Исследование распространения энергии в среде с микроструктурой

Выполнил: студент 5030103/80301 Груздев И.Е.

Научный руководитель: д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН Кривцов А.М.

Актуальность и цель

- Требуются эффективные методы волновой передачи энергии.
- Перенос энергии играет ключевую роль в передаче тепла на микро- и макроуровнях.

- **Целью** данной работы является поиск законов сохранения для цепочки с чередованием масс и цепочки на упругом основании, а также изучение эволюции движения энергетического возмущения в таких системах.

Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. – М.: Наука, 1975. – 416 с.

Kaviany, M.: Heat Transfer Physics, 2nd ed., pp. 751. Cambridge University Press, New York (2014)

Аналогия между массовой и энергетической динамикой

Масса	Энергия
масса m	E энергия
количество движения p	h поток энергии
статический момент M	μ_1 1-й момент энергии
момент инерции Θ	μ_2 2-й момент энергии
2-й закон Ньютона $m\ddot{x} = F$	$E\ddot{x}_c = f$ аналог второго закона
центр масс x_c центр энергетического возмущения	
радиус инерции ρ радиус энергетического возмущения	

Krivtsov A.M.: Dynamics of matter and energy. Z Angew Math Mech. e202100496 (2022)

Связь энергетической и массовой динамики

Координата энергетического центра:

$$x_c = \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n m_n}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} m_n} \quad \sim \quad x_c(t) = \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}/2} x_n E_n(t)}{E} = \frac{\mu_1(t)}{E}.$$

Движение энергетического центра определяется уравнением:

$$E\ddot{x}_c = f.$$

В случае $f = 0$ поток энергии сохраняется, а энергетический центр движется равномерно.

Связь энергетической и массовой динамики

Радиус инерции:

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{\mu_2^*(t)}{E}} = \sqrt{\rho_{\min}^2 + v_p(t - t^*)^2},$$

где

$\rho_{\min}$ – минимальный радиус инерции;

v_p – скорость расплывания возмущения;

t^* – время фокусировки возмущения.

Уравнения динамики. Кристалл с чередованием масс

$$m_n \ddot{u}_n = c(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}),$$

где m_n – масса n-ой частицы, c – жесткость пружин, u_n – смещение n-ой частицы.

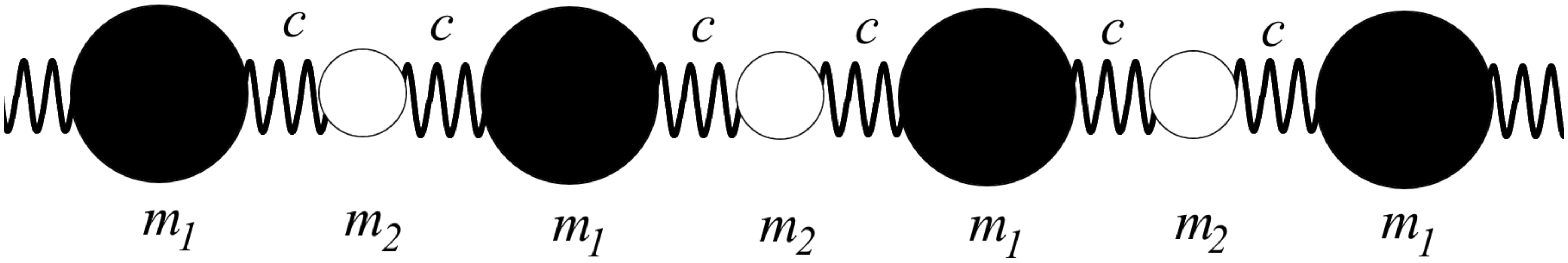

Рис. 1. Кристалл с чередованием масс

Локальные энергии

Локальная энергия, связанная с целым индексом – кинетическая энергия частицы:

$$E_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2, \qquad v_n = \dot{u}_n,$$

где v_n – скорость n-ой частицы;

Энергию, связанная с полуцелым индексом – потенциальная энергию пружины:

$$E_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} c (u_{n+1} - u_n)^2$$

Глобальная энергия

Глобальная энергия – сумма всех локальных энергий.

$$E = \sum_{n \in \mathbb{Z}/2} E_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_n + E_{n+\frac{1}{2}}.$$

Закон сохранения энергии:

$$\dot{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \mathrm{const}$$

Первый момент энергии

Первый момент энергии:

$$\mu_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}/2} x_n E_n\,, \qquad x_n = an,$$

