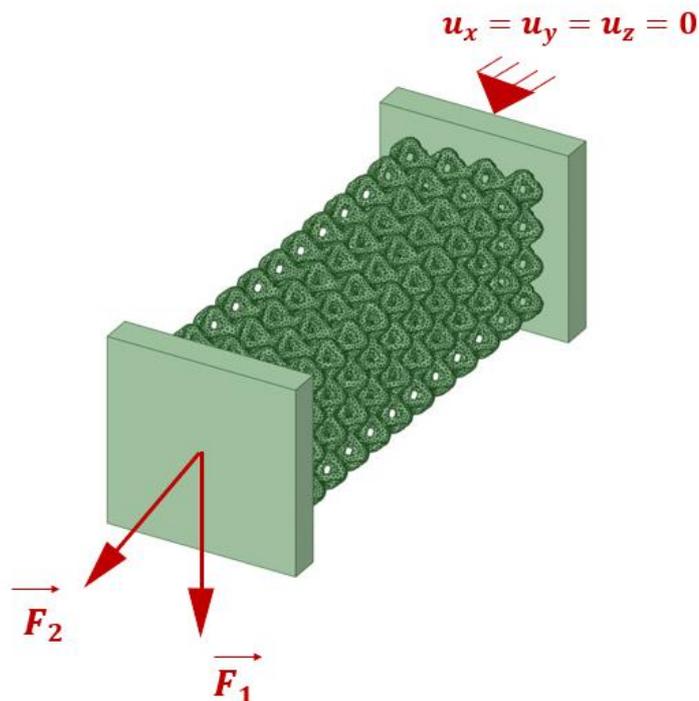


Рис.2.4.1. Схема нагрузок и ограничений, прикладываемых к модели для определения сеточной сходимости

Здесь F_1 – сила в случае рассмотрения перемещений на изгиб, F_2 – сила в случае рассмотрения перемещений на растяжение.

Для геометрии построена конечно-элементная сетка различных размеров в диапазоне 0,16 – 0,275 мм. Для каждого расчета размер элемента уменьшался на 10%. Полученные результаты приведены в виде таблицы и отражены графически.

Таблица 2.4.1.
Результаты расчета для определения сеточной сходимости

Размер конечного элемента сетки, мм	Число узлов сетки	Относительная ошибка в перемещениях при изгибе, %	Относительная ошибка в перемещениях при растяжении, %
0,16	880 101	0,00	0,00
0,18	597 619	5,33	5,48
0,2	482 116	9,27	9,53
0,225	330 317	8,08	8,78
0,25	259 564	10,13	9,41

