Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа теоретической механики

Работа допущена к защите

директор ВШ ТМ, д. ф.-м. н., чл.-корр. РАН

А. М. Кривцов

«___»_____2020 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ЗАДАЧА ЭКСПРЕСС-ОЦЕНКИ КОРРЕКТНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕЩИНЫ ГРП НА ПРИМЕРЕ ПОСТАНОВКИ PLANAR3D

По направлению 01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

по образовательной программе

01.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред с микроструктурой

Выполнил

студент гр. 3630103/60101 С. С. Барсуков

Руководитель

Доцент ВШ ТМ, к.ф-м.н. Е. Ю. Витохин

Санкт-Петербург

2020

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Институт прикладной математики и механики

УТВЕРЖДАЮ
Директор ВШ ТМ, д.ф.-м.н.,
чл.-корр. РАН
А.М. Кривцов
« 3 » февраля 2020 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы

студенту Барсукову Севастьяну Сергеевичу, группы 3630103/60101
фамилия, имя, отчество (при наличии), номер группы

1. Тема работы: Задача экспресс-оценки корректности моделирования трещины ГРП на примере постановки Planar3D

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 15 июня 2020 года

3. Исходные данные по работе: Научные статьи по теме работы, баланс массы для жидкости гидроразрыва, уравнение связи давления с раскрытием трещины в упругом случае, уравнение Пуазейля для течения в плоско-параллельном канале, эмпирический закон утечек Картера, программа моделирования роста трещины гидроразрыва пласта в слоистой среде в постановке Planar3D.

4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):

Проверка корректности реализации основных допущений модели Planar3D в программе моделирования роста трещины, разработанной в научно-образовательном центре «Газпромнефть-Политех»

Тест на погрешность расчетной программы

Тест на предельные переходы

Тест на верность реализации эмпирического закона Картера.

5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): Отсутствует

6. Консультанты по работе: Отсутствуют

7. Дата выдачи задания 3 февраля 2020 года

Руководитель ВКР _____ Е.Ю. Витохин
(подпись) инициалы, фамилия

Задание принял к исполнению 3 февраля 2020 года
(дата)

Студент _____ С.С. Барсуков
(подпись) инициалы, фамилия

РЕФЕРАТ

На 34 с., 18 рисунков, 5 таблиц

ГИДРОРАЗРЫВ ПЛАСТА, МЕТОДИКА ТЕСТИРОВАНИЯ, МОДУЛЬ PLANAR3D, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ, УТЕЧКИ

В данной работе проверена корректность реализации основных допущений модели Planar3D в симуляторе гидроразрыва пласта (ГРП) в условиях трехслойной симметричной среды с постоянной закачкой ньютоновской жидкости. Проведены тесты на погрешность симулятора ГРП, на предельные переходы и на утечки жидкости.

ABSTRACT

34 pages, 18 pictures, 5 tables

HYDRAULIC FRACTURING, TESTING METHOD, MODULE PLANAR3D, LIMIT TRANSITIONS, LEAKOFF

In this paper, the correctness of the implementation of the basic assumptions of the Planar3D model in the hydraulic fracturing simulator in the formulation of a three-layer symmetric reservoir with constant injection of Newtonian fluid is verified. Tests were conducted for the error of the hydraulic fracturing simulator, for the limiting transitions, and for leakoff.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА В ПОСТАНОВКЕ МОДЕЛИ PLANAR3D 8
1.1. История математических моделей 8
1.2. Постановка задачи 11
1.3. Предположения модели 12
1.4. Уравнения, используемые в модели 13
1.5. Обезразмеривание уравнений 16
1.6. Методика проведения тестов 21
ГЛАВА 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ 24
2.1. Пример расчёта 24
2.2. Тест на погрешность симулятора ГРП 25
2.3. Тест на предельные переходы 27
2.4. Тест на утечки 30
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 34
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 36

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня разработка трудноизвлекаемых запасов становится необходимым условием ведения успешного нефтяного бизнеса. Трудноизвлекаемыми следует считать запасы, экономически эффективная (рентабельная) эксплуатация которых может осуществляться только с применением методов и технологий, требующих повышенных капиталовложений и эксплуатационных затрат по сравнению с традиционно используемыми способами. По данным Минэнерго доля трудно извлекаемых запасов нефти в России составляет более 65% от общего объема доказанных запасов [7]. Решением проблемы разработки запасов низкопроницаемых коллекторов, которые составляют значительную часть от мировых трудно извлекаемых запасов, становится совершенствование технологий воздействия на пласт, в первую очередь — технологии гидроразрыва (ГРП). Технология ГРП заключается в нагнетании в скважину жидкости под большим давлением. В результате происходит разрыв породы с образованием трещин, для сохранения в открытом виде которых, используется расклинивающий агент – проппант. В связи с невозможностью отследить развитие трещины с помощью прямого наблюдения, а также из-за ограниченности данных, получаемых с датчиков давления и деформации, установленных в различных частях скважины, невозможно получить полную картину ГРП, а, следовательно, необходимо построение математических моделей и их компьютерная реализация.

Использование симулятора ГРП позволяет получать научные и практические сведения о процессе ГРП, даёт возможность наблюдать все стадии гидроразрыва – возникновение трещины, ее раскрытие под действием закачиваемой жидкости, продвижение проппанта и др. Выбор специалистом математической модели часто определяет его дальнейшее представление о ГРП и влиянии данного процесса на разработку нефтегазовых месторождений. В настоящее время для моделирования процесса ГРП

нефтяные компании используют в симуляторах следующие модели: Pseudo3D, Planar3D и Full3D. Модель Pseudo3D работает при следующем приближении: высота трещины много меньше ее длины, отличается от модели PKN учетом проникновения в соседний пласт. На практике это приближение выполняется, когда основной рост трещины происходит в длину. При этом точность снижается к краям трещины. Кроме того моделирование развития трещины моделью Pseudo3D при прорыве в слой с отрицательным контрастом напряжений (с меньшими сжимающими напряжениями) даёт некорректные результаты [1]. Является наименее ресурсозатратной моделью, вследствие чего до сих пор активно используется в симуляторах ГРП. Модель Planar3D не использует приближение малости высоты в сравнении с длиной трещины, то есть учитывает двумерное течение жидкости. В связи с этим форма трещины моделируемой Planar3D ограничена только условием планарности (распространения в плоскости), в отличие от трещины в модели Pseudo3D, изменяющейся в пределах фиксированной геометрии. Модель имеет небольшое количество допущений, в сравнении с Pseudo3D: трещина распространяется вдоль одной плоскости, перпендикулярной минимальному горному напряжению; упругие характеристики пласта однородны. Малое число ограничений гарантирует модели широкое применение и возможность дальнейшего развития, которое может идти в следующих направлениях: корректный учет неоднородности по вертикали упругих модулей, не прямолинейный рост трещины ГРП, учет пороупругого эффекта. Модель Full3D позволяет моделировать наиболее сложные варианты развития трещины, практически не использует никаких упрощений и, как правило, решается численно с применением МКЭ, а, следовательно, возникает ряд существенных проблем, связанных в первую очередь со скоростью счета, а также с точностью расчетов в окрестности кончика трещины ГРП. Симуляторы с моделью Full3D на практике используются редко. Текущие задачи, стоящие перед специалистами в нефтегазовой области, и уровень современного технологического

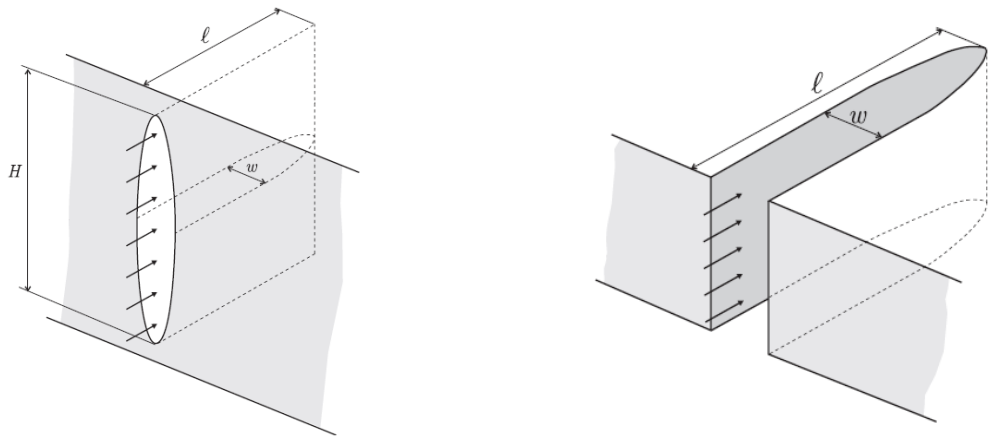
моделирования способствуют развитию симуляторов на основе модели Planar3D, которая иногда совмещается с моделью Pseudo3D для обеспечения более гибкого программного решения конкретных геологических задач и удовлетворения требований к скорости счета [3].