где a – расстояние между атомами в невозмущенной цепочке. Поток энергии:

$$\dot{\mu}_1 = \frac{1}{2}ca\sum_{n\in\mathbb{Z}}(u_{n-1} - u_{n+1})v_n = h$$

$$\dot{h} = \frac{1}{2}c^2 a\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{m_n}(u_{n-1} - u_{n+1})(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) \neq 0$$

Производная потока энергии

В случае $m_n = \begin{cases} m_1, \ n = 2k+1 \\ m_2, \ n = 2k \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$ выражение для производной потока энергии можно привести к следующему виду:

$$\dot{h} = ca\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n E_{n+\frac{1}{2}}$$

Обобщение первого момента энергии

В качестве коэффициентов при элементарных энергиях в определении первого момента могут стоять любые линейные по индексу коэффициенты. Зададим их как кусочно-линейную функцию:

$$\mu_1 = a\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(nE_n + \left(n + \frac{1}{2} + (-1)^n\alpha\right)E_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$$

Обобщение первого момента энергии

Первый момент энергии для ячеек периодичности с полуцелыми индексами:

$$\mu_1 = \frac{a}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}/2} n\left(\frac{1}{2}E_{2n-1} + E_{2n-\frac{1}{2}} + E_{2n} + E_{2n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}E_{2n+1}\right).$$

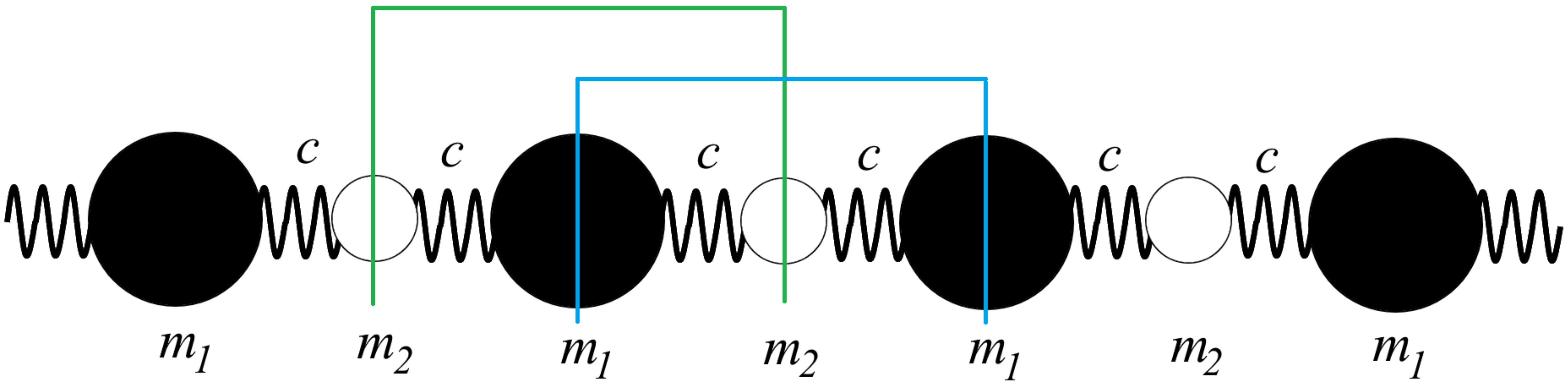

Рис. 2. Кристалл с чередованием масс, ячейки периодичности

Обобщенный поток энергии

Производная обобщенного первого момента энергии:

$$h = -\frac{ca}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}/2} v_{2n-1}(u_{2n} - u_{2n-2}).$$

Таким образом, обобщенный поток энергии сохраняется:

$$\dot{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \mathrm{const}$$

Уравнения динамики. Кристалл на упругом основании

$$m\ddot{u}_n = c_1(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - c_2 u_n,$$

где m – масса частицы, c_1 – жесткость пружин в кристалле, c_2 – жесткость пружин в основании, u_n – перемещение n-ой частицы.