0,275	189 559	27,42	26,47
-------	---------	-------	-------

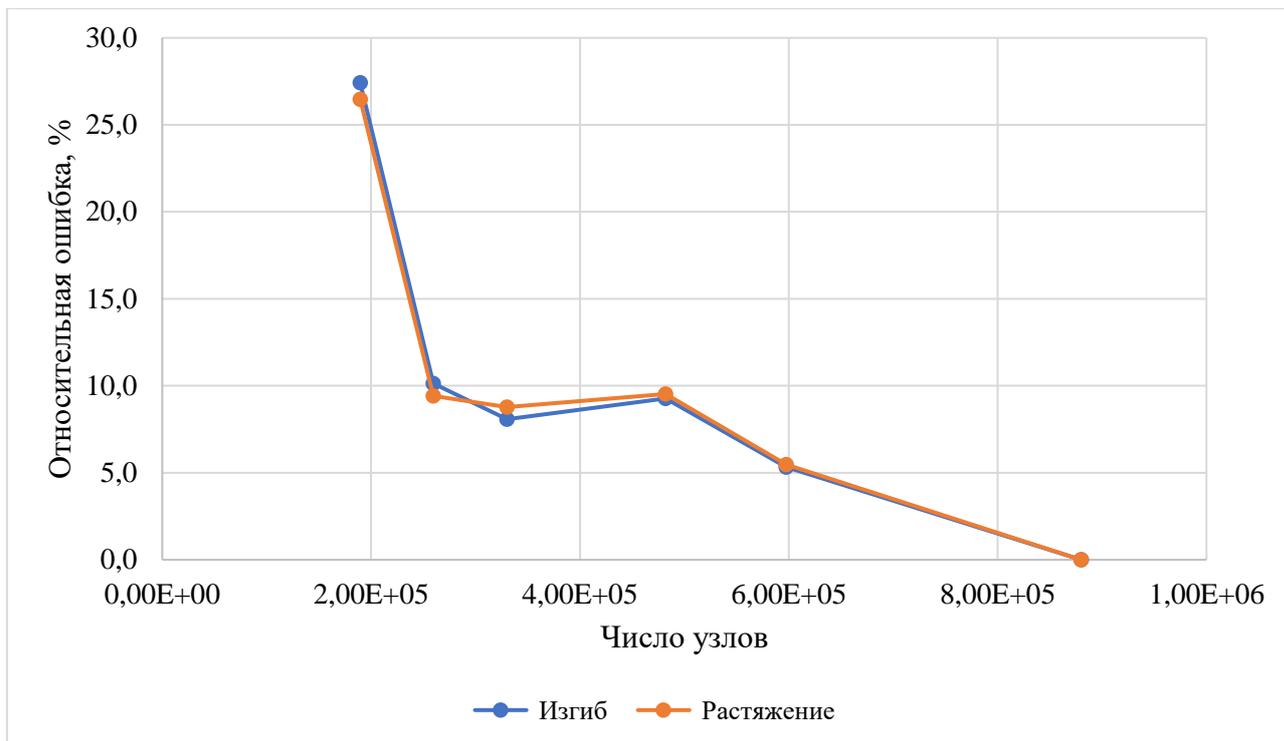


Рис.2.4.2. Графическое представление сеточной сходимости

Для расчета бедренного компонента эндопротеза тазобедренного сустава, который включает в себя решетчатые структуры с градиентными свойствами, выбрана сетка с размером элемента 0,25 мм. Конечно-элементная модель эндопротеза представлена на рисунке (2.4.3).