Процедура ГРП может привести как к существенному увеличению дебита на скважине, так и, в случае ошибки прогноза развития трещины, к неблагоприятным последствиям для дальнейшей добычи и к снижению нефтеотдачи. Поэтому необходимо по мере развития моделей проводить сравнение и валидацию результатов, получаемых с использованием разных подходов. На практике результаты могут существенно различаться между собой, не позволяя при этом определить, какой из расчетов является более корректным. Из-за малого числа лабораторных экспериментов требуется разрабатывать и совершенствовать методики тестирования, основанные на сопоставлении результатов расчетов со свойствами закладываемой в алгоритм физико-математической модели. В рамках данной работы проводится валидация программы моделирования трещины по модели Planar3D с использованием подобной методики. Главное внимание уделяется проверке реализации основных допущений модели ГРП. Проверка осуществляется путем сравнения результатов для предельных случаев с аналитическими решениями моделей PKN и Radial, а также соответствием результатов заложенным физическим законам [4]. Применение симулятора с корректной моделью позволяет выполнять физически достоверное моделирование данного сложного процесса, принимать обоснованные инженерные решения при проектировании операций и повышать эффективность применения ГРП.

ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА В ПОСТАНОВКЕ МОДЕЛИ PLANAR3D

1.1 История математических моделей

Первые упрощенные теоретические модели разрабатывались в 1950-х годах. Одной из наиболее важных работ того периода была модель PKN (рисунок 1.1.1*а*), разработанная Перкинсом и Керном, которая адаптировала решение для трещины плоской деформации Снеддона. Позже Нордгрен успешно включил в модель эффекты потери жидкости. Модель PKN может использоваться для длинных трещин с ограниченной высотой и эллиптическим вертикальным поперечным сечением. Христианович и Желтов, а также, независимо от них, Герцма и де Клерк разработали модель KGD (рисунок 1.1.1*б*). Модель KGD использует допущение, что длина трещины значительно меньше ее высоты. Поэтому модель применяется для коротких трещин, когда допущения относительно плоской деформации применимы к горизонтальным сечениям. Модель Radial (рисунок 1.1.2) с постоянным давлением была решена Снеддоном, а позже уточнена Линьковым [14]. Модель хорошо описывает начальное развитие трещины в условиях однородного пласта с точечным источником нагнетания.



(*а*) (*б*)

Рисунок 1.1.1. Модель PKN (*а*) и модель KGD (*б*) [9]

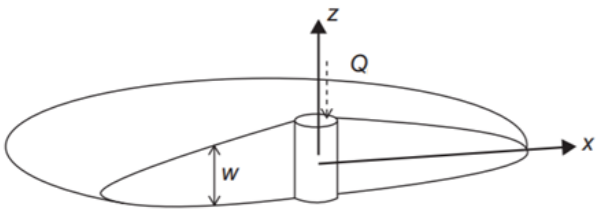
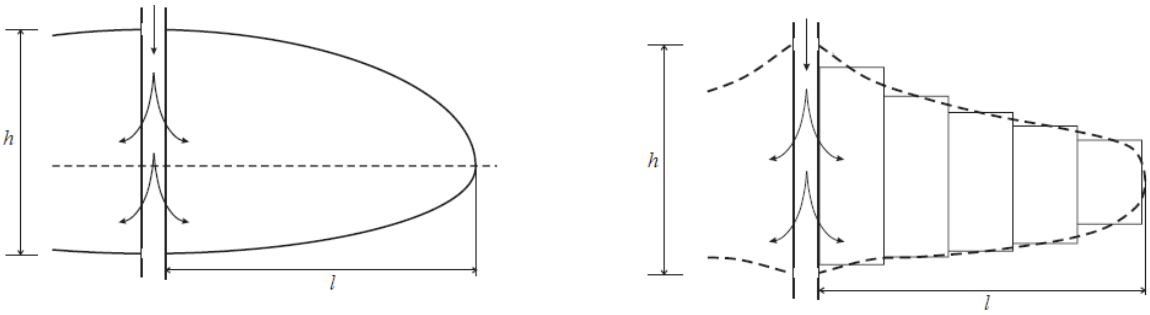


Рисунок 1.1.2. Модель Radial [9]

Существующие модели явно не учитывали слоистость пласта, поэтому на смену моделям PKN, KGD и Radial в 1980-х годах пришел класс моделей Pseudo3D (P3D). Модели P3D при небольших вычислительных затратах давали хорошее представление о возможном развитии трещины. В зависимости от численной реализации существует несколько подвидов модели P3D: Lumped, Cell-based, Semi-analytical. В модели Lumped Pseudo3D (рисунок 1.1.3*а*) геометрия трещины состоит из двух полуэллипсов, соединённых в их центре в направлении длины, которые рассчитываются в каждый момент времени. Поток жидкости ограничен краями эллипсов. В Cell-based Pseudo3D (рисунок 1.1.3*б*) трещина представляется набором PKN ячеек, каждая из которых имеет собственную вычисленную высоту. В semi-analytical Pseudo3D подразумевается сшивка аналитических решений. Например, можно найти профиль раскрытия трещины по высоте с помощью точного аналитического решения, определить высоту посредством критерия Ирвина, а сшивку провести по эффективному давлению [5].



(*а*) (*б*)

Рисунок 1.1.3. Модель Lumped Pseudo3D (*а*) и модель Cell-based Pseudo3D (*б*) [9]

В 1980-2000 годы были разработаны Planar3D модели (PL3D). В моделях PL3D (рисунок 1.1.4), в отличие от других моделей, изначально полагается двумерность потока вдоль трещины. Плоскость разрыва, как правило, моделируется движущейся треугольной сеткой или фиксированной прямоугольной сеткой. Полные трехмерные уравнения упругости используются для описания раскрытия трещины как функции давления жидкости. Несмотря на то, что модели PL3D уступают в скорости вычислений моделям P3D, они являются более точными, позволяют корректно решать задачу о переносе проппанта и распределении его в трещине, а также позволяют рассчитать случаи, где форма разрыва принимает вид «песочных часов» (например, когда средний слой в трехслойном пласте имеет большее сжимающее напряжение, чем в верхнем и нижнем слоях).

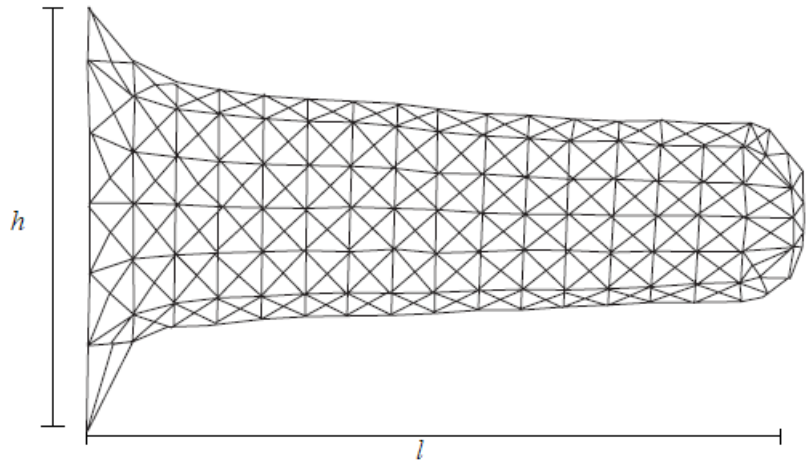


Рисунок 1.1.4. Модель Planar3D [9]

С ограниченным успехом предпринимались попытки смоделировать полностью трехмерный гидроразрыв. Такие модели называются Full3D (рисунок 1.1.5). Вычислительная нагрузка в симуляторах с такими моделями крайне высока [9].

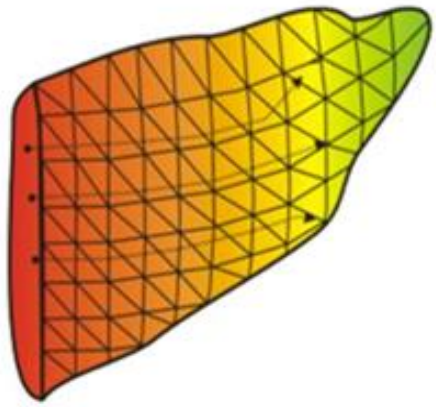


Рисунок 1.1.5. Модель Full3D [10]

1.2 Постановка задачи

В данной работе проверяется корректность реализации физико-математической трехмерной модели Planar3D в симуляторе ГРП, разработанном в научно-образовательном центре «Газпромнефть-Политех». Корректность проверяется набором тестов на трехслойном симметричном пласте с одинаковыми упругими модулями в каждом из слоёв (рисунок 1.2.1). Сжимающие напряжения в продуктивном слое задаются меньше, чем в барьерах (верхнем и нижнем слоях). Рассматривается только ньютоновская жидкость гидроразрыва. Анализ проводится для обезразмеренных параметров.

