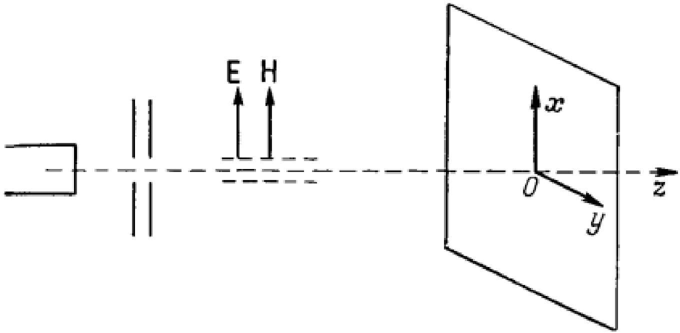
Моделирование движения тела-точки в постоянном электромагнитном поле

Научный руководитель: Иванова.Е. А
Студент: Косолапов Е.С.

Группа 5030103/90101

Актуальность задачи

В начале 20 века были проведены эксперименты Кауфмана. В них изучалась зависимость отклонения электрона в постоянном электромагнитном поле с параллельными векторами напряженности электрического и магнитного поля от начальной скорости. Схематичный эскиз установки изображен ниже.



Актуальность задачи

- **Классическая теория.** Частицы с одинаковым отношением e/m, но с различными скоростями будут распределяться на экране по параболе
$$\frac{y^2}{x} = \mathrm{const},$$
где
$$x = \frac{e}{2m} E \frac{l^2}{v^2}, \; y = \frac{e}{2mc} H \frac{l^2}{v}$$
- **Релятивистская теория.** В этой теории учитывается изменение массы со скоростью. В таком случае распределение на экране будет кривой 4-ого порядка, которая получается при исключении скорости из уравнений
$$x = \frac{e}{2m} E \frac{l^2}{v^2} \sqrt{1-\beta^2}, \; y = \frac{e}{2mc} H \frac{l^2}{v} \sqrt{1-\beta^2}.$$

Актуальность задачи

Эксперименты показали, что нерелятивистские вычисления не согласуются с экспериментальными данными. Тогда как формула, использующая релятивистскую теория, хорошо подтверждается опытом.

Цель работы

Понять, можно ли заменить релятивистскую поправку более сложной механической моделью тела-точки.

Постановка задачи

Дана тело-точка с кинетической энергией

$$K = \frac{1}{2}m\underline{v}\cdot\underline{v} + B\underline{v}\cdot\underline{\omega} + \frac{1}{2}J\underline{\omega}\cdot\underline{\omega}$$

и зарядом q, находящаяся в электромагнитном поле с постоянным вектором напряженности $\underline{E}$ и постоянным вектором напряженности магнитного поля $\underline{H}$ ($\underline{E} \parallel \underline{H}$).
Требуется описать её движение и сравнить с движением материальной точки.

Постановка задачи

Количество движения

$$\underline{K_1} = \frac{\partial K}{\partial \underline{v}} = m\underline{v} + B\underline{\omega}$$

Кинетический момент, вычисленный относительно опорной точки Q

$$\underline{K_2}^Q := (\underline{r} - \underline{r}_Q) \times \frac{\partial K}{\partial \underline{v}} + \frac{\partial K}{\partial \underline{\omega}}$$

Баланс количества движения

$$\dot{\underline{K}}_1 = \underline{F} + \underline{k}_1,$$

где $\underline{F}$ – сила со стороны внешних тел, а $\underline{k}_1$ – подвод количества движения в изучаемое тело. Баланс кинетического момента

$$\dot{\underline{K}}_2 = \underline{M}^Q + \underline{k}_2,$$

где $\underline{M}^Q$ – момент, действующий со стороны внешних тел на изучаемое тело, вычисленный относительно точки Q. $\underline{k}_2$ есть скорость подвода кинетического момента.

Балансовые соотношения

В постановке исходной задачи предполагается, что подвод количества движения и кинетического момента отсутствует

$$\underline{k}_1 = \underline{k}_2 = 0.$$

В качестве опорной точки Q выбирается начало координат.
На тело-точку действует сила Лоренца, равная

$$\underline{F} = q[\underline{E} + \mu_0 \underline{v} \times \underline{H}].$$

q – заряд тела-точки, $\underline{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\underline{v} = \dot{\underline{r}}$ – скорость тела-точки, а $\underline{H}$ – вектор напряженности магнитного поля.