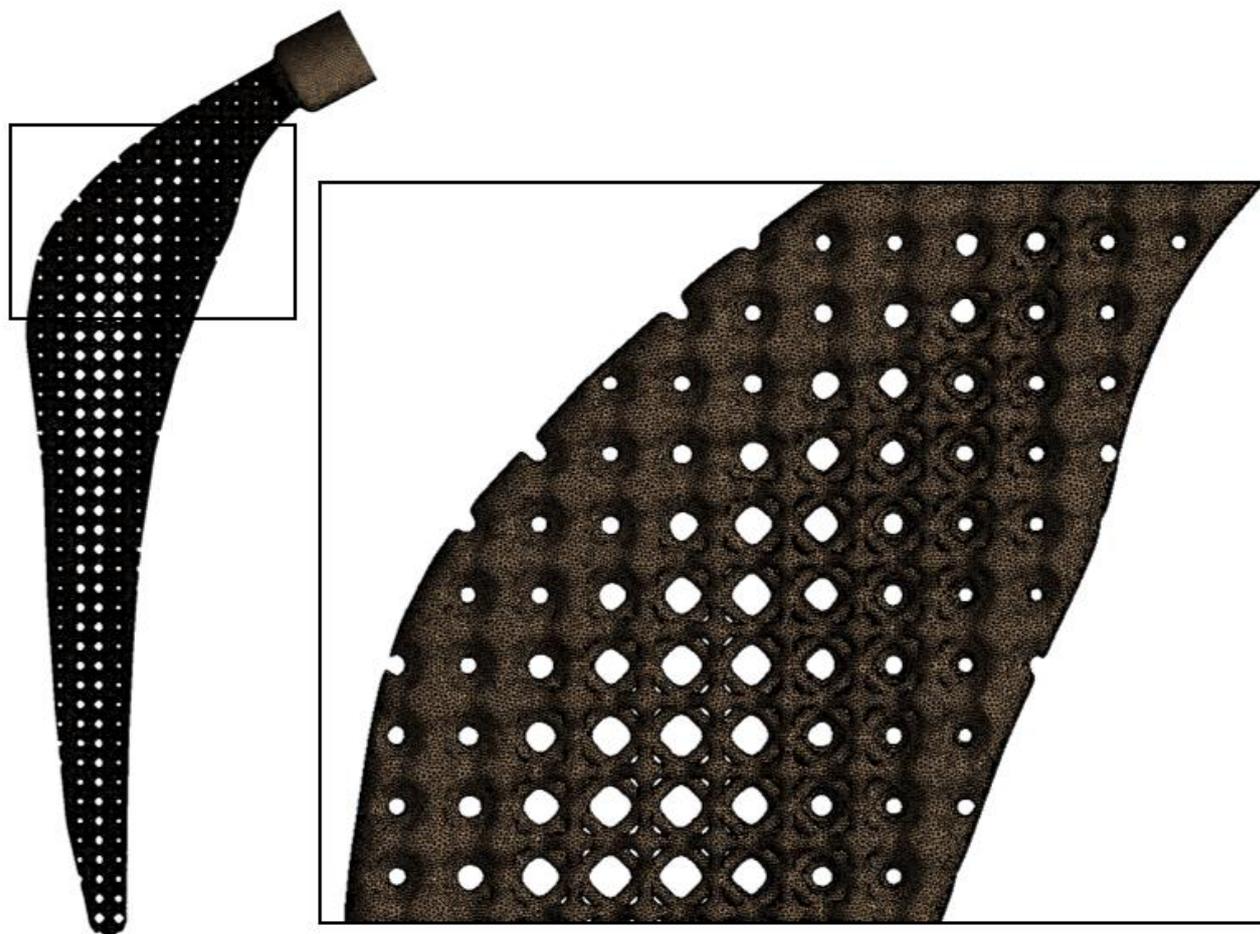


Рис.2.4.3. Конечно-элементная модель компонента эндопротеза

Как было отмечено ранее, для анализа геометрии необходимо провести 2 вида нагружения по сценариям, на основе результата которых строилась геометрия эндопротеза, включающая в себя решетчатые структуры. Поле эквивалентных напряжений по Мизесу для двух случаев нагружения представлено на рисунках (2.4.4 – 2.4.5)

C: Static Structural
Equivalent Stress 2
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: MPa

1862.9 Max
300
262.56
225.11
187.67
150.23
112.78
75.34
37.896
0.45279 Min

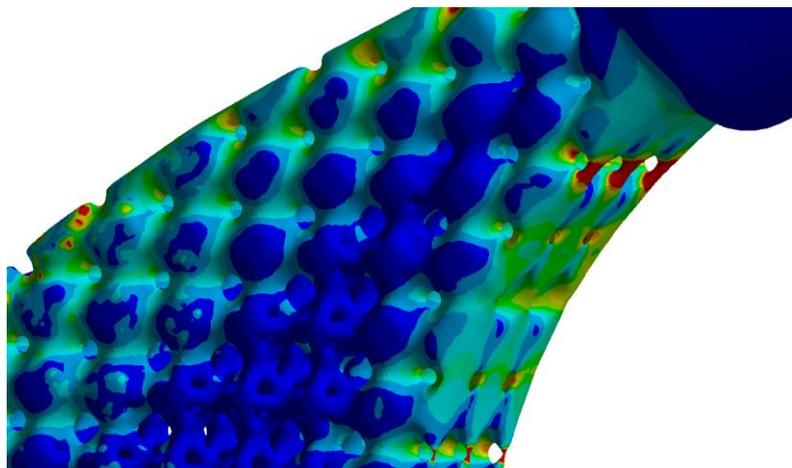
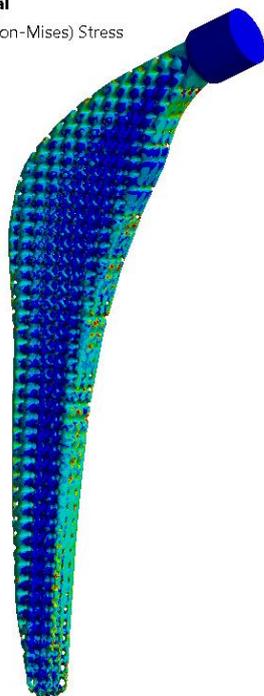