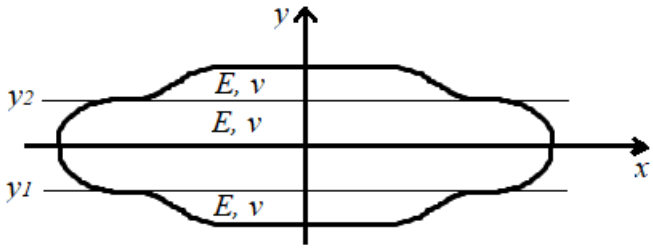


Рисунок 1.2.1. Трёхслойный симметричный пласт с одинаковыми упругими модулями по слоям. Зона между y_1 и y_2 является продуктивным слоем, полубесконечные зоны над y_2 и под y_1 – барьеры

Методика проверки основных допущений модели Planar3D (деформирование пласта описывается линейной теорией упругости, перенос жидкости в трещине описывается уравнением теории смазки и утечки

представляются законом утечек Картера) заключается в проведении тестов на погрешность симулятора ГРП, на предельные переходы и на утечки.

Для программной визуализации полученных результатов использовалась библиотека Matplotlib высокоуровневого языка программирования Python 3.

1.3 Предположения модели

В модели Planar3D используется некоторое количество предположений. Пласт представляется набором однородных и изотропных по механическим свойствам слоев. Будем полагать, что слои расположены параллельно друг другу, хотя в действительности встречаются более сложные ситуации [16]. В каждом слое задаются: сжимающее напряжение, упругие модули и коэффициент утечек Картера. Трещина распространяется вдоль плоскости, перпендикулярной минимальному сжимающему напряжению. Поток жидкости в трещине подчиняется уравнениям теории смазки, жидкость несжимаема. Кроме того, жидкость обладает степенной реологией, сила тяжести не учитывается. Материал пласта считается линейно-упругим. Скважина является точечным источником. Трещина распространяется без лага (фронты трещины и жидкости совпадают) [2]. Вместе с тем, лабораторные эксперименты показали, что фронт жидкости и фронт трещины могут не совпадать. В самом деле, трещина может двигаться впереди жидкости, и в этом случае существует «задержка жидкости» [13]. Величина этого эффекта в росте трещины является темой продолжающихся дискуссий. В проверяемой модели учет положения фронта происходит с применением универсальных асимптотик, из-за чего возможная разница в положениях фронтов является малой величиной относительно размера расчетной ячейки.

Реализация модели не учитывает, помимо непараллельности слоев и неидеальности прилегания слоев друг к другу, также следующие дополнительные эффекты: пласт может быть естественно разрушен; рост трещины может сопровождаться сдвигом породы; из-за пороупругих воздействий соседних добывающих скважин фактический коллектор может содержать неоднородное поле напряжений; модель реологии жидкости может быть сложнее, нежели степенная (может учитываться вязкоупругость и т.п.). Применяя модель утечек Картера, мы также полагаем, что утечки распространяются в пласт перпендикулярно трещине. Это приближение оправдано, если трещина распространяется достаточно быстро. Тогда неортогональная утечка незначительна. Кроме того, утечка может являться сложным процессом и быть чувствительной к температуре и давлению, а также зависеть от свойств жидкости. Некоторые эффекты, связанные с переносом проппанта, могут упрощаться или игнорироваться. Например, взаимодействие и столкновение частиц проппанта между собой, перемещение проппанта, вызванное сдвигом и т. п. [9].

1.4 Уравнения, используемые в модели

В качестве основных уравнений, используемых в модели Planar3D, принимаются: закон сохранения массы в трещине, уравнения упругости, уравнение теории смазки, модель утечек жидкости в пласт.

Закон сохранения массы жидкости при течении в трещине является двумерным уравнением:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} + q_l = q_i, \tag{1}$$

где w – раскрытие трещины, $\vec{q}$ – двумерный поток жидкости вдоль трещины, q_l – стоковый член (одномерный поток утечек), q_i – поток жидкости со скважины, который задается с помощью дельта-функции по пространству.

В качестве утечек принимается модель утечек Картера, которая предполагает, что жидкость не фильтруется далеко в ходе ГРП:

$$q_l(x, y, t) = \frac{2C_l}{\sqrt{t - t_{act}}}. \tag{2}$$

Здесь C_l – коэффициент утечек Картера, t_{act} – время активации, соответствующее моменту прохождения фронта трещины через точку (x, y).

Уравнением теории смазки является условие на поток $\vec{q}$, выражающееся в виде формулы Пуазейля для течения в плоско-параллельном канале:

$$\vec{q}|\vec{q}|^{n-1} = -\frac{1}{\psi\mu} w^{2n+1} \nabla p;\ \psi = \frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n}, \tag{3}$$

где n – показатель степени в реологическом законе жидкости ГРП, μ – динамическая вязкость.

Уравнения упругости используются для определения связи раскрытия трещины с эффективным (чистым) давлением в каждой точке зоны разрыва:

$$p_{net} = p(x, y) - \sigma(y) = \iint_{\Omega} G(\vec{r} - \vec{r}\,')w(\vec{r}\,')\mathrm{d}S'(\vec{r}\,'), \tag{4}$$

где p_{net} – эффективное давление гидроразрыва, $p(x, y)$ – давление в точке с координатами (x, y), $\sigma(y)$ – сжимающие пластовые напряжения в направлении, перпендикулярном плоскости трещины (давление смыкания трещины), dS' – элементарная площадка, $\vec{r} - \vec{r}\,'$ – вектор из точки наблюдения в точку приложения силы.

Функция Грина для однородной упругой среды определяется следующим образом:

$$G(\vec{r} - \vec{r}\,') = \frac{E'}{8\pi|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}, \tag{5}$$

где $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$ – плоский модуль Юнга (модуль плоской деформации).

Критерий распространения трещины представляет собой особый тип граничного условия, поскольку он практически диктует природу всего решения. Обычно в численных моделях учитывается традиционный критерий теории механики упругого разрушения (то есть трещина распространяется, если коэффициент интенсивности напряжений на кончике трещины соответствует трещиностойкости). Физически он сводится к критерию прочности Гриффитса-Ирвина на постоянство затрат энергии δW на разрыв единицы площади δS:

$$\delta W = \frac{K_{Ic}^2}{E'} \delta S. \tag{6}$$

Здесь K_{Ic} – трещиностойкость породы.

Уравнения упругости, потока жидкости, утечки и роста трещины представляют собой полную систему уравнений, если на поверхности трещины обеспечивается равенство перпендикулярных напряжений и давления жидкости гидроразрыва.

Также необходимо поставить граничные условия. На границе трещины определяется граничное условие нулевого потока жидкости. Данное граничное условие справедливо только в условиях отсутствия лага. Внешние напряжения в породе на бесконечности изменяются только с координатой y: $\sigma = \sigma\,(y)$. Используется симметрия левого и правого крыльев трещины.

За начальное условие примем автомодельное решение для трещины в однородной среде. Причем время формирования решения выберем таким, чтобы фронт трещины не достиг границ продуктивного слоя.

Система уравнений решается с помощью явной схемы интегрирования с использованием пространственной дискретизации с фиксированным размером ячейки [2].

1.5 Обезразмеривание уравнений

Частичное или полное избавление от единиц измерения в уравнениях, содержащих физические величины, называется обезразмериванием. Обезразмеривание осуществляется путем замены переменных. Оно производится по нескольким причинам. Во-первых, сокращается общее число независимых параметров, что упрощает задачу моделирования. Например, при многослойном моделировании ГРП количество размерных параметров многократно увеличивается при добавлении каждого слоя, а всего слоев, задаваемых в симуляторе ГРП, может быть до 200 и более [6]. Во-вторых, одна решенная задача в безразмерных параметрах соответствует целому классу размерных задач. Обезразмеривание дает безразмерные комбинации параметров, которые фактически определяют категорию, к которой будет принадлежать решение задачи. Кроме того, в процессе обезразмеривания обычно преследуют цель добиться обезразмеренных параметров одного порядка. Этого добиваются для сохранения точности при машинном счете, а так же для удобства восприятия результатов.

После сравнения различных методик обезразмеривания для рассматриваемой модели [6, 8] была выбрана следующая параметризация для случая трехслойной среды с постоянной закачкой жидкости:

$$p_o = \frac{p_{net}}{\Delta\sigma}; L_o = \frac{L}{H};\ h_o = \frac{h}{H};\ w_o = w\frac{E'}{\Delta\sigma H}, \tag{7}$$

$$F = \frac{H^{3n}\Delta\sigma^{2n+2}}{\mu E'^{\,2n+1}Q^n} = \frac{1}{\gamma}, \tag{8}$$

$$V_o = V\frac{E'}{H^3\Delta\sigma}, \tag{9}$$

$$C_o = C_l\left(\frac{HE'}{Q\Delta\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

$$t_o = t\frac{E'Q}{H^3\Delta\sigma}. \tag{11}$$

Здесь F – фактор формы; H – толщина продуктивного слоя; L – длина трещины; h – высота трещины; Q – постоянный расход жидкости ГРП; $\Delta\sigma$ – контраст напряжений между слоями.

