**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

**Кафедра «Теоретическая механика»**

**Ю.Е. Карякин**

**ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ**

**МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГ**

**2016**

УДК 531

Карякин Ю.Е. Прямолинейные колебания материальной точки. - СПб: СПбГПУ, 2016. - 22 с.

В методических указаниях изложен материал, необходимый для изучения теории прямолинейных колебаний материальной точки в рамках курса «Теоретическая механика», читаемого для студентов электромеханического факультета. Малый объем часов, отводимый учебным планом на изучение теории колебаний, определяет выбор материала данного пособия и конспективный стиль его изложения. На базе предложенного теоретического материала рассмотрены решения типовых задач по теории прямолинейных колебаний материальной точки, которые будут полезны студентам в период подготовки к контрольной работе по соответствующему разделу.

Методические указания предназначены для студентов второго курса электромеханического факультета, а также других факультетов инженерно-технического профиля.

**ВВЕДЕНИЕ**

Колебания являются одним из наиболее распространенных видов движения в природе и технике. Такие движения совершают атомы в молекуле, колебательную природу имеют световые и звуковые волны. Движение различных механизмов и приборов, элементов современных энергетических устройств также сопровождается колебаниями.

В настоящем пособии ограничимся рассмотрением механических колебаний: прямолинейных свободных и вынужденных колебаний материальной точки. Благодаря аналогиям, которые существуют между механическими и электрическими системами, изложенный материал может быть непосредственно использован при изучении колебательных явлений в электрических контурах.

Особое место в методических указаниях отведено решению типовых задач по теории прямолинейных колебаний материальной точки: свободных (без учета и с учетом влияния силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости) и вынужденных колебаний под действием гармонической возмущающей силы. Эту часть указаний следует активно использовать в процессе подготовки к контрольной работе по теории колебаний.

**1. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ**

1. **Свободные колебания материальной точки**

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки массы m под действием центральной силы , направленной к неподвижному центру О и пропорциональной расстоянию от этого центра (рис. 1.1). Такую силу называют *восстанавливающей*. Примером ее может служить реакция растянутой пружины. В этом случае постоянная и положительная величина с называется *коэффициентом жесткости пружины*.

Основное уравнение динамики материальной точки

******

в проекции на ось *x* и с учетом выражения для силы  принимает вид .



Рис. 1.1

Разделив обе части этого уравнения на *m*  и введя обозначение ******, причем k > 0, получим так называемое *дифференциальное уравнение свободных колебаний*

 (1.1)

Уравнение (1.1) - линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Ему соответствует *характеристическое уравнение*

,

имеющее чисто мнимые корни λ 1,2 = ± k i. Как следует из теории дифференциальных уравнений, общее решение (1.1) в этом случае принимает вид

*,* (1.2)

где C1 и C2 - произвольные постоянные. Их значения могут быть найдены из начальных условий

при t = 0 x = x0 , (1.3)

Подставляя первое условие (1.3) в (1.2), получим C1 = x0. Для нахождения константы *C2* продифференцируем (1.2) по t



и используем второе условие (1.3). В таком случае будем иметь: . С учетом найденных значений констант C1 и C2 из (1.2) следует окончательное решение задачи

 (1.4)

определяющее уравнение движения материальной точки под действием восстанавливающей силы. Это решение можно представить в ином виде, если ввести обозначения

 (1.5)

причем



С учетом (1.5) из (1.4) следует

 (1.6)

а это означает, что движение материальной точки под действием восстанавливающей силы происходит по закону *гармонических* *колебаний*. Такие колебания называются *свободными*, их график приведен на рис. 1.2.

Величина , входящая в выражение (1.6), называется *амплитудой* колебаний. Она характеризует наибольшее отклонение колеблющейся точки от положения равновесия. Комплекс , стоящий в (1.6) под знаком синуса, называется *фазой* колебаний. При этом  - начальная фаза.