Рис.2.4.4. Эквивалентные напряжения (по Мизесу) компонента эндопротеза. 1 сценарий нагружения

D: Static Structural
Equivalent Stress 2
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: MPa

1698.7 Max
300
262.54
225.07
187.61
150.14
112.68
75.217
37.753
0.28953 Min

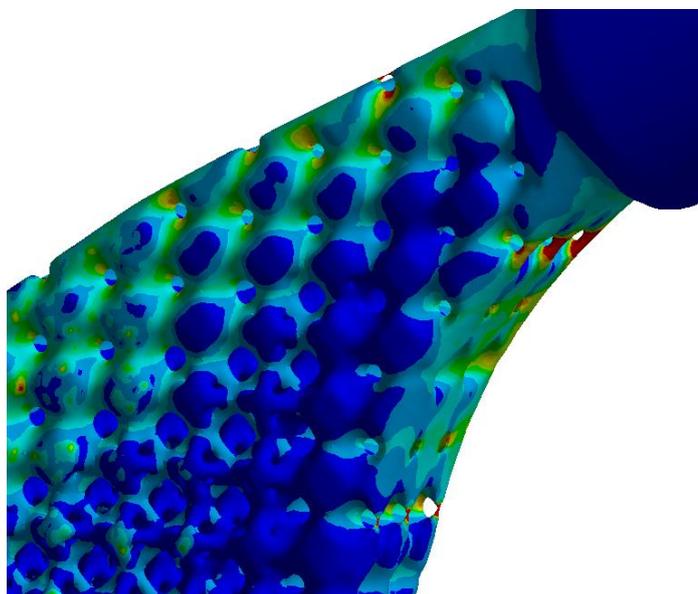
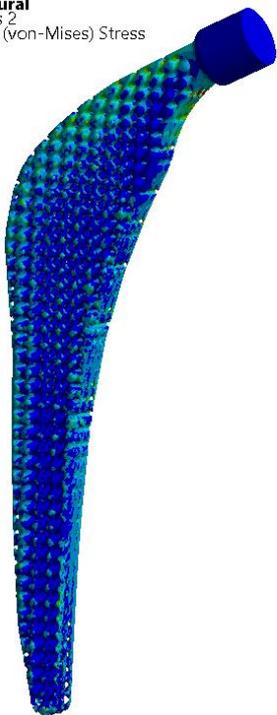


Рис.2.4.5. Эквивалентные напряжения (по Мизесу) компонента эндопротеза. 2 сценарий нагружения

Рассмотрев характер распределения напряжений, отметим, что большая часть геометрии не превышает напряжения в 300 МПа в каждом из случаев нагружения. Однако при анализе результатов заметим, что концентраторами

напряжений являются мелкие элементы геометрии, которые появляются ввиду сложной формы геометрии эндопротеза. Такие элементы удаляются при постобработке напечатанного изделия и не являются препятствием для применения решетчатых метаматериалов в работе. По итогу отметим, что в спроектированном изделии, которое включает в себя решетчатые структуры, отсутствует превышение предела прочности.