Физический смысл безразмерного параметра F заключается в отношении толщины пласта к характерной достижимой длине трещины. Таким образом, каждому параметру F присваивается семейство эволюции формы трещины. Чем больше параметр F, тем длиннее трещина и тем сложнее ей проникать из продуктивного слоя в барьеры.

Безразмерный параметр C_o характеризует эффективность жидкости ГРП. Чем он выше, тем больше жидкости уходит в пласт.

Можно заметить, что безразмерное время t_o соответствует безразмерному объему закачанной жидкости V_o:

$$V = Qt = V_o\frac{H^3\Delta\sigma}{E'} = t_o\frac{H^3\Delta\sigma}{E'Q}Q \Rightarrow V_o = t_o. \tag{12}$$

Получим интегрально-дифференциальное уравнение для безразмерного раскрытия w_o для трехслойной среды с постоянным реологическим коэффициентом закачиваемой жидкости. Для этого подставим в уравнение (4) уравнения (7), тем самым обезразмерив его:

$$p_o = \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{w_o(\vec{r}_o')\mathrm{d}S_o'}{|\vec{r}_o - \vec{r}_o'|^3}. \tag{13}$$

Аналогично обезразмерим уравнение Пуазейля (3), выражая параметры через безразмерные параметры уравнений (7):

$$\vec{q}|\vec{q}|^{n-1} = -\frac{\Delta\sigma}{\psi\mu H}\left(\frac{\Delta\sigma H}{E'}\right)^{2n+1} w_o^{2n+1}\nabla_o(p_o + \sigma_o). \tag{14}$$

Уравнение утечек (2) обезразмеривается схожим образом с помощью уравнений (10) и (11):

$$q_l = \frac{Q}{H^2}\frac{2C_o}{\sqrt{t_o - t_{act\ o}}}, \tag{15}$$

где $t_{act\ o}$ – безразмерное время активации.

Первое слагаемое в законе сохранения массы жидкости (1), которое отвечает за скорость раскрытия трещины, обезразмеривается с учетом уравнений (7) и (11) следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{Q}{H^2}\frac{\partial w_o}{\partial t_o}. \tag{16}$$

Обезразмеривание второго слагаемого в законе сохранения массы (1), отвечающего за перенос жидкости в трещине, выполняем с помощью уравнений (7) и обезразмеренного уравнения Пуазейля (14):

$$\nabla \cdot \vec{q} = -\left(\frac{\Delta\sigma^{2n+2}H^n}{\psi\mu E'^{\,2n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} \nabla_o \cdot \left(\nabla_o(p_o + \sigma_o)|\nabla_o p_o + \nabla_o \sigma_o|^{\frac{1}{n}-1} w_o^{\frac{1}{n}+2}\right). \tag{17}$$

Подставим уравнения (15), (16) и (17) в закон сохранения массы (1), заменяя безразмерное время t_o на безразмерный объем V_o в соответствии с уравнением (12). Домножим полученное уравнение на $\left(\frac{\mu E'^{\,2n+1}}{\Delta\sigma^{2n+2}H^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ и подставим обратную величину к фактору формы γ из уравнения (8). В результате первое слагаемое уравнения баланса массы принимает вид:

$$S_1 = \frac{\partial w_o}{\partial V_o}\gamma^{\frac{1}{n}}. \tag{18}$$

Второе слагаемое уравнение баланса массы записывается следующим образом:

$$S_2 = -\left(\frac{1}{\psi}\right)^{\frac{1}{n}} \nabla_o \cdot \left(\nabla_o(p_o + \sigma_o)|\nabla_o p_o + \nabla_o \sigma_o|^{\frac{1}{n}-1} w_o^{\frac{1}{n}+2}\right), \tag{19}$$

где связь обезразмеренного эффективного давления p_o с обезразмеренным раскрытием w_o показана в уравнении (13).

В результате получим интегрально-дифференциальное уравнение для безразмерного раскрытия w_o:

$$S_1 + S_2 + \gamma^{\frac{1}{n}} \frac{2C_o}{\sqrt{V_o - V_{act\ o}}} = \gamma^{\frac{1}{n}} \delta(\vec{r}_o). \tag{20}$$

Таким образом, безразмерное раскрытие трещины зависит от следующих параметров:

$$w_o = w_o(\gamma, n, L_o, h_o, V_o, C_o, \sigma_o, V_{act\ o}). \tag{21}$$

Безразмерный параметр γ, который является параметром обратным фактору формы F, оказывает существенное влияние на решение уравнения (20) и является значимым параметром для безразмерной функции раскрытия (21). На рисунке 1.5.1, рисунке 1.5.2 и рисунке 1.5.3 изображены контрасты напряжений по слоям, зависимости высоты трещины от ее раскрытия в плоскости перпендикулярной точечному источнику, а также зависимости высоты трещины от ее полудлины и раскрытия. Как видно из этих рисунков дизайн трещины сильно зависит от фактора формы F. При факторе формы $F = 10^{-2}$ (рисунок 1.5.1) трещина имеет практически радиальную форму. При большом факторе формы $F = 10^4$ (рисунок 1.5.3) трещина сильно вытянута в длину и практически не выходит за пределы продуктивного слоя. Тем самым реализуется дизайн, описываемый моделью PKN.

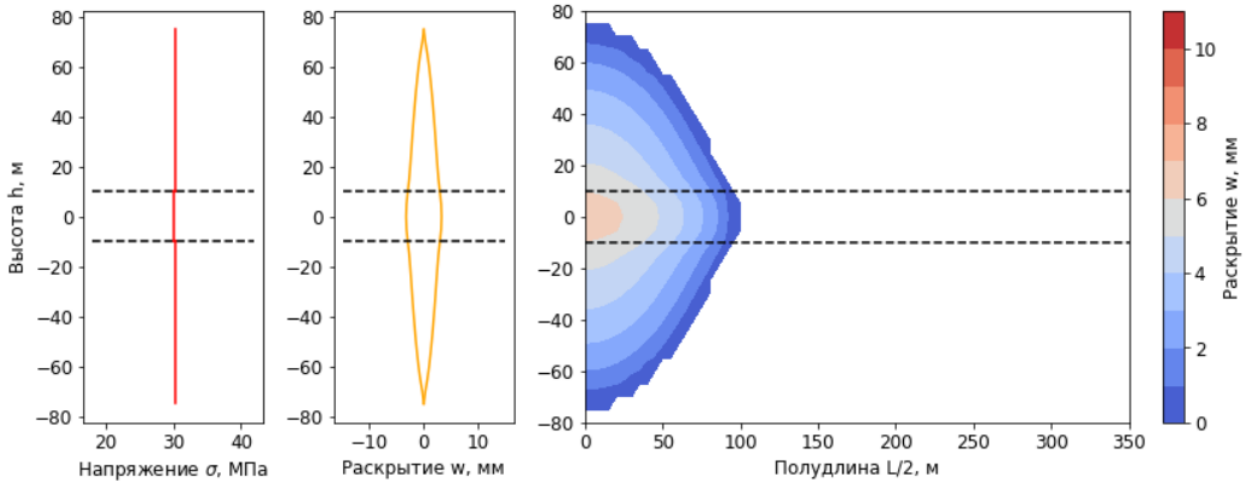


Рисунок 1.5.1. Данные литологии и раскрытия (F = 10^{-2})

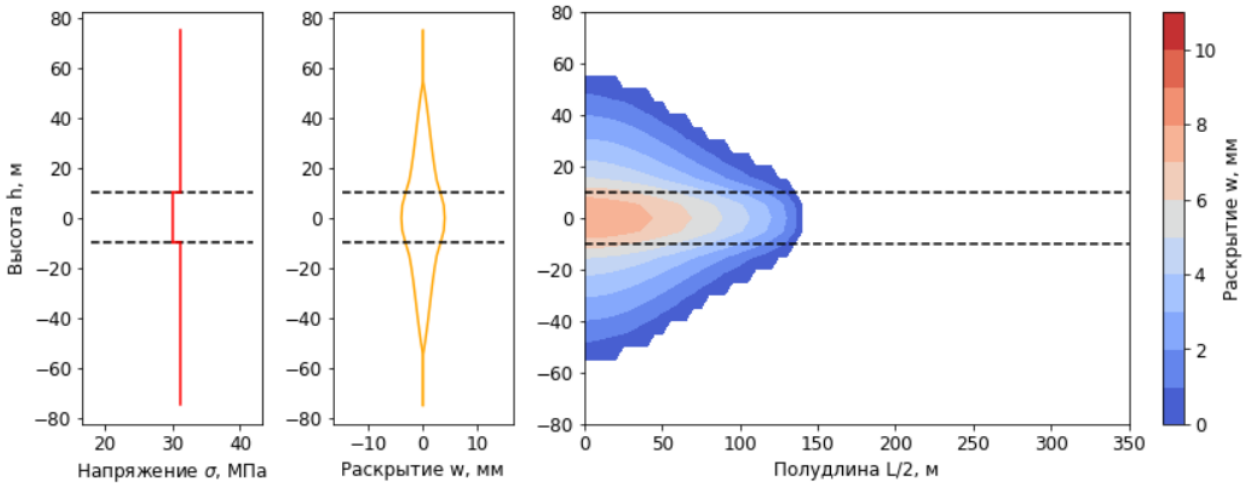


Рисунок 1.5.2. Данные литологии и раскрытия (F = 1)