Одна из важных характеристик свободных колебаний материальной точки - *период* колебаний . Его величина находится следующим образом. Пусть фаза в некоторой точке  (рис. 1.2) имеет значение , тогда в сходственной точке  она будет равна  За период фазовый угол синусоидальной функции изменяется на , т.е.



Рис. 1.2



откуда следует  Величина  называется *круговой* *частотой* колебаний. Ее размерность -  Период колебаний и частота  не зависят от начальных условий (свойство изохронности).

1. **Влияние силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, на свободные колебания материальной точки**

Будем теперь считать, что на материальную точку массы  помимо восстанавливающей силы  действует *сила сопротивления*, пропорциональная первой степени скорости, т.е.  (рис. 1.3), где  - коэффициент сопротивления ( > 0).

Такая сила, например, действует на тело при его движении в воздухе с малыми скоростями. В рассматриваемом случае основное уравнение динамики ******



Рис. 1.3

в проекции на ось x, вдоль которой происходит движение, принимает вид



Обозначая с/m = k 2, β/m = 2 n*,* получим стандартную форму дифференциального уравнения, описывающего свободные колебания материальной точки при наличии силы сопротивления

 (1.7)

Уравнение (1.7) является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка. Ему соответствует *характеристическое уравнение*



корни которого

 (1.8)

При этом могут встретиться следующие случаи.

1. n < k- *случай малого сопротивления*.

Как следует из (1.8), при n< kкорни характеристического уравнения оказываются комплексными

******

Значит, общее решение дифференциального уравнения (1.7) в этом случае будет иметь вид

****** (1.9)

причем константы  и  находятся из начальных условий (1.3).

Если обозначить  то решение (1.9) можно привести к виду, более удобному для анализа

****** (1.10)

Как следует из (1.10), движение точки, описываемое этим уравнением, нельзя считать периодическим. Величину  иногда условно называют амплитудой колебаний. Она экспоненциально убывает с течением времени. Таким образом, в случае малого сопротивления (n< k ) материальная точка будет совершать *затухающие колебания*. График таких движений представлен сплошной линией на рис. 1.4. Там же штрихами показано изменение величины A со временем.

T

1

t

x

0

A

=

a

e

-

n

t

A

i

+

1

A

i

Рис. 1.4

Для характеристики рассматриваемого движения в такой же мере условно вводятся понятия частоты и периода колебаний. Их значения соответственно равны

****** (1.11)

Из (1.11) следует, что с ростом коэффициента сопротивления  условный период затухающих колебаний возрастает.

Составим отношение двух следующих друг за другом амплитуд, разделенных временным интервалом / 2 (рис. 1.4)



Величина  называется *фактором затухания*, ее натуральный логарифм



носит наименование *логарифмического декремента*.

1. >  - *случай большого сопротивления*.

В этом случае корни характеристического уравнения определяются непосредственно из выражения (1.8). Соответствующее им решение дифференциального уравнения (1.7) принимает вид

 (1.12)

По-прежнему константы  и  следует искать из начальных условий (1.3).

Очевидно, что решение (1.12) также не является периодическим. В случае большого сопротивления (>) материальная точка совершает так называемое *апериодическое* движение. На рис. 1.5 представлены графики такого движения. Демонстрируется влияние величины и знака начальной скорости  на форму кривой . Во всех случаях движение начинается от одной и той же начальной координаты > 0. Нумерация кривых расшифровывается следующим образом:

1 -  > 0;

2 -  = 0;

3 -  < 0, но < ;

4 -  < 0, но > .

t

x

0

x

0

1

2

3

4

Рис. 1.5

1. =  - *граничный случай*.

Как следует из (1.8), при = корни характеристического уравнения становятся кратными: . В этом случае решение задачи записывается в виде

 (1.13)

а соответствующее ему движение точки также является *апериодическим*. Графики движения при =  также определяются рис. 1.5.

В заключение параграфа отметим, что во всех рассмотренных случаях (< , >, =) движение материальной точки затухает со временем, т.е. при t → ∞, x → 0.