Таким образом, наглядно показан пример проектирования геометрии бедренного компонента эндопротеза тазобедренного сустава с подробным изложением шагов решения задачи построения и расчета конечно-элементной модели с последующим анализом полученных результатов. Применение градиентных решетчатых структур при проектировании компонента эндопротеза позволяет учитывать характер нагружения изделия и оптимизировать распределение эффективных плотностей таким образом, чтобы решетчатая структура и изделие в целом могли выдерживать как можно большие статические нагрузки, приходящиеся на систему. В работе удалось применить результаты исследования, полученные в теоретической части текущего документа. Отметим также, что на примере данной задачи наблюдаем высокий уровень сложности проведения цифровых испытаний подобных структур, что однозначно показывает высокий уровень важности применения технологии гомогенизации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках выпускной квалификационной работы бакалавра была решена задача определения влияния топологии неоднородной периодической структуры на значения макроскопических механических характеристик элементарной ячейки и метаматериала в целом. В ходе решения данной задачи были определены параметры топологии и оценено влияние каждого из них на результаты полученных упругих модулей пористого материала.

Данная задача решалась в предположении, что исследование ряда зависимостей позволит в дальнейшем проектировать материалы с заданными механическими свойствами, необходимость в которых возникает при разработке современной передовой промышленной продукции, требующей учета механики сплошных сред, механики гетерогенных сред и композитов, вычислительной механики и математического моделирования, биомедицинских и передовых производственных технологий.

В данной работе описан подход к изучению макроскопических механических свойств метаматериалов, при рассмотрении которого выдвинуты и проверены предположения о связи механических характеристик с топологическими параметрами, такими как тип элементарной ячейки, объемная доля материала, геометрические соотношения репрезентативного элемента объема, градусная мера угла между стержнями, которые образуют элементарную ячейку. Также представлен пример внедрения решетчатой структуры с градиентными свойствами в проектируемое изделие на примере компонента эндопротеза тазобедренного сустава.

Изучение свойств решетчатых структур является актуальным направлением исследований в области механики. В качестве дальнейшей работы над поставленными задачами запланировано изучение влияния топологических параметров метаматериалов на эффективность процесса регенерации костной ткани и проведение серии вычислительных экспериментов для рассмотрения ряда других зависимостей в рамках задачи исследования решетчатых

метаматериалов. Возможно также рассмотрение более широкого перечня типов элементарных ячеек, задача определения механических характеристик которых не решена в полной мере. В частности, запланировано изучение механических характеристик поверхностных решеток, что позволит отойти от привычного представления решетчатой структуры, в основе которой лежат стержни.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильчевская Е.Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ, учеб. пособие / Е.Н. Вильчевская. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 46 с.
2. Боровков А.И., Алеман Меза Д. Гомогенизация однонаправленных волокнистых и гранулированных упругих композитов, Научно-технические ведомости СПбГПУ. - СПб.: Изд. СПбГПУ. 2009. № 3. 135-153.
3. Боровков А.И., Маслов Л.Б., Жмайло М.А. Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния эндопротеза тазобедренного сустава при двухопорном стоянии, Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 4. – С. 437–468.
4. Маслов Л.Б., Дмитриук А.Ю., Жмайло М.А. Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния эндопротеза тазобедренного сустава при ходьбе, Российский журнал биомеханики. 2021. Т. 25, № 4: 414–433
5. Bergmann G., Deuretzbacher G. Hip contact forces and gait patterns from routine activities, Journal of Biomechanics – 2001. – Vol. 34, no.7. – P. 859–871.
6. Bobbert F.S.L., Janbaz S., Zadpoor A.A., Towards deployable meta-implants, J. Mater. Chem. B 6 (21) (2018) 3449–3455.
7. Christensen J., Kadic M., Kraft O., Vibrant times for mechanical metamaterials, MRS Commun. 5 (3) (2015) 453–462.
8. Duda G.N., Heller M., Albinger J., Schulz O., Schneider E., Claes L. Influence of muscle forces on femoral strain distribution // Journal of Biomechanics. – 1998. – Vol. 31. – P. 841–846
9. Hedayati R., Sadighi M., Mohammadi-Aghdam M., A. Zadpoor, Mechanics of additively manufactured porous biomaterials based on the rhombicuboctahedron unit cell, J. Mech. Behav. Biomed. Mater. 53 (2016) 272–294.