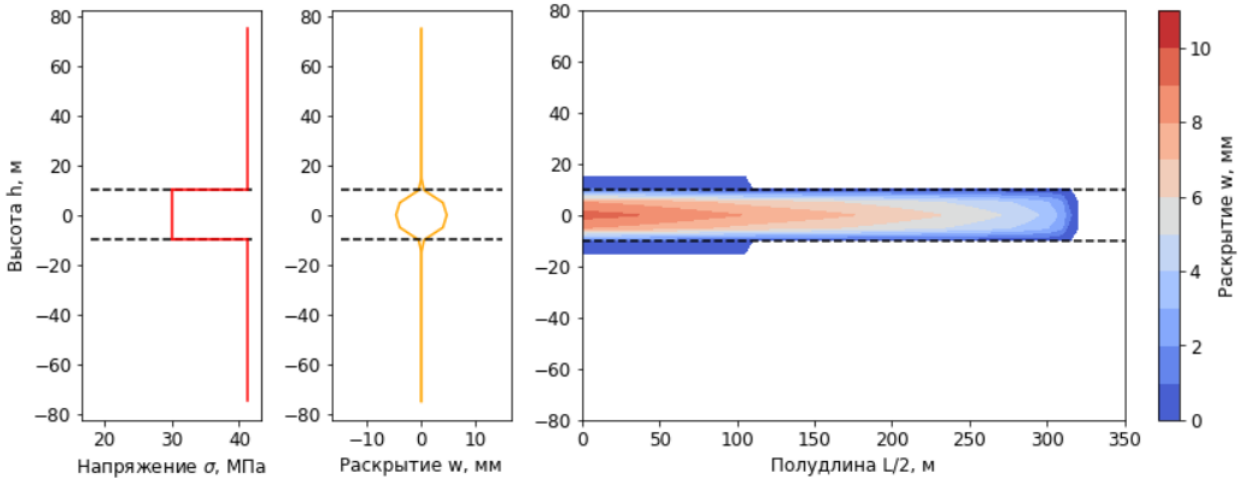


Рисунок 1.5.3. Данные литологии и раскрытия (F = 10^{4})

1.6 Методика проведения тестов

Методика проверки корректности реализации физико-математической модели Planar3D представляет собой набор тестов, которые проверяют различные аспекты моделирования ГРП. За основу взята методика, которая была описана в статье [4]. Все получаемые зависимости аппроксимируются степенной функцией вида:

$$y = ax^b \tag{22}$$

Первый тест отвечает за погрешность численной схемы. Строятся графики зависимости обезразмеренной длины от обезразмеренного объема. Относительное расхождение кривых с одинаковым фактором формы F является относительной погрешностью при выбранной сетке.

Если симулятор прошёл первый тест, то проводится второй – тест на предельные переходы. Аналогично предыдущему тесту строятся графики обезразмеренной длины L_o от обезразмеренного объема V_o. Однако теперь размерные параметры варьируются так, чтобы фактор формы принимал различные значения в пределах от 10^{-2} до 10^4. Таким образом, формы трещины меняются от круглой модели Radial до прямоугольной модели PKN.

Согласно статьям [4, 15] показатель b в степенной аппроксимации (22) равен $\frac{4}{5}$ для модели PKN и $\frac{4}{9}$ для модели Radial, поэтому параметр b должен лежать в пределах:

$$\frac{4}{9} \leq b \leq \frac{4}{5}. \tag{23}$$

Для лучшего представления результатов построим график логарифма обезразмеренной длины от логарифма обезразмеренного объема.

Аналогично рассуждая, построим также график логарифма обезразмеренной высоты h_o от логарифма обезразмеренного объема, деленного на фактор формы $\frac{V_o}{F}$. Тогда параметр b для модели Radial равен $\frac{4}{9}$, а

для модели PKN равен нулю, потому что в модели PKN отсутствует рост трещины в высоту. В таком случае параметр b должен лежать в пределах:

$$0 \leq b \leq \frac{4}{9}. \tag{24}$$

При положительном результате предыдущих тестов проводится тест на утечки. Геомеханические параметры в каждом эксперименте в тесте следует брать одинаковые. Трещина должна быть похожа на трещину, возникающую в модели PKN, то есть иметь прямоугольную форму. Безразмерный параметр утечек C_o следует варьировать от 0.1 до 1 с шагом 0.1.

Введем безразмерную функцию, которая характеризует долю утекшей жидкости:

$$f(V_o) = \frac{1-\eta}{4C_o L_o}. \tag{25}$$

Запишем безразмерную функцию (25) в размерных параметрах в правой части при помощи уравнений (7) и (10):

$$f(V_o) = \frac{(1-\eta)\sqrt{HQ\Delta\sigma}}{4C_l L\sqrt{E'}}, \tag{26}$$

где η – эффективность жидкости гидроразрыва пласта, которая равна отношению объема жидкости в трещине к общему объему жидкости, закачиваемому в трещину.

Длина трещины в модели PKN [12]:

$$L = \frac{Q\sqrt{t}}{2\pi C_l H}. \tag{27}$$

Подставляя уравнение (27) в уравнение (26) и приведя подобные, получаем:

$$f(V_o) = \frac{\pi(1-\eta)\sqrt{H^3\Delta\sigma}}{2\sqrt{E'Qt}}. \tag{28}$$

Ввиду постоянства скорости закачки жидкости подставим $V = Qt$ и обезразмерим его согласно формуле (9):

$$f(V_o) = \frac{\pi}{2}(1-\eta)V_o^{-\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

$$f(V_o) \sim V_o^{-\frac{1}{2}}. \tag{30}$$

Таким образом, безразмерная функция $f(V_o)$ пропорциональна $V_o^{-\frac{1}{2}}$ и не зависит от коэффициента утечек Картера C_l. Следовательно, зависимость (30) должна наблюдаться для каждого эксперимента в тесте. Для лучшей наглядности можно построить логарифмы от этих величин.

ГЛАВА 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Все эксперименты, которые проводились в симуляторе ГРП, проводились в условиях трехслойной симметричной среды. Закачивалась ньютоновская жидкость без проппанта.

2.1 Пример расчёта

Произведем качественное сравнение результатов симулятора ГРП с моделью Planar3D, разработанного в научно-образовательном центре «Газпромнефть-Политех», с результатами, посчитанными в симуляторах с моделями EP3D (улучшенной моделью Pseudo3D) и ILSA (моделью Planar3D с использованием неявной схемы интегрирования), опубликованными в статье [11].

Для расчета использовалась жидкость закачки с динамической вязкостью μ = 30.2 Па·с. Контраст напряжений составлял $\Delta\sigma$ = 4.3 МПа, скорость закачки Q = 1.7 мм^3/с. Упругие модули пласта задавались следующие: модуль Юнга E = 3.3 ГПа и коэффициент Пуассона ν = 0.4. Толщина продуктивного слоя равнялась H = 0.05 м. Время моделирования составляло 10 минут. Утечки в пласт не учитывались. Зависимости, полученные в ходе расчета, эффективного давления от полудлины, эффективного давления от высоты, раскрытия от полудлины и раскрытия от высоты в плоскостях, проходящих через источник, представлены на рисунке 2.1.1. Сплошными линиями изображены результаты расчета в модели ILSA, пунктирными – в модели EP3D, а точками – в симуляторе с моделью Planar3D, разработанном в «Газпромнефть-Политех». Черной вертикальной линией изображена граница продуктивного слоя.

