

Построение механических аналогий с использованием методов энергетической динамики

Груздев И.Е.

Июнь 2024

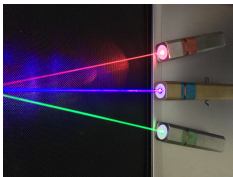


Figure: Лазеры

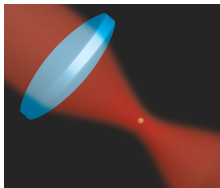


Figure: Оптические пинцеты



Figure: Томограф

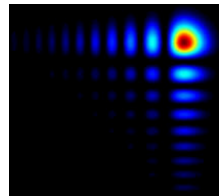


Figure: Пучок Эйри

Цель работы состоит в исследовании распространения волновых пакетов в различных средах и построении аналогии между движением возмущений и распространением оптических пучков.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- 1 Вывести уравнения движения и дисперсионные соотношения для многомерной волновой среды и двумерной тонкой пластины;
- 2 Вывести параксиальное приближение для волнового уравнения, для него построить решение в виде пучка Гаусса и исследовать его характеристики;
- 3 Получить параболический пучок как решение уравнения Софи Жермен, исследовать его свойства;
- 4 Рассмотреть пучок Эйри как решение одномерного уравнения Шредингера.

Уравнения движения упругой среды

$$\rho \ddot{u} = C \nabla^2 u,$$

где ρ – плотность, C – жесткость среды,
 u – перемещение.

Дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = c^2 k^2.$$

Представим решение в виде

$$u = A(\mathbf{r}) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha)).$$

Уравнение принимает вид:

$$\nabla^2 A + 2i \nabla A \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Параксиальное приближение^a

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \right| \ll \left| \mathbf{k} \frac{\partial A}{\partial \xi} \right|,$$

где ξ – координата вдоль волнового вектора \mathbf{k} .

^aГончаренко, А. М. Оптические гауссовы пучки и солитоны / А. М. Гончаренко. – Минск : Беларус. навука, 2011. – 125 с.

В итоге уравнение принимает вид:

$$\nabla_{\perp}^2 A + 2i\nabla A \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (1)$$

где ∇_{\perp} – набла-оператор, вычисляемый по всем направлениям, перпендикулярным волновому вектору \mathbf{k} . Обозначим \mathbf{r}_{\perp} – соответствующий радиус-вектор.

«Начальное» условие по координате ξ :

$$A|_{\xi=0} = A_0 \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_{\perp}^2}{\sigma^2} + i\alpha\right), \quad (2)$$

где σ – масштаб аргумента, а A_0 – начальная амплитуда.

Представим решение (1) в виде

$$A(\xi, \mathbf{r}_\perp) = \exp(a(\xi) \mathbf{r}_\perp^2 + b(\xi)).$$

Тогда решение задачи (1)–(2) сводится к решению задачи

$$\begin{cases} \frac{da}{d\xi} = \frac{2i}{k} a^2 \\ \frac{db}{d\xi} = \frac{i}{k} (n-1) a \end{cases}, \quad \begin{aligned} a|_{\xi=0} &= -\frac{1}{\sigma^2} \\ b|_{\xi=0} &= \ln A_0 + i\alpha \end{aligned} \quad (3)$$

где $(n-1)$ – размерность радиус-вектора \mathbf{r}_\perp , k – модуль волнового вектора.

Решение задачи (3) имеет вид

$$a(\xi) = -\frac{1}{\sigma^2 (1 + i\kappa\xi)},$$
$$b(\xi) = -\frac{n-1}{2} \ln(1 + i\kappa\xi) + \ln A_0 + i\alpha.$$

А решение для задачи (1)–(2)

$$A(\xi, \mathbf{r}_\perp) = \frac{A_0}{(1 + i\kappa\xi)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{\sigma^2 (1 + i\kappa\xi)} + i\alpha\right),$$

что и является n -мерным гауссовым пучком.