1. **Вынужденные колебания материальной точки**

Колебания материальной точки называются *вынужденными*, если на эту точку помимо восстанавливающей силы  действует некоторая *возмущающая* сила , являющаяся заданной функцией времени. Ограничимся рассмотрением частного случая, когда возмущающая сила изменяется по гармоническому закону. При этом ее проекция на ось , вдоль которой происходит движение, может быть выражена следующим образом:

 (1.14)

где - амплитуда силы, - частота возмущающей силы,  - начальная фаза.

Основное уравнение динамики точки



в проекции на ось  принимает вид



Обозначая с /m = k 2, H / m = h, получим стандартную форму дифференциального уравнения вынужденных колебаний

 (1.15)

Уравнение (1.15) - линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как следует из теории дифференциальных уравнений, его решение следует искать в виде

 (1.16)

где  - общее решение соответствующего однородного уравнения, а  - частное решение данного неоднородного уравнения.

Однородное уравнение, которое соответствует (1.15), есть уравнение *свободных* колебаний (1.1). Его общее решение определяется найденным ранее выражением (1.2).

Частное решение уравнения (1.15) может принимать две различные формы в зависимости от соотношения между частотами  и .

1. *случай*  ≠ .

При этом частное решение задачи следует искать в виде

 (1.17)

где  и - неизвестные коэффициенты. Подставляя (1.17) в уравнение (1.15) и приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах (предоставим читателю выполнить эту работу самостоятельно), получим систему уравнений



откуда находим



Тогда частное решение задачи, называемое *чисто* *вынужденным колебанием*, будет записываться так

 (1.18)

С учетом (1.16), (1.2) и (1.18) представим общее решение задачи

 (1.19)

Из (1.19) следует, что при действии возмущающей гармонической силы материальная точка совершает сложное движение, являющееся наложением двух колебаний: свободных колебаний с частотой  и чисто вынужденных колебаний с частотой возмущающей силы .

Константы интегрирования  и  в (1.19) находятся с помощью начальных условий (1.3). Заметим, что амплитуда чисто вынужденных колебаний от начальных условий не зависит.

Рассмотрим некоторые характеристики вынужденных колебаний.

Величина , равная отношению частоты возмущающей силы  к частоте свободных колебаний , т.е.



называется *коэффициентом расстройки*.

Величина A 0 = h / k 2 = H / c определяет *статическое* *отклонение* точки от положения равновесия при действии на нее постоянной силы H, равной амплитуде возмущающей силы.

В таком случае амплитуда чисто вынужденных колебаний в (1.18) может быть представлена в виде

 (1.20)

*Коэффициентом динамичности* называют величину  С учетом (1.20) будем иметь

 (1.21)

На рис. 1.6 представлен график зависимости 

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Рис. 1.6 Рис. 1.7

Исследуем сдвиг  между фазой возмущающей силы (1.14) и фазой чисто вынужденного колебания (1.18).

Очевидно, что при <  (< 1) этот сдвиг  = 0.

При >  (>1) величина  в выражении (1.18) становится отрицательной. В этом случае (1.18) следует записывать так

 (1.22)

Сопоставляя (1.14) и (1.22), приходим к выводу, что при > 1 сдвиг фаз  = π.

Результирующий график зависимости  представлен на рис. 1.7.

1. *случай*  p = k.

Если частота возмущающей силы p совпадает с частотой свободных колебаний , то возникает явление *резонанса*. В этом случае частное решение (1.18) теряет смысл и его следует искать в виде

 (1.23)

где  и - неизвестные константы. Подставляя (1.23) в уравнение (1.15) и приравнивая коэффициенты при синусах и косинусах (предоставим читателю и эту работу выполнить самостоятельно), получим значения констант



В таком случае частное решение задачи, называемое *чисто вынужденным колебанием*, будет записываться

 (1.24)

Как видим, условная амплитуда этого колебания a = h t / (2 p) линейно возрастает со временем. График чисто вынужденного колебания при резонансе приведен на рис. 1.8.

t

x

2

0

h

t

2

p

Рис. 1.8

Для определения сдвига  между фазой возмущающей силы и фазой чисто вынужденного колебания представим выражение (1.24) в виде



Сопоставляя это выражение с (1.14) видим, что при резонансе сдвиг фаз . На рис. 1.7 это значение отмечено крестиком.