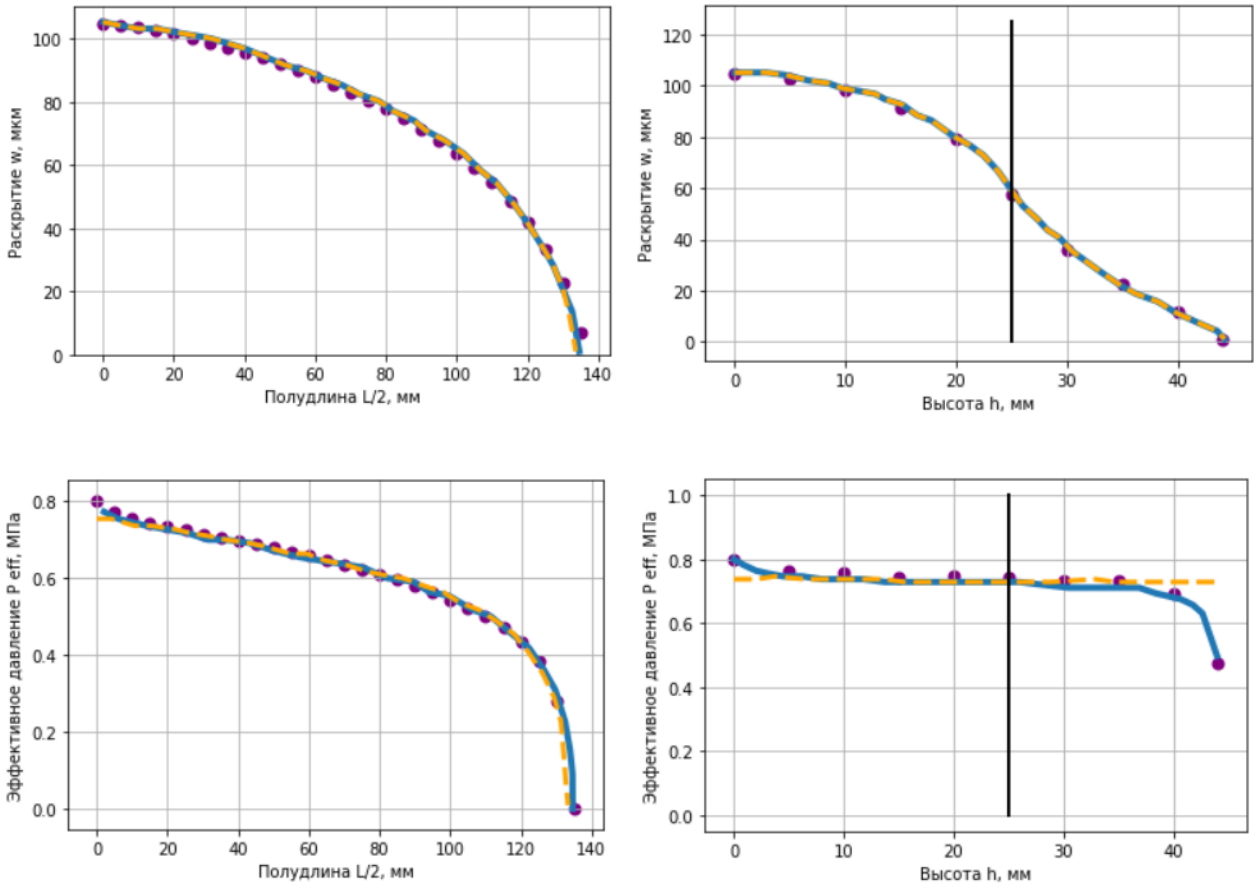


Рисунок 2.1.1. Профили раскрытия (сверху) и давления (снизу) в сечениях, проходящих через источник. Сплошной линией изображены зависимости, построенные в модели ILSA, пунктирной – в модели EP3D [11], точками – в исследуемом симуляторе ГРП.

Результаты, построенные в исследуемом симуляторе ГРП, качественно и количественно согласуются с результатами, полученными на моделях ILSA и EP3D.

2.2 Тест на погрешность симулятора ГРП

В первом тесте на погрешность симулятора ГРП использовалась жидкость с динамической вязкостью μ = 30.2 Па·с. Высота продуктивного слоя составляла H = 0.05 м. Упругие модули пласта задавались следующие: модуль Юнга E = 7.9 ГПа и коэффициент Пуассона ν = 0.4. Время моделирования составляло 60 минут. Утечки не учитывались. Контраст напряжений составлял от 2.87 до 6.45 МПа для случая F = 1 и от 5.1 до 11.47

МПа для случая F = 10. Жидкость закачивалась с расходом от $20.15 \cdot 10^{-9}$ до $516.38 \cdot 10^{-9}$ м^3/мин для F = 1 и для F = 10. Эти данные, а также показатель аппроксимирующей степенной функции b, представлены в таблице 2.2.1 для F = 1 и в таблице 2.2.2 для F = 10. Графики зависимости безразмерной длины от безразмерного объема для F = 1 и F = 10 изображены соответственно на рисунке 2.2.1 и рисунке 2.2.2.

Таблица 2.2.1. Зависимость показателя степенной аппроксимации от скорости закачки и контраста напряжений (F = 1)

Эксперимент	$\Delta\sigma$, МПа	$Q \cdot 10^{-9}$, м^3/мин	b
1	2.87	20.15	0.608
2	4.3	102	0.587
3	6.45	516.38	0.573

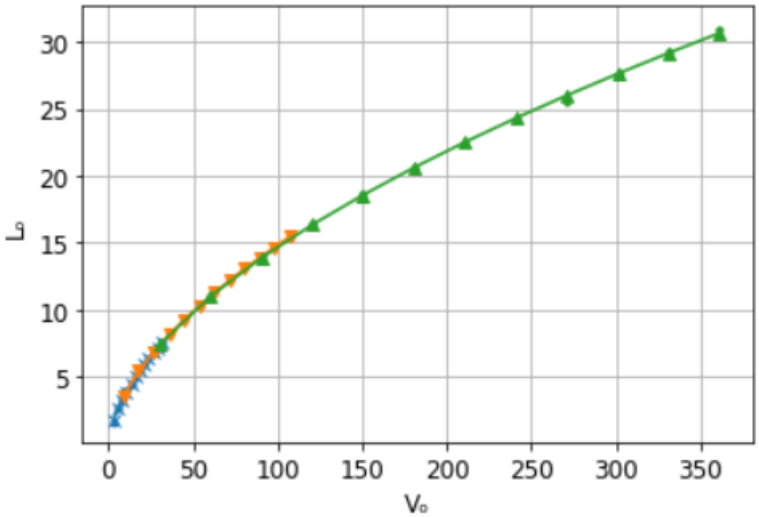


Рисунок 2.2.1. Зависимость безразмерной длины от безразмерного объема трещины (F = 1)

Таблица 2.2.2. Зависимость показателя степенной аппроксимации от скорости закачки и контраста напряжений (F = 10)

Эксперимент	$\Delta\sigma$, МПа	$Q \cdot 10^{-9}$, м^3/мин	b
1	5.1	20.15	0.691
2	7.65	102	0.681
3	11.47	516.38	0.679

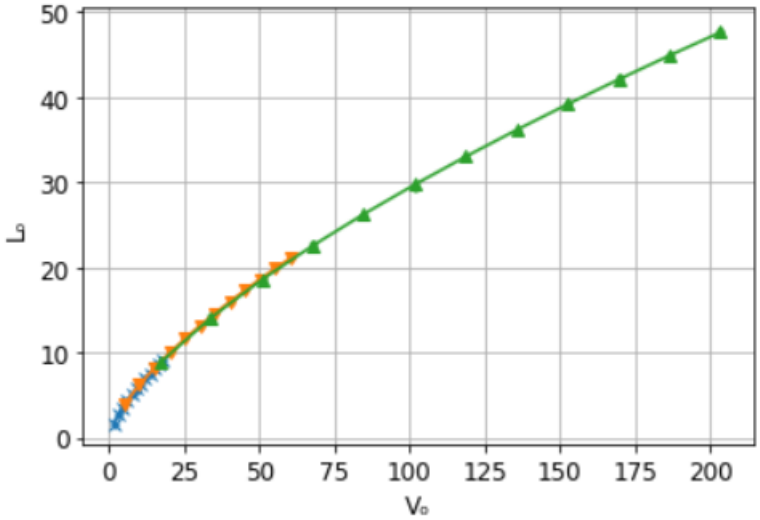


Рисунок 2.2.2. Зависимость безразмерной длины от безразмерного объема трещины (F = 10)

Для обоих случаев ($F = 1$ и $F = 10$) максимальное расхождение параметра аппроксимации b для кривых с одинаковым фактором формы невелико и составляет 6.1% для $F = 1$ и 1.8% для $F = 10$ и, как видно из рисунка 2.2.1 и рисунка 2.2.2, кривые с одним и тем же F «накладываются» друг на друга. Это означает, что симулятор обладает приемлемой погрешностью численной схемы.

2.3 Тест на предельные переходы

Во втором тесте на предельные переходы симулятора ГРП применялась жидкость с динамической вязкостью μ = 0.3 Па·с. Продуктивный слой имел высоту H = 20 м. Модуль Юнга составлял E = 13.13 ГПа, а коэффициент Пуассона – ν = 0.2. Расход жидкости был равен Q = 1 м^3/мин. Разность сжимающих напряжений изменялась в пределах от 0.359 до 11.245 МПа. Утечки в пласт не учитывались. Закачка производилась 60 минут. Изменения контраста напряжений, фактора формы, а также значения коэффициента аппроксимации b указаны в таблице 2.3.1 при измерении длины трещины и в таблице 2.3.2 при измерении высоты. Графики зависимости безразмерной длины от безразмерного объёма и логарифма от этих величин показаны на

рисунке 2.3.1 и рисунке 2.3.2, а на рисунке 2.3.3 – зависимость логарифма безразмерной высоты от логарифма безразмерного объема, деленного на фактор формы.