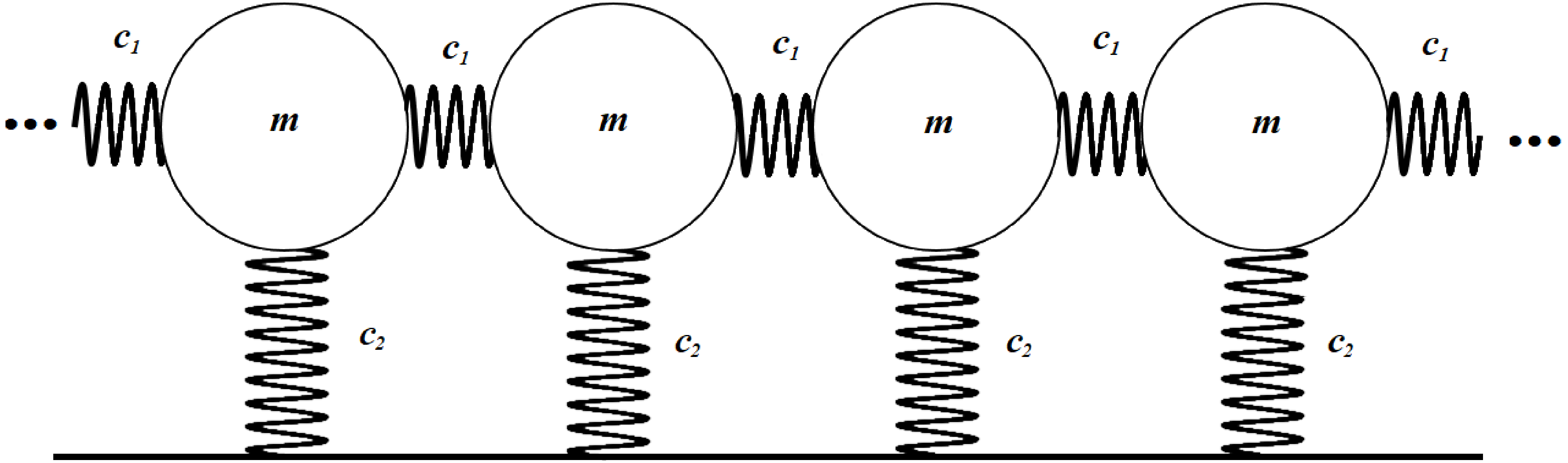

Рис. 3. Кристалл на упругом основании

Локальные энергии

Локальные формы энергий для целого и полуцелого индексов:

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 + \frac{1}{2} c_2 u_n^2, \qquad E_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} c_1 (u_{n+1} - u_n)^2.$$

Закон сохранения энергии:

$$E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_n + E_{n+\frac{1}{2}}, \qquad \dot{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{const}.$$

Первый момент энергии

Первый момент энергии:

$$\mu_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}/2} x_n E_n\,, \qquad x_n = an.$$

Поток энергии:

$$\dot{\mu}_1 = \frac{c_1 a}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n (u_{n-1} - u_{n+1}) = h$$

Поток энергии для кристалла на упругом основании сохраняется:

$$\dot{h} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \mathrm{const}$$

Второй момент энергии

Определение второго момента энергии:

$$\mu_2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}/2} x_n^2 E_n\,, \qquad x_n = an.$$

Вторая производная – суперпоток энергии:

$$\ddot{\mu}_2 = \frac{c_1 a^2}{m} E + \frac{c_1 a^2}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n v_{n-1} + \frac{c_1}{m} u_{n+1} u_{n-1} + \frac{c_2}{m} u_n u_{n-1} = g$$

Суперпоток энергии для кристалла на подложке сохраняется:

$$\dot{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad g = \mathrm{const}$$

Выводы

- Найдена форма задания первого момента энергии, при которой поток энергии в кристалле с чередованием масс сохраняется.
- Поток энергии в кристалле на упругом основании сохраняется, а энергетический центр движется равномерно.
- Суперпоток энергии в кристалле на упругом основании сохраняется.

Дальнейшее развитие работы

- Рассмотрение второго момента энергии для кристалла с чередованием масс.
- Обобщение результатов на цепочки с большим числом частиц в ячейке периодичности.
- Рассмотрение кристаллов на нелинейных основаниях.

Апробирование результатов

- Всероссийская конференция «Неделя науки ФизМех» 4-9 апреля 2022, секция «Многомасштабного моделирования переноса и конверсии энергии», тема «Исследование распространения энергии в одномерном кристалле с чередованием масс».
- 50-я международная конференция «Актуальные проблемы механики» 20-24 июня 2022, секция «Теплопередача и волновое движение», тема «Study of the distribution of energy in different chains».

Спасибо за внимание!