Балансовые соотношения

При сделанных выше предположениях балансовые соотношения примут следующий вид

- Баланс количества движения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m\underline{v} + B\underline{\omega}) = q\left[\underline{E} + \underline{v} \times \mu_0 \underline{H}\right]$$

- Баланс кинетического момента

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\underline{r} \times (m\underline{v} + B\underline{\omega}) + B\underline{v} + J\underline{\omega}\right] = \underline{r} \times q\left[\underline{E} + \underline{v} \times \mu_0 \underline{H}\right]$$

Ход решения

Балансовые уравнения были сведена к следующему векторному уравнению

$$\underline{\dot{v}}\left[B-\frac{mJ}{B}\right]+\underline{v}\times\left[\frac{qJ}{B}\mu_0\underline{H}+q\underline{E}t+q\underline{r}\times\mu_0\underline{H}+\underline{K}_1^{(0)}\right]+\frac{qJ}{B}\underline{E}=0,$$

где $\underline{K}_1^{(0)}=m\underline{v}^{(0)}+B\underline{\omega}^{(0)}$.
Был найден первый интеграл системы

$$|\underline{v}|^2-\frac{2qJ}{mJ-B^2}\underline{E}\cdot\underline{r}=|\underline{v}^{(0)}|^2.$$

Ход решения

- Уравнение интегрировалось с помощью метода Рунге-Кутты 4 порядка.
- Шаг интегрирования подбирается так, чтобы отклонение интеграла движения от постоянного значения должно быть меньше 1 процента.

Выбор начальных условий

Как известно [1], тело-точка при $\underline{E} = \underline{H} = 0$ движется по винтовой линии.

Начальные условия подбираются таким образом, чтобы

- Ось винтовой линии направлена вдоль оси Z.
- Радиус винтовой линии много меньше проходимого расстояния по оси Z.
- Проекция скорости тела-точки на ось Z равнялась некоторой заданной постоянной скорости $v_z^{(0)}$.

[1] – Жилин П.А. Динамика твердого тела: учебное пособие

Случай $\underline{H} = 0$ и $\underline{E} \neq 0$

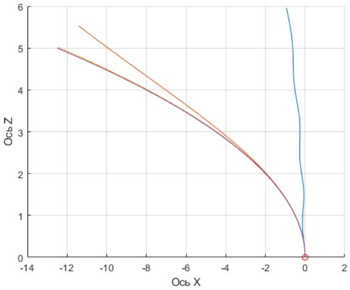


Рис.: Проекция на плоскость XZ

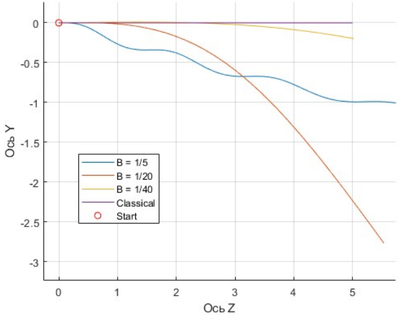


Рис.: Проекция на плоскость YZ

При уменьшении параметра B траектория тела-точки стремится к траектории обычной частицы.
Также при наличии B тело-точка начинает отклоняться вдоль оси Y.

Случай $\underline{H} = 0$ и $\underline{E} \neq 0$

Вопрос

Почему тело-точка начинает отклоняться вдоль оси Y при отсутствии магнитного поля?

Уравнение движения, учитывая, что $\underline{H} = 0$

$$\dot{\underline{v}}[B^2 - mJ] + \underline{v} \times B\left[q\underline{E}t + \underline{K}_1^{(0)}\right] + qJ\underline{E} = 0$$

Слагаемое $\underline{v} \times [q\underline{E}t + \underline{K}_1^{(0)}]$ при проекции на ось y даст некоторое ненулевое слагаемое, которое индуцирует изменение скорости по оси Y, а значит возможны отклонения тела-точки.

Чем больше B, тем большее значение будет иметь это слагаемое.