Таблица 2.3.1. Зависимость коэффициента степенной аппроксимации b от фактора формы F при измерении длины трещины

Эксперимент	$\Delta\sigma$, МПа	F	b
1	0.359	0.01	0.485
2	0.64	0.1	0.521
3	1.125	1	0.591
4	2	10	0.678
5	3.56	100	0.747
6	6.324	1000	0.758
7	11.245	10000	0.8

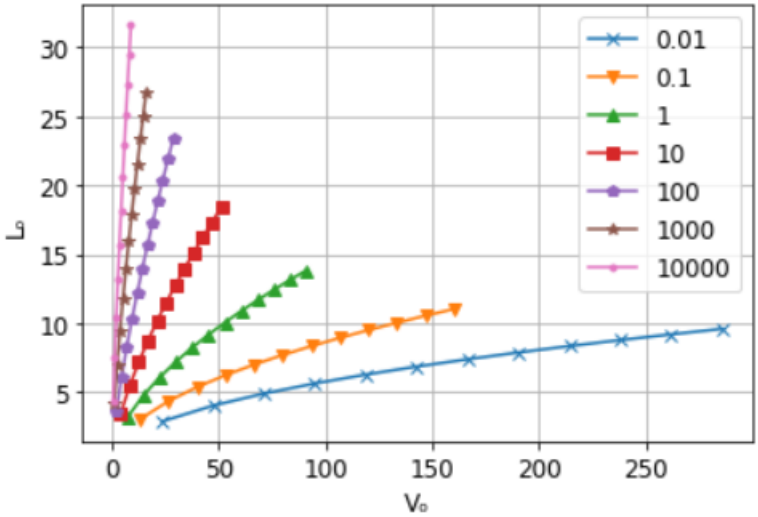


Рисунок 2.3.1. Зависимость обезразмеренной длины от обезразмеренного объема для разных факторов форм

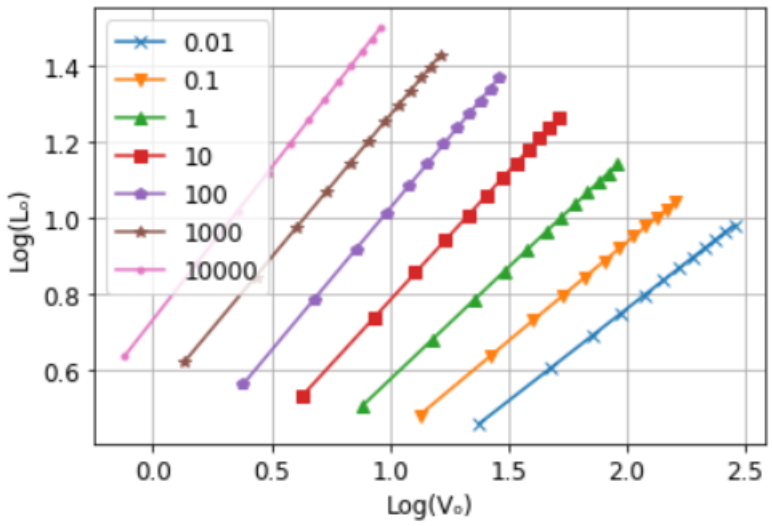


Рисунок 2.3.2. Зависимость логарифма обезразмеренной длины от логарифма обезразмеренного объема для разных факторов форм

Таблица 2.3.2. Зависимость коэффициента степенной аппроксимации b от фактора формы F при измерении высоты трещины

Эксперимент	$\Delta\sigma$, МПа	F	b
1	0.359	0.01	0
2	0.64	0.1	0.072
3	1.125	1	0.155
4	2	10	0.283
5	3.56	100	0.382
6	6.324	1000	0.421
7	11.245	10000	0.432

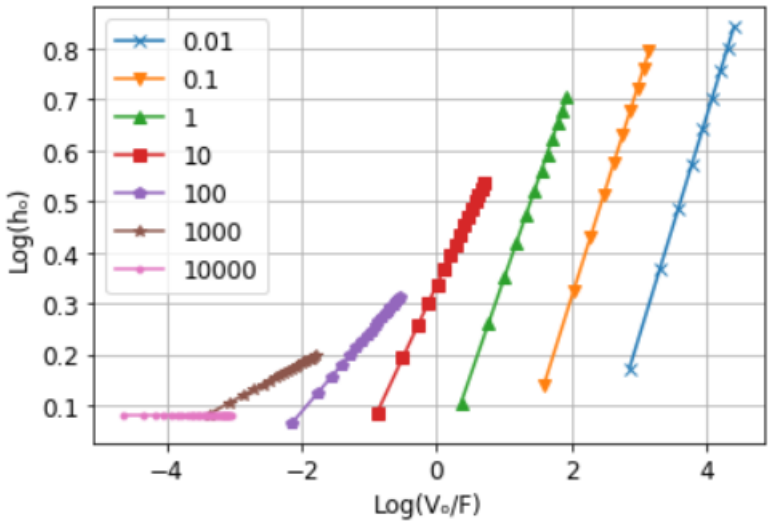


Рисунок 2.3.3. Зависимость логарифма обезразмеренной высоты от логарифма обезразмеренного объема, деленного на фактор формы, для разных факторов форм

Исходя из данных таблицы 2.3.1, можно сделать вывод, что при увеличении фактора формы F параметр b аппроксимации (22) растет, а наклон прямых на рисунке 2.3.2 увеличивается, и они не пересекаются. При наименьшем факторе формы F = 10^{-2} параметр $b = 0.485$ и относительная погрешность равна 9.2%. При факторе формы F = 10^4 параметр $b = 0.8$, а относительная погрешность равна нулю.

Из рисунка 2.3.3 и таблицы 2.3.2 видно, что при увеличении фактора формы F параметр b зависимости логарифма безразмерной высоты от логарифма безразмерного объема, деленного на фактор формы, уменьшается вплоть до нуля (при F = 10^4). При дизайне приближенном к модели Radial параметр $b = 0.432$, а относительная погрешность равна 2.8%.

Таким образом, симулятор хорошо прогнозирует геометрические размеры трещины, если они близки к модели PKN и с небольшой погрешностью, если дизайн похож на радиальную трещину. Исходя из этого можно заключить, что уравнения упругости (4) и уравнения смазки (3) в симуляторе реализованы верно.

2.4 Тест на утечки

В третьем тесте – на верность реализации эмпирического закона Картера – варьировался лишь коэффициент утечек в пределах от 340 до 3400 мкм/с$^{1/2}$. Геомеханические параметры для всех экспериментов в тесте были одни и те же. Использовалась жидкость с динамической вязкостью μ = 0.04 Па·с. Высота слоя, в который происходила закачка жидкости точечным источником, H = 5 м. Модуль Юнга в каждом слое E = 25 ГПа, а коэффициент Пуассона ν = 0.25. Постоянный расход жидкости составлял Q = 6 м^3/мин. Разность минимальных сжимающих напряжений между барьером и продуктивным слоем составляла $\Delta\sigma$ = 16 МПа. Процесс закачки длился 10 минут. Коэффициент утечек Картера, эффективность жидкости

ГРП, а также коэффициент аппроксимации степенной функции b представлены в таблице 2.4.1. Графики зависимости безразмерной функции (25) от безразмерного объема, деленного на фактор формы, логарифма от этих величин, а также отдельный случай для $C_o = 1$ представлены соответственно на рисунках 2.4.1, 2.4.2 и 2.4.3.

Таблица 2.4.1. Зависимость показателя степенной аппроксимации от коэффициента утечек Картера

Эксперимент	η	C, мкм/с$^{1/2}$	$\tilde{C}$	b
1	0.22	340	0.1	-0.536
2	0.122	680	0.2	-0.499
3	0.081	1020	0.3	-0.493
4	0.062	1340	0.4	-0.493
5	0.049	1700	0.5	-0.491
6	0.041	2040	0.6	-0.485
7	0.034	2380	0.7	-0.476
8	0.03	2720	0.8	-0.469
9	0.026	3060	0.9	-0.467
10	0.023	3400	1	-0.464

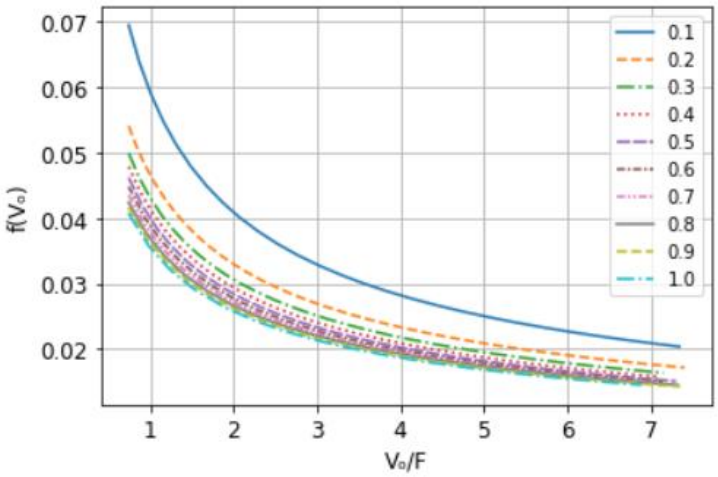


Рисунок 2.4.1. Зависимость безразмерной функции (25) от безразмерного объема, деленного на фактор формы при разных значениях безразмерного коэффициента Картера