1. **Вынужденные колебания материальной точки при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости**

Предположим, что на материальную точку массы m действуют все ранее рассмотренные нами силы: восстанавливающая , сила сопротивления  и возмущающая , причем

, , 

В этом случае основное уравнение динамики



в проекции на ось движения  принимает вид



откуда с учетом ранее введенных обозначений (с/m = k 2, β/m = 2 n, H/m = h) будем иметь

 (1.25)

Общее решение этого линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами следует искать в форме (1.16), где  - общее решение однородного уравнения

 (1.26)

а  - частное решение неоднородного уравнения (1.25).

Уравнение (1.26) полностью совпадает с ранее рассмотренным уравнением (1.7), описывающим свободные колебания материальной точки при наличии силы сопротивления. Его решение в случаях n< k , >  и =  определяется выражениями (1.9), (1.12) и (1.13) соответственно. Напомним, что в пределе при t→ ∞ все эти выражения будут стремиться к нулю.

Частное решение уравнения (1.25) удобнее разыскивать в виде

 (1.27)

где A - амплитуда чисто вынужденного колебания,  - сдвиг между фазой возмущающей силы и фазой чисто вынужденного колебания.

Подставим решение (1.27) в дифференциальное уравнение (1.25)

 (1.28)

при этом в правой части уравнения выполнено тождественное преобразование



Приравнивая в (1.28) коэффициенты при  и , получим систему уравнений



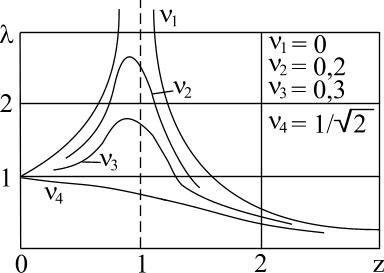
откуда находятся

 (1.29)

Если ввести, как и прежде, коэффициенты  A 0 = h / k 2, а также  то из (1.29) можно получить выражение для коэффициента динамичности

 (1.30)

На рис. 1.9 построено семейство кривых  при различных значениях коэффициента сопротивления . Все кривые проходят через точку с координатами (0,1), при  коэффициент динамичности  стремится к нулю.



# Рис. 1.9

Следует отметить, что при наличии сопротивления ( ≠ 0) коэффициент динамичности никогда не обращается в бесконечность. В случае резонанса ( = 1) его значение становится равным



При фиксированном  с ростом коэффициента сопротивления  величина коэффициента динамичности уменьшается.

Исследуем поведение максимумов семейства функций  при различных значениях . Для этой цели рассмотрим подкоренное выражение в (1.30)



имеющее следующие производные по :





Очевидно, что максимуму  соответствует минимум 

Полагая  находим, что функции  и могут иметь экстремумы в точках

 и  (1.31)

При <1/ функция  имеет максимум в точке  поскольку > 0, т.е. функция в этой точке минимальна. Из (1.31) следует, что с ростом коэффициента сопротивления максимум функции  смещается влево.

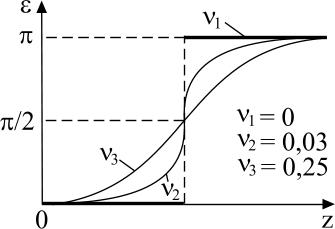
При  > 1/ функция  максимальна при  т.к. в этом случае > 0.