10. Hedayati R., Sadighi M., Mohammadi-Aghdam M., A. Zadpoor Mechanical properties of regular porous biomaterials made from truncated cube repeating unit cells: analytical solutions and computational models, *Mater. Sci. Eng., C* 60 (2016) 163–183.
11. Kolken H.M., Janbaz S., Leeflang S.M., Lietaert K., Weinans H.H., Zadpoor A.A. Rationally designed meta-implants: a combination of auxetic and conventional meta-biomaterials, *Mater. Horiz.* 5 (1) (2018) 28–35.
12. Lee Jae-Hwang, Jonathan P. Singer, Edwin L. Thomas, Micro-/Nanostructured Mechanical Metamaterials, *Advanced Materials*, 2012, 4782–4810.
13. Mirzaali M., Janbaz S., Strano M., Shape-matching soft mechanical metamaterials, *Sci. Rep.* 8 (1) (2018) 965-972.
14. Oraib Al-Ketana,b, Reza Rowshanc, Rashid K. Abu Al-Rub Topology-mechanical property relationship of 3D printed strut, skeletal, and sheet based periodic metallic cellular materials *Additive Manufacturing*, 2018, 167-183.
15. Rayhana Saiaf Bin, Rahmanb Md Mazedur Modeling elastic properties of unidirectional composite materials using Ansys Material Designer, *Procedia Structural Integrity* 28 (2020) 1892–1900.
16. Thijs L., Verhaeghe F., Craeghs T., Van Humbeeck J., Kruth J.-P., A study of the microstructural evolution during selective laser melting of Ti6Al4V, *Acta Mater.* 58 (9) (2010) 3303–3312.
17. Wauthle R., Vrancken B., Beynaerts B., Jorissen K., Schrooten J., Kruth J.-P., J. Van Humbeeck, Effects of build orientation and heat treatment on the microstructure and mechanical properties of selective laser melted Ti6Al4V lattice structures, *Addit. Manuf.* 5 (2015) 77–84.
18. Zadpoor A.A., Hedayati R., Analytical relationships for prediction of the mechanical properties of additively manufactured porous biomaterials, *J. Biomed. Mater. Res. Part A* 104 (12) (2016) 3164–3174.
19. SolidWorks Help. <https://mobz.cc/gkoq>. Электронный ресурс, дата обращения 11.08.2022.

Приложение 1. Код Matlab, в котором реализованы повороты локальных осей элементарной ячейки

```
clc
clear
x = "Ex = ";
y = "Ey = ";
z = "Ez = ";
a = "nu_yx = ";
b = "nu_zx = ";
c = "nu_xy = ";
d = "nu_zy = ";
e = "nu_xz = ";
f = "nu_yz = ";
g = "Gxy = ";
h = "Gyz = ";
k = "Gxz = ";
j = "alpha = ";
i = "beta = ";
p = "gamma = ";

Ex = input(x);
Ey = input(y);
Ez = input(z);
nu_yx = input(a);
nu_zx = input(b);
nu_xy = input(c);
nu_zy = input(d);
nu_xz = input(e);
nu_yz = input(f);
Gxy = input(g);
```

```

Gyz = input(h);
Gxz = input(k);
alpha = input(j);
beta = input(i);
gamma = input(p);
M1 = [];
M1 = [1/Ex, -nu_yx/Ey, -nu_zx/Ez, 0, 0, 0;
-nu_xy/Ex, 1/Ey, -nu_zy/Ez, 0, 0, 0;
-nu_xz/Ex, -nu_yz/Ey, 1/Ez, 0, 0, 0;
0, 0, 0, 1/Gxy, 0, 0;
0, 0, 0, 0, 1/Gyz, 0;
0, 0, 0, 0, 0, 1/Gxz];
M=inv(M1);
C = zeros([3,3,3,3]);

C(1,1,1,1) = M(1,1);
C(1,1,2,2) = M(1,2);
C(1,1,3,3) = M(1,3);
C(2,2,1,1) = M(2,1);
C(2,2,2,2) = M(2,2);
C(2,2,3,3) = M(2,3);
C(3,3,1,1) = M(3,1);
C(3,3,2,2) = M(3,2);
C(3,3,3,3) = M(3,3);

C(2,3,2,3) = M(4,4);
C(3,2,3,2) = C(2,3,2,3);
C(2,3,3,2) = C(2,3,2,3);
C(3,2,2,3) = C(2,3,2,3);