Случай $H = 0$ и $E \neq 0$, увеличенный параметр J

Увеличив момент инерции J в 10 раз по сравнению с прошлыми расчётами, получим

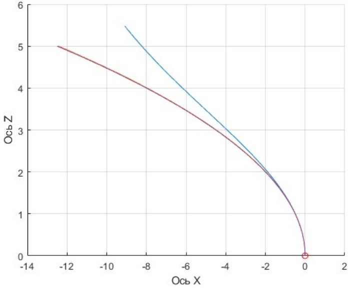


Рис.: Проекция на плоскость XZ

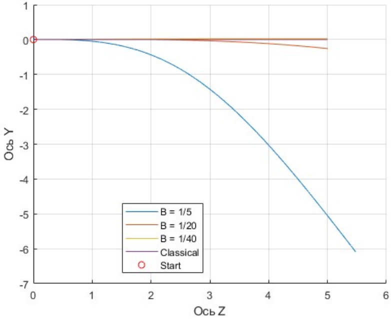


Рис.: Проекция на плоскость YZ

При увеличении J траектории тел-точек быстрее стремятся к траектории материальной точки при уменьшении B.

Случай $\underline{H} = 0$ и $\underline{E} \neq 0$

Перепишем уравнение движения в виде

$$(-m\dot{\underline{v}} + q\underline{E}) + \frac{B}{J} \cdot \left[B\dot{\underline{v}} + \underline{v} \times (q\underline{E}t + \underline{K}_1^{(0)})\right] = 0.$$

При увеличении J или уменьшении B вклад второго слагаемого в левой части вышеприведенного уравнения уменьшается, что выражается в том, что траектории тела-точки начинают приближаться к траектории материальной частицы.

Подбор параметров для сравнения с электроном

Для сравнения с движением электрона механические параметры подбираются из следующих соображений

- В качестве массы берётся масса электрона в покое $m \approx 10^{-30}$ [кг]
- Для определения момента инерции J предполагается, что электрон имеет форму шара с радиусом, равным классическому радиусу электрона

$$J = \frac{2}{5}mR^2, \ \ R \approx 3 \cdot 10^{-15}[\text{м}]$$

- В качестве заряда берётся заряд электрона $q \approx -1.6 \cdot 10^{-19}$ [Кл]
- Варьируется параметр B, причём, ввиду положительной определенности кинетической энергии K

$$B^2 \leqslant mJ \approx 10^{-90}$$

Сравнение с движением электрона при $\underline{H} = 0$

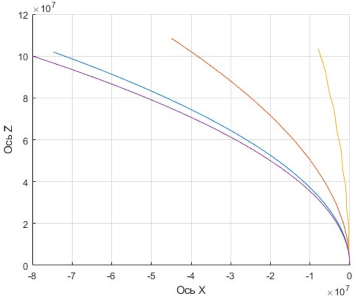


Рис.: Проекция на плоскость XZ

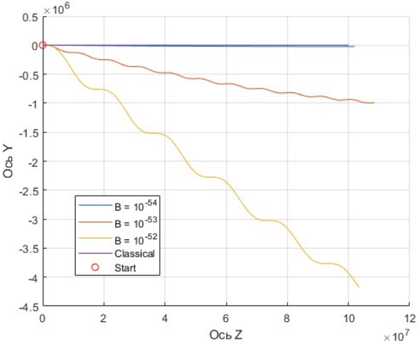


Рис.: Проекция на плоскость YZ

Несмотря на большое различие в определяющих параметрах, качественно движение тела-точки не изменилось по сравнению с приведенными выше решениями. В частности, получаем, что для любого B присутствуют отклонения по оси Y.

Случай $\underline{H} \neq 0$ и $\underline{E} \neq 0$, увеличенный параметр J

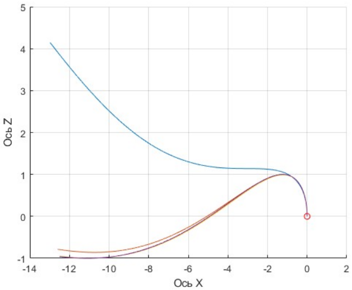


Рис.: Проекция на плоскость XZ

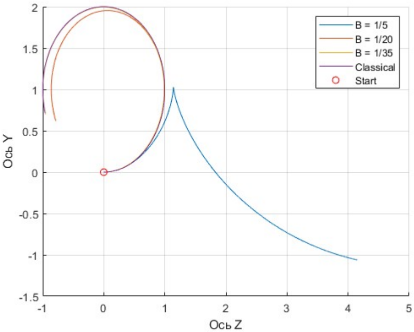


Рис.: Проекция на плоскость YZ

Также как и в случае $\underline{H} = 0$ при увеличении J траектория тела-точки приближается к траектории материальной частицы.