Избавимся от мнимой части знаменателя с помощью полярного представления комплексного числа

$$A(\xi, \mathbf{r}_\perp) = \frac{A_0}{(1 + \kappa^2 \xi^2)^{\frac{n-1}{4}}} \exp \left(-\frac{1 - i\kappa\xi}{1 + \kappa^2 \xi^2} \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{\sigma^2} - i \frac{n-1}{2} \arctan(\kappa\xi) + i\alpha \right),$$

и выделим отдельно экспоненту с мнимым показателем:

$$A(\xi, \mathbf{r}_\perp) = \frac{A_0}{(1 + \kappa^2 \xi^2)^{\frac{n-1}{4}}} \exp \left(-\frac{1}{1 + \kappa^2 \xi^2} \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{\sigma^2} \right) \cdot \exp \left(i \left(\frac{\kappa\xi}{1 + \kappa^2 \xi^2} \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{\sigma^2} - \frac{n-1}{2} \arctan(\kappa\xi) + \alpha \right) \right). \quad (4)$$

Сравнение с двумерным решением

В работе¹ рассматривается двумерная постановка задачи и предложено решение

$$A = \sqrt{\frac{w_0}{w(x)}} \exp\left(-\frac{y^2}{w^2(x)} - \frac{iky^2}{2R(x)} + \frac{i}{2} \arctan \frac{x}{x_R}\right),$$

где

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2}, \quad R(x) = x + \frac{x_R^2}{x}, \quad x_R = \frac{kw_0^2}{2}.$$

Полагая в (4) $\sigma = w_0$, $n = 2$, $r_{\perp}^2 = y^2$, $A_0 = 1$ и $\alpha = 0$, а переменную ξ заменяя на $-x$ получается, что представление (4) и представление из ¹ согласуются.

¹Y. Mizuyama. Параксиальное приближение для описания гауссова пучка. 

В работе² рассматривается трехмерная постановка задачи и предложено решение

$$\varphi = \frac{w_0}{w(z)} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} - i \frac{k}{2R(z)} (x^2 + y^2) + i \arctan \frac{z}{z_R} \right),$$

где

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}, \quad R(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z}, \quad z_R = \frac{k w_0^2}{2}.$$

Полагая в (4) $\sigma = w_0$, $n = 3$, $r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$, $A_0 = 1$ и $\alpha = 0$, а переменную ξ заменяя на z получается, что представление (4) и представление из ² согласуются.

²Гончаренко, А. М. Оптические гауссовы пучки и солитоны / А. М. Гончаренко. – Минск : Беларус. навука, 2011. – 125 с.

Решение волнового уравнения имеет вид:

$$u(\xi, \mathbf{r}_\perp, t) = \Re(A(\xi, \mathbf{r}_\perp) \exp(i(-\omega t))),$$

Таким образом из (4) следует

$$u(\xi, \mathbf{r}_\perp, t) = \frac{A_0}{(1 + \kappa^2 \xi^2)^{\frac{n-1}{4}}} \exp\left(\frac{1}{1 + \kappa^2 \xi^2} \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{\sigma^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\kappa \xi}{1 + \kappa^2 \xi^2} \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{\sigma^2} - \omega t - \frac{n-1}{2} \arctan(\kappa \xi) + \alpha\right) \quad (5)$$

Уравнения движения тонкой упругой пластины

$$\rho \ddot{u} + D \Delta \Delta u = 0,$$

где D – жесткость на изгиб.
Дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = b^2 k^4,$$
$$b^2 = \frac{D}{\rho}.$$

Уравнение Шредингера

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - ib \Delta \psi = 0.$$

Начальное условие

$$\psi \Big|_{t=0} = A_0 \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) \exp (ikx + i\varphi).$$

Рассмотрим подстановку в виде

$$\psi = \exp(\alpha(t)(\xi^2 + y^2) + \beta(t)\xi + \gamma(t)).$$

Тогда задача Коши для уравнения Шредингера сводится к следующей:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 4ib\alpha^2, \\ \dot{\beta} = 4ib\alpha\beta + 2\alpha c, \\ \dot{\gamma} = ib(4\alpha + \beta^2) + \beta c \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha(0) = -\frac{1}{\sigma^2}, \\ \beta(0) = ik, \\ \gamma(0) = i\varphi + \ln A_0 \end{cases}$$