```

```

C(3,1,3,1) = M(5,5);
C(1,3,1,3) = C(3,1,3,1);
C(1,3,3,1) = C(3,1,3,1);
C(3,1,1,3) = C(3,1,3,1);

C(1,2,1,2) = M(6,6);
C(2,1,2,1) = C(1,2,1,2);
C(2,1,1,2) = C(1,2,1,2);
C(1,2,2,1) = C(1,2,1,2);
x1 = [1,0,0]';
x2 = [0,1,0]';
x3 = [0,0,1]';
P1 = [];
P2 = [];
P3 = [];
d = 0;
P1 = [cos(alpha), -sin(alpha), 0; sin(alpha), cos(alpha),
0; 0, 0, 1];
P2 = [1, 0, 0; 0, cos(-beta), -sin(-beta); 0, sin(-beta),
cos(-beta)];
P3 = [cos(gamma+d), -sin(gamma+d), 0; sin(gamma+d),
cos(gamma+d), 0; 0, 0, 1];
x1_tr = P3*P2*P1*x1;
x2_tr = P3*P2*P1*x2;
x3_tr = P3*P2*P1*x3;
% Направляющие косинусы
n11 =
(x1(1)*x1_tr(1))/(x1_tr(1)^2+x1_tr(2)^2+x1_tr(3)^2)^(1/2)
;
n22 =
(x2(2)*x2_tr(2))/(x2_tr(1)^2+x2_tr(2)^2+x2_tr(3)^2)^(1/2)
;

```

```

n33 =
(x3(3)*x3_tr(3))/(x3_tr(1)^2+x3_tr(2)^2+x3_tr(3)^2)^(1/2)
;
n12 =
(x2(2)*x1_tr(2))/(x1_tr(1)^2+x1_tr(2)^2+x1_tr(3)^2)^(1/2)
;
n13 =
(x3(3)*x1_tr(3))/(x1_tr(1)^2+x1_tr(2)^2+x1_tr(3)^2)^(1/2)
;
n21 =
(x1(1)*x2_tr(1))/(x2_tr(1)^2+x2_tr(2)^2+x2_tr(3)^2)^(1/2)
;
n23 =
(x3(3)*x2_tr(3))/(x2_tr(1)^2+x2_tr(2)^2+x2_tr(3)^2)^(1/2)
;
n31 =
(x1(1)*x3_tr(1))/(x3_tr(1)^2+x3_tr(2)^2+x3_tr(3)^2)^(1/2)
;
n32 =
(x2(2)*x3_tr(2))/(x3_tr(1)^2+x3_tr(2)^2+x3_tr(3)^2)^(1/2)
;

N = [n11, n12, n13; n21, n22, n23; n31, n32, n33];

C_tr = zeros([3,3,3,3]);
C_tr_dop = zeros([3,3,3,3]);

a1 = 1;
b1 = 1;
c1 = 1;
d1 = 1;
m = 1;
n = 1;
o = 1;
l = 1;