Перейдем к исследованию *сдвига*  между фазой возмущающей силы и фазой вынужденного колебания. С учетом ранее введенных коэффициентов, из (1.29) будем иметь

 (1.32)

Функция , как это следует из (1.32), независимо от принимает следующие характерные значения:   наконец, при z → ∞ сдвиг ε → π.

С учетом этих особенностей, на рис. 1.10 построено семейство кривых  при различных значениях коэффициента сопротивления . При отсутствии сопротивления (=0) получим уже исследованную нами разрывную линию, изображенную на рис. 1.7.



# Рис. 1.10

1. **Примеры решения задач по теории прямолинейных колебаний материальной точки**

Исследуем вертикальное прямолинейное движение материальной точки массы , подвешенной на невесомой пружине с коэффициентом жесткости . Если движение происходит в вязкой среде, то будем учитывать действие силы сопротивления , пропорциональной первой степени скорости. На материальную точку может также действовать гармоническая возмущающая сила вида 

При решении задач по теории колебаний особое внимание уделяется выбору системы отсчета, в которой описывается движение материальной точки.

На рис. 1.11 изображена упругая пружина в трех различных состояниях. Недеформированное состояние представлено слева на рис. 1.11,а.

.

а

)

б

)

в

)

F

с

т

P



с

т

P

x

x

F

x

=

-

c

(



с

т

+

x

)

.

F

0

Рис. 1.11

Если к нижнему концу пружины подвесить тяжелую материальную точку массы , то под действием силы тяжести пружина удлинится. Ее равновесное состояние изображено на рис. 1.11,б. Удлинение, которое при этом получила пружина, обозначено  и называется *статическим удлинением*. В состоянии равновесия на точку действуют две силы: сила тяжести  и упругая сила . При этом модуль упругой силы равен . Условие равновесия материальной точки на упругой пружине запишется в виде

 или  (1.33)

Выведем теперь материальную точку из положения равновесия и предоставим ей возможность совершать колебания. На рис. 1.11,в эта точка изображена в некоторый произвольный момент времени. Ось , относительно которой будем описывать движение, направлена вертикально вниз и имеет начало в положении статического равновесия. Будем придерживаться этого правила при решении задач. В таком случае проекция упругой силы  на выбранную ось  будет равна

 (1.34)

Последовательность решения задач по теории прямолинейных колебаний материальной точки такова:

1. изобразить материальную точку, закрепленную на пружине, в произвольный момент времени;
2. выбрать вертикальную ось  с началом в положении статического равновесия;
3. изобразить все силы, действующие на материальную точку;
4. записать уравнение движения точки в проекции на ось  (в дифференциальной форме);
5. рассмотреть условие статического равновесия точки, использовать это условие для упрощения дифференциального уравнения;
6. ввести необходимые коэффициенты () и привести дифференциальное уравнение к стандартному виду;
7. вычислить введенные коэффициенты;
8. записать общее решение дифференциального уравнения;
9. сформулировать начальные условия;
10. вычислить константы интегрирования;
11. записать в окончательном виде решение задачи.

**Задача 1**

*Условие.* Груз массы =100 г подвешен к пружине с коэффициентом жесткости =10 н/м. Найти закон движения груза, если в начальный момент времени он находился в положении статического равновесия и его начальная скорость, направленная вверх, равнялась 50 см/с.

*Решение.*  Рис. 1.11,в соответствует условию данной задачи. Ось  направляется вертикально вниз с началом отсчета в положении статического равновесия. Груз изображен в некотором произвольном положении с координатой > 0. При этом на него действуют две силы: сила веса  и сила упругости  (направлена вверх, т.к. пружина растянута).

Уравнение движения груза в проекции на ось  имеет вид



С учетом (1.34) будем иметь



Используя условие статического равновесия (1.33), упростим уравнение и поделим его на 



Обозначая , приведем это уравнение к стандартному виду



Как видим, движение точки в данном случае описывается дифференциальным уравнением, аналогичным (1.1). Определим частоту свободных колебаний



при этом учтено, что =100 г = 0,1 кг.