Случай $\underline{H} \neq 0$, $\underline{E} \neq 0$

Эти эффекты можно объяснить также, как и в случае отсутствия магнитного поля. Основное уравнение можно переписать в виде

$$(-m\dot{\underline{v}} + q\underline{v} \times \underline{\mathbf{B}} + q\underline{E}) + \frac{B}{J}\underline{v} \times (q\underline{E}t + (q\underline{r} \times \underline{\mathbf{B}}) + \underline{K}_1^{(0)}) = 0.$$

При увеличении J роль второго слагаемого уменьшается. А зануляемость первого слагаемого есть уравнение движения материальной точки

$$m\dot{\underline{v}} = q[\underline{E} + \underline{v} \times \mu_0 \underline{H}]$$

Случай $(\underline{K}_1 \cdot \underline{e}_z)(\underline{v}^{(0)} \cdot \underline{e}_z) < 0$

За $\underline{e}_z$ обозначается орт, сонаправленный с осью Z.
При условии $(\underline{K}_1 \cdot \underline{e}_z) \cdot (\underline{v}^{(0)} \cdot \underline{e}_z) < 0$ тело-точка с отрицательным может в начале своего движения отклониться по направлению вектора напряженности $\underline{E}$.
На это отклонение L была получена оценка сверху

$$L \leqslant \frac{|\underline{v}^{(0)}|^2 (B^2 - mJ)}{2qJE}$$

Случай $(\underline{K}_1 \cdot \underline{e}_z)(\underline{v}^{(0)} \cdot \underline{e}_z) < 0$. Численное решение.

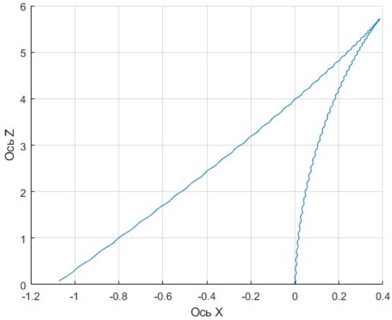


Рис.: Проекция на плоскость XZ

Вопрос

Почему так может происходить?

Случай $(\underline{K}_1 \cdot \underline{e}_z)(\underline{v}^{(0)} \cdot \underline{e}_z) < 0$

Рассмотрим уравнение движения тела-точки при отсутствии магнитного поля

$$\dot{\underline{v}} \left[B - \frac{mJ}{B} \right] + \underline{v} \times \left[q\underline{E}t + \underline{K}_1^{(0)} \right] + \frac{qJ}{B} \underline{E} = 0.$$

Проекция слагаемого $\underline{v} \times \underline{K}_1^{(0)}$ на ось X будет равна

$$-(\underline{v} \cdot \underline{e}_z) \cdot (\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_z).$$

Из соображений непрерывности следует, что знак полученного выражения в начальные моменты времени совпадает со знаком выражения

$$-(\underline{v}^{(0)} \cdot \underline{e}_z) \cdot (\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_z) > 0$$

Получается, что это слагаемое будет иметь противоположный знак по отношению к слагаемым, содержащим проекцию вектора напряженности $\underline{E}$ на ось X.

Выводы

- При значении $C = \dfrac{B^2}{mJ}$, близком к 1, траектория тела-точки сильно отличается от соответствующей траектории электрона. Но при уменьшении C траектория стремится к классической.
- При $(\underline{K}_1^{(0)} \cdot \underline{e}_z) \cdot (\underline{v}^{(0)} \cdot \underline{e}_z) < 0$ тело-точка с отрицательным зарядом может отклониться вдоль вектора напряженности. Отклонение не может превосходить некоторого значения, определяемого постановкой задачи.
- При любом ненулевом B и отсутствии магнитного поля тело-точка отклоняется вдоль оси Y, что не сходится с предсказаниями релятивистской теории.

Спасибо за внимание!