```

```

for a1 = 1:3
for b1 = 1:3
for c1 = 1:3
for d1 = 1:3
for m = 1:3
for n = 1:3
for o = 1:3
for l = 1:3
C_tr(m,n,o,l) = C_tr(m,n,o,l) +
N(m,a1)*N(n,b1)*N(o,c1)*N(l,d1)*C(a1,b1,c1,d1);
end

```

```

C2(1,1) = C_tr(1,1,1,1);
C2(1,2) = C_tr(1,1,2,2);
C2(1,3) = C_tr(1,1,3,3);
C2(1,4) = C_tr(1,1,2,3);
C2(1,5) = C_tr(1,1,3,1);
C2(1,6) = C_tr(1,1,1,2);

```

```

C2(2,1) = C_tr(2,2,1,1);
C2(2,2) = C_tr(2,2,2,2);
C2(2,3) = C_tr(2,2,3,3);
C2(2,4) = C_tr(2,2,2,3);

```

C2(2,5) = C_tr(2,2,3,1);
C2(2,6) = C_tr(2,2,1,2);

C2(3,1) = C_tr(3,3,1,1);
C2(3,2) = C_tr(3,3,2,2);
C2(3,3) = C_tr(3,3,3,3);
C2(3,4) = C_tr(3,3,2,3);
C2(3,5) = C_tr(3,3,3,1);
C2(3,6) = C_tr(3,3,1,2);

C2(4,1) = C_tr(2,3,1,1);
C2(4,2) = C_tr(2,3,2,2);
C2(4,3) = C_tr(2,3,3,3);
C2(4,4) = C_tr(2,3,2,3);
C2(4,5) = C_tr(2,3,3,1);
C2(4,6) = C_tr(2,3,1,2);

C2(5,1) = C_tr(3,1,1,1);
C2(5,2) = C_tr(3,1,2,2);
C2(5,3) = C_tr(3,1,3,3);
C2(5,4) = C_tr(3,1,2,3);
C2(5,5) = C_tr(3,1,3,1);
C2(5,6) = C_tr(3,1,1,2);

C2(6,1) = C_tr(1,2,1,1);
C2(6,2) = C_tr(1,2,2,2);
C2(6,3) = C_tr(1,2,3,3);
C2(6,4) = C_tr(1,2,2,3);
C2(6,5) = C_tr(1,2,3,1);
C2(6,6) = C_tr(1,2,1,2);

```
C_inv = inv(C2);
%Пересчет новых констант
Ex_new = 1/C_inv(1,1);
Ey_new = 1/C_inv(2,2);
Ez_new = 1/C_inv(3,3);
Gxy_new = 1/C_inv(4,4);
Gyz_new = 1/C_inv(5,5);
Gxz_new = 1/C_inv(6,6);
nu_yx_new = -C_inv(1,2)*Ey_new;
nu_zx_new = -C_inv(1,3)*Ez_new;
nu_xy_new = -C_inv(2,1)*Ex_new;
nu_zy_new = -C_inv(2,3)*Ez_new;
nu_xz_new = -C_inv(3,1)*Ex_new;
nu_yz_new = -C_inv(3,2)*Ey_new;

DISP_pyramid = {' ', 'До поворота', 'После поворота';
'Ex', Ex, Ex_new;
'Ey', Ey, Ey_new;
'Ez', Ez, Ez_new;
'Gxy', Gxy, Gxy_new;
'Gyz', Gyz, Gyz_new;
'Gxz', Gxz, Gxz_new;
'nu_yx', nu_yx, nu_yx_new;
'nu_zx', nu_zx, nu_zx_new;
'nu_xy', nu_xy, nu_xy_new;
'nu_zy', nu_zy, nu_zy_new;
'nu_xz', nu_xz, nu_xz_new;
'nu_yz', nu_yz, nu_yz_new};
```