Решение дифференциального уравнения задачи определяется выражением (1.2). В нашем случае оно будет иметь вид



Для нахождения констант интегрирования  и  запишем начальные условия

 м / с.

Первое из них определяется тем, что в начальный момент времени груз находился в положении статического равновесия, где расположено начало отсчета оси . Используя это условие, получим  = 0.

Знак минус во втором условии означает, что начальная скорость была направлена вверх, противоположно положительному направлению оси .

Вычисляя



и используя второе начальное условие, будем иметь

 т.е. 

В таком случае решение задачи принимает окончательный вид

, м.

**Задача 2**

*Условие.* Груз массы =100 г, прикрепленный к пружине с коэффициентом жесткости =16,9 н / м, движется в вязкой среде. Сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости: = 2,6, н. Найти закон движения груза, если в начальный момент времени он был смещен из положения равновесия вниз на 10 см и отпущен без начальной скорости.

*Решение.* На рис. 1.12 изображен прикрепленный к пружине груз, движение которого происходит в вязкой среде. Ось  по-прежнему направлена вертикально вниз из положения статического равновесия.

P

x

.

F

0

R

## Рис. 1.12

Предполагаем, что груз движется в сторону увеличения координаты. На рисунке изображены силы, действующие на груз: ,  и . Уравнение движения в проекции на ось  записывается так



С учетом (1.34) и выражения  уравнение принимает вид



Используем условие равновесия груза (1.33) и введем коэффициенты с/m = k 2, β /m = 2 n, тогда будем иметь



Получили стандартную форму дифференциального уравнения свободных колебаний при наличии силы сопротивления, см. (1.7).

Вычислим коэффициенты и  ( = 2,6 нс/м )





Как видим, имеет место граничный случай =. При этом общее решение задачи определяется (1.13) и в нашем случае примет вид



Запишем граничные условия

 = 0,  = 0,1 м,  = 0.

Первое условие дает  = 0,1.

Вычисляя производную



и используя второе начальное условие, получим



откуда находится  = 13,  = 1,3.

В таком случае решение задачи примет следующий окончательный вид:



**Задача 3**

*Условие.* Груз массы =100 г подвешен к пружине, коэффициент жесткости которой = 62,5 н/м. К грузу приложена возмущающая сила , н. Найти закон движения груза, если в начальный момент времени он был смещен из положения равновесия вниз на 12 см и ему была сообщена скорость 40 см/с, направленная вверх.

*Решение.* Расчетная схема задачи изображена на рис.1.13. Уравнение движения в проекции на ось принимает вид



После очевидных упрощений будем иметь стандартную форму уравнения вынужденных колебаний, см. (1.15)



где k 2 = с/m, h = H/m.

P

x

.

F

0

S

# Рис. 1.13

В нашем случае

 = 25,  м/с2.

Так как имеет место  ( резонанс), то общее решение задачи записывается в виде



с начальными условиями  0,12 м,  = - 0,4 м / с.

Из первого условия находим  = 0,12.

Вычисляя производную



и используя второе начальное условие, будем иметь



откуда с учетом значений коэффициентов следует:  = 0,064.

Решение задачи запишется в окончательном виде так:

, м.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. - М.: Наука, 2006.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Теоретическая механика. Ч.3. - Л.-М.: ОНТИ ГТТИ, 1934. - 624 с.
3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. - М.: Наука, 1971. - 240 с.

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ

ТОЧКИ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1. Свободные колебания материальной точки . . . . . . . 4
2. Влияние силы сопротивления, пропорциональной

первой степени скорости, на свободные колебания

материальной точки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1. Вынужденные колебания материальной точки . . . . . 8
2. Вынужденные колебания материальной точки

при наличии силы сопротивления, пропорциональной

первой степени скорости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12

1. Примеры решения задач по теории прямолинейных

колебаний материальной точки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

ЛИТЕРАТУРА . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21