Окончательно решение имеет вид

$$\psi = \exp(\alpha(t)(\xi^2 + y^2) + \beta(t)\xi + \gamma(t)),$$

$$\alpha = -\frac{1}{\sigma^2(1 - 4i\nu t)},$$

$$\beta = -\frac{ct}{2\sigma^2} + ik,$$

$$\gamma = \ln(1 - 4i\nu t) + i\frac{c^2\nu}{6\sigma^2}t^3 - \frac{3c^2}{4\sigma^2}t^2 + 2ickt + i\varphi + \ln A_0,$$

$$\nu = \frac{b}{\sigma^2}$$

Одномерное уравнение Шредингера. Пучок Эйри

Уравнения движения

$$i\psi_s + \frac{1}{2}\psi_{\xi\xi} = 0,$$

где s – безразмерная координата, ξ – нормализованный размер светового пятна.
Начальное условие

$$\psi \Big|_{t=0} = \text{Ai}(s).$$

Данная задача имеет решение³:

$$\psi = \text{Ai} \left(s - \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 \right) \exp \left(i \frac{s\xi}{2} - i \frac{\xi^3}{12} \right)$$

³Siviloglou, G. A., Broky, J., Dogariu, A., and Christodoulides, D. N. Observation of Accelerating Airy Beams – Physical Review Letters 99, 2007

Модулированный пучок Эйри.

Переход от безразмерных координат к пространству-времени

Для одномерного безразмерного уравнения Шредингера поставим начальное условие

$$\psi \Big|_{t=0} = \text{Ai}(s) \exp(as),$$

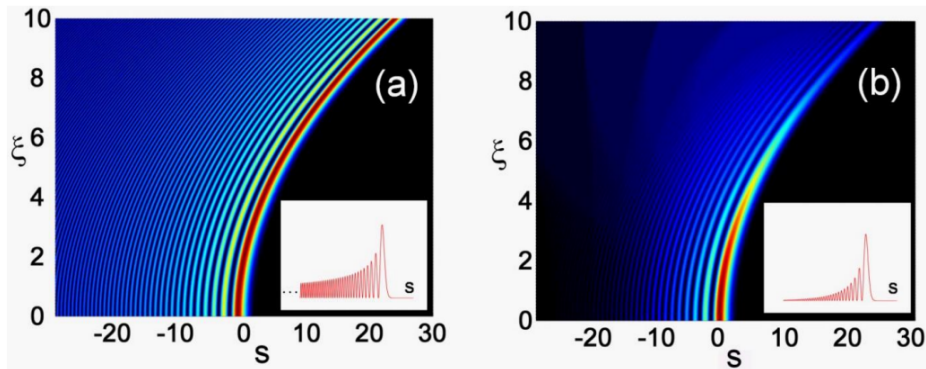
где a – коэффициент затухания. Такая задача имеет решение⁴:

$$\psi = \text{Ai} \left(s - \left(\frac{\xi}{2} \right)^2 + ia\xi \right) \exp \left(as - a \frac{\xi^2}{2} + a^2 \frac{\xi}{2} + i \frac{s\xi}{2} - i \frac{\xi^3}{12} \right)$$

Переход к координатам-времени:

$$\xi = \frac{t}{t_0}, \quad s = \sqrt{\frac{2}{bt_0}} z$$

⁴Siviloglou, G. A., Broky, J., Dogariu, A., and Christodoulides, D. N. Observation of Accelerating Airy Beams – Physical Review Letters 99, 2007



Распространение (a) бездифракционного пучка Эйри и (b) пучка Эйри с конечной энергией при $a = 0.05$.⁵ s – безразмерная координата, ξ – безразмерное время.

⁵Siviloglou, G. A., Broky, J., Dogariu, A., and Christodoulides, D. N. Observation of Accelerating Airy Beams – Physical Review Letters 99, 2007

- 1 Получено решение n -мерного волнового уравнения в параксиальном приближении;
- 2 В параксиальном приближении получено обобщение пучка Гаусса для пространств высоких размерностей;
- 3 Получено решение для волнового пакета в виде параболического пучка для уравнения Шредингера и уравнения Софи Жермен;
- 4 Рассмотрено решение в виде пучка Эйри для одномерного уравнения Шредингера и показан переход от пучка к волновому пакету;
- 5 Показано, что переход к подвижной системе отсчета и рассмотрение расплывания оптического пучка соответствуют рассмотрению первого и второго моментов в энергетической динамике.