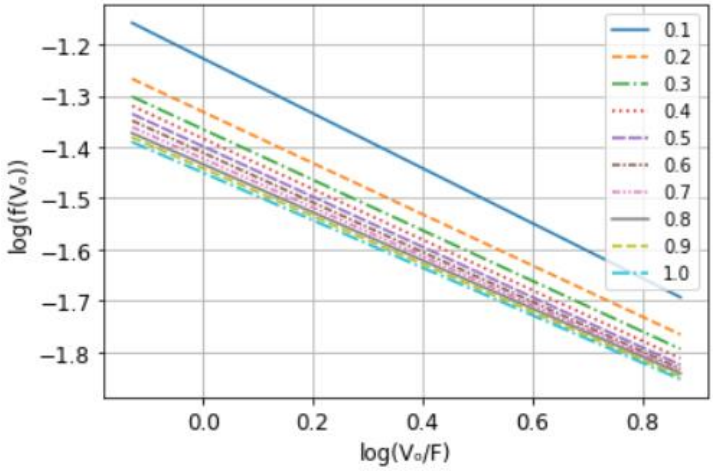


Рисунок 2.4.2. Зависимость логарифма безразмерной функции (25) от логарифма безразмерного объема, деленного на фактор формы, при разных значениях безразмерного коэффициента Картера

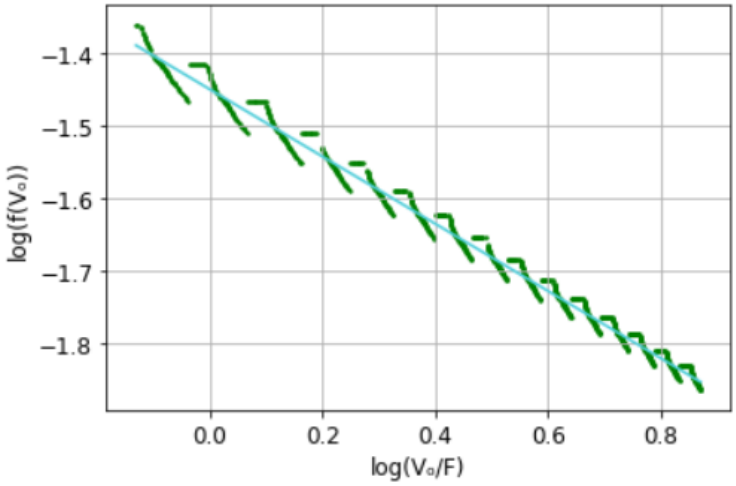


Рисунок 2.4.3. Зависимость логарифма безразмерной функции (25) от логарифма безразмерного объема, деленного на фактор формы для случая $\tilde{C} = 1$

Поток жидкости гидроразрыва в пласт обычно считается вредным, потому что уменьшается эффективность жидкости гидроразрыва, то есть уменьшается объем трещины [12]. Поэтому правильное моделирование утечки жидкости имеет большое значение при расчете дизайна трещины.

Поскольку геомеханические данные, приведенные ранее, одинаковы для каждого эксперимента в тесте, фактор формы во всех экспериментах постоянен и равен $F = 100$. Следовательно, трещина имеет форму близкую к

прямоугольной, то есть к трещине модели PKN. Значит, зависимость (30) должна выполняться.

Как видно по таблице 2.4.1 и по рисунку 2.4.2, коэффициент b при степенной зависимости для всех расчётов отличается от -0.5 не более чем на 7.2%. К тому же, как видно из рисунка 2.4.3, где зелеными точками обозначены не аппроксимированные данные, зависимость в целом носит колебательный характер относительно прямой линии. Можно утверждать, что зависимость (30) выполняется, и модель утечек в симуляторе реализована верно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была исследована корректность реализации трехмерной модели Planar3D в симуляторе гидроразрыва пласта, созданном в научно-образовательном центре «Газпромнефть-Политех». Была проведена серия компьютерных тестов, направленных на проверку корректности реализации основных допущений модели Planar3D, а именно: деформирование пласта описывается линейной теорией упругости, перенос жидкости в трещине описывается уравнением теории смазки, утечки представляются законом утечек Картера. Кроме того, было выведено интегрально-дифференциальное уравнение для безразмерного раскрытия w_o в трехслойной среде, описанное ранее в статье [6], и обозначен ключевой безразмерный параметр F, в значительной степени характеризующий форму трещины в трехслойной симметричной среде.

Эксперименты проводились для трехслойного симметричного пласта с одинаковыми упругими модулями во всех слоях, поддерживался постоянный расход ньютоновской жидкости в течение всего времени моделирования процесса ГРП.

Первый тест оценивал погрешность симулятора ГРП. Были построены зависимости безразмерной длины от безразмерного объема для факторов формы $F = 1$ и $F = 10$. Для одного и того же фактора формы максимальные расхождения графиков оказались незначительны.

Второй тест оценивал точность предельных переходов при изменении фактора формы от 10^{-2}, что соответствует радиальной трещине, до 10^4, при котором дизайн трещины близок к дизайну в модели PKN. Показатель b степенной зависимости безразмерной длины трещины от безразмерного объема должен лежать в пределах $\frac{4}{9} \leq b \leq \frac{4}{5}$, а для зависимости безразмерной высоты трещины от безразмерного объема, деленного на фактор формы – в пределах $0 \leq b \leq \frac{4}{9}$. Было получено, что симулятор достаточно точно

прогнозирует длину и высоту трещин, когда их развитие описывается моделью PKN. Если геометрические размеры трещины близки к радиальным, то существует небольшая погрешность: в рамках эксперимента она составила 9.2% и 2.8% при расчете длины и высоты трещины соответственно.

Заключительный тест оценивал корректность учета утечек жидкости в пласт. Строились зависимости безразмерной функции $f(V_o) = \frac{1-\eta}{4C_oL_o}$ от безразмерного объема V_o, делённого на фактор формы F. Было выведено, что при одних и тех же геомеханических параметрах моделирования с учетом того, что трещина будет похожа на прямоугольную трещину модели PKN, показатель степени аппроксимации b не должен зависеть от коэффициента утечек Картера C_l и в каждом эксперименте должен быть равен $-\frac{1}{2}$. В результате максимальная погрешность составила 7.2%.

Таким образом, в рамках данной постановки задачи в симуляторе ГРП с моделью Planar3D, реализованной с помощью явной схемы интегрирования, основные допущения модели реализованы верно, что подтверждено серией численных экспериментов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксаков А. В. и др. Корпоративный симулятор гидроразрыва пласта: от математической модели к программной реализации // Нефтяное хозяйство. – 2016. – №11. – С. 35-40.

2. Старобинский Е. Б., Степанов А. Д. Использование явной схемы интегрирования по времени при моделировании гидроразрыва пласта с применением модели Planar3D // PROНЕФТЬ. – 2019. – №2. – С. 15-19.

3. Хасанов М. М. и др. Подходы к моделированию гидроразрыва пласта и направления их развития // Нефтяное хозяйство. – 2017. – №12. – С. 37-41.

4. Шель Е. В., Падерин Г. В., Кабанова П. К. Методика тестирования моделей симулятора гидроразрыва пласта // Нефтяное хозяйство. – 2018. – №12. – С. 42-45.

5. Шель Е. В., Падерин Г. В. Модель для экспресс-оценок дизайна ГРП с использованием приближенного аналитического решения // PROНЕФТЬ. – 2017. – №. 4. – С. 40-43.

6. Шель Е. В., Шаповаленко Н. А. Конечномерная параметризация уравнений и внешних условий в модели гидроразрыва Planar3D в безразмерной постановке // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – 2019. – С. 841-843.

7. Шмелев П. ТРИЗ как объективная реальность // Сибирская нефть – 2018. – №149. – С. 16-23.

8. Adachi J. I., Detournay E., Peirce A. P. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2010. – V. 47. – №. 4. – PP. 625-639.

9. Adachi J. et al. Computer simulation of hydraulic fractures // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2007. – V. 44. – №. 5. – PP. 739-757.

10. AlObaidi K. Induced Fractures Modelling in Reservoir Dynamic Simulators // Master Thesis. – UK: Heriot-Watt University. – 2015. – 96 p.

11. Dontsov E. V., Peirce A. P. An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness // Engineering Fracture Mechanics. – 2015. – V. 142. – PP. 116-139.

12. Economides M. J. et al. Reservoir stimulation. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989. – V. 2.

13. Garagash D. I. Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution // International journal of solids and structures. – 2006. – V. 43. – №. 18-19. – PP. 5811-5835.

14. Linkov A. Bench-mark solution for a penny-shaped hydraulic fracture driven by a thinning fluid // arXiv: 1508.07968 – 2015.

15. Shel E. et al. Retrospective Analysis of Hydrofracturing with the Dimensionless Parameters: Comparing Design and Transient Tests // SPE Russian Petroleum Technology Conference. – Society of Petroleum Engineers, 2018.

16. Starfield A. M., Cundall P. A. Towards a methodology for rock mechanics modelling // International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts. – Pergamon, 1988. – V. 25. – №3. – PP. 99-106.