*ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ* «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

*Институт прикладной математики и механики*

Кафедра теоретической механики

Курсовой проект на тему:

«Исследование фазовых портретов»

**Выполнила:**

Иванова Яна Викторовна

Группа: 23604/1

Семестр: весна 2017

Научный руководитель: Панченко Артем Юрьевич

Введение

Часто в ряде наук встречается ситуация, когда модель рассматриваемого процесса сводится к дифференциальному уравнению. Причём, в большинстве реальных задач это уравнение довольно сложно решить, или совсем невозможно.
Фазовый портрет — это то, как величины, описывающие состояние системы (динамические переменные), зависят друг от друга. В случае механического движения это координата и скорость, в электричестве это заряд и ток, в известной популяционной задаче это количество хищников и жертв и т.д.

Чем хороши фазовые портреты? Их можно построить не решая динамические уравнения системы. В некоторых случаях построение фазового портрета становится совсем простой задачей. Однако, одновременно с этим, фазовые портреты дают вдумчивому наблюдателю очень много информации о поведении системы.

В данной работе исследуются фазовые портреты для дифференциального уравнения второго порядка mх’’ + kx + bx’ = 0. Вид фазовых портретов зависит от параметров m, k и b, где m – масса, k – жесткость, а b – коэффициент затухания. Существует несколько стандартных типов фазовых портретов: фокус, центр, узел, седло. Они образуются при определенных сочетаниях заданных параметров. Рассмотрим подробнее все случаи.

$$m\ddot{х} + kx + b\dot{x}= 0$$

характеристическое уравнение:

$$mf^{2} + k + mf = 0$$

корни этого уравнения задаются формулами

$$f\_{1} =\frac{-b + \left(b^{2} – 4mk\right)^{\frac{1}{2}}}{2m}$$

$$f\_{2} =\frac{-b- \left(b^{2} – 4mk\right)^{\frac{1}{2}}}{2m}$$

1. $b^{2}>4mk$

В данном случае трение велико. Оба корня характеристического уравнения действительные, различные. Фазовый портрет типа «Устойчивый узел»

1. $b\^2 = 4mk $

Существует всего один действительный отрицательный корень. Фазовый портрет типа «Вырожденный устойчивый узел»

1. $0 < b\^2 < 4mk$

В данном случае трение мало. Оба корня комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью. Фазовый портрет типа «Фокус»

1. $k\ne 0 , b = 0$

В данном случае отсутствует трение. Оба корня характеристического уравнения действительные, различные и отрицательные. Фазовый портрет типа «Центр»

1. $k = 0, b \ne 0$

Отсутствует упругая сила. Оба корня действительные, один отрицательный, второй равен нулю. Фазовый портрет – прямые линии, параллельные друг другу

Конкретный вид функции зависит от коэффициентов . Но так как эти же коэффициенты определяют и корни характеристического уравнения данной системы. Существует однозначная зависимость между корнями $f\_{1,2}$и типом фазового портрета линейной системы 2-го порядка.

Рассмотрим различные ситуации.

Устойчивый узел

В системе есть апериодический затухающий переходной процесс и уравнение имеет решение

$x\left(t\right)=a\_{1}e^{-λ\_{1}t}$ ***+*** $a\_{2}e^{-λ\_{2}t}$

$λ\_{1,2}$ ***- действительные различные***

$\dot{x}$ ***= -*** $a\_{1}b\_{1}e^{-b\_{1}t}$ ***-*** $a\_{2}b\_{2}e^{-b\_{2}t}$

$\dot{x}$ ***+*** $b\_{1}$***x =*** $a\_{2}(b\_{1} -b\_{2})$$e^{-b\_{2}t}$

$\dot{x}$ ***+*** $b\_{2}$***x =*** $a\_{1}(b\_{2} -b\_{1})$$e^{-b\_{1}t}$

$$x = a\_{1}e^{⁡(-b\_{1} t)}+ a\_{2}e^{⁡(-b\_{2} t)}$$

$\dot{x}$ ***=*** $-b\_{1}a\_{1}e^{⁡(-b\_{1} t)}-b\_{2}a\_{2}e^{⁡(-b\_{2} t)}$

На фазовой плоскости все координаты пересекаются в начале координат.

Вырожденный устойчивый узел

$λ\_{1,2}$$=-\frac{b}{2m}<0$ ***–* корни характеристического многочлена**

$x\left(t\right)=(at+b)e^{-ct}$ **– общее решение, процесс затухающий**

$x$ ***=*** $(at+ c)e^{\frac{-b t}{(2m)} }$

$$\dot{x}= -\frac{b}{2m}at + a + c(-\frac{b}{2m})e^{\frac{-b t}{(2m)} }$$

Центр

Имеется следующее решение характеристического уравнения

$λ\_{1,2}$ **= ± i**$\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$x\left(t\right)= acoswt + bsinwt$$

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+ \frac{\dot{x}^{2}}{w^{2}a^{2}}=1$$

$$x = a cos⁡(wt -β) $$

$$\dot{x}=-awsin(wt - β)$$

то есть фазовые плоскости являются эллипсами.

Фокус

$$x\left(t\right)=(c\_{1}cos wt+c\_{2}sin wt)e^{pt}$$

$p=Re λ\_{1,2}$$=-\frac{b}{2m}$

$$w=Imλ\_{1,2} =\frac{\sqrt{4mk -b^{2}}}{2m}$$

$$x=ae^{-bt}cos wt$$

$$\dot{x}=-ae^{-bt}\left(bcos wt+wsinwt\right)$$

то есть имеют место колебания с бесконечно возрастающей амплитудой. Фазовая траектория – плоская расходящаяся спираль;

Параллельные прямые

В случае равенства одного из собственных чисел характеристического уравнения нулю, имеем

$$λ\_{1}=-\frac{b}{m},  $$

$$λ\_{2}=0$$

$x$ **=** $c\_{1}e^{-λ\_{1}t}+c\_{2}$

$$\dot{x}=λ\_{1}(x -c\_{2})$$

Заключение

Исследование диференциального уравнения второго порядка на фазовые портреты дает возможность понимать поведение решения самого уравнения при определенных конфигурациях системы. При чисто мнимых собственных числах получаем устойчивый фазовый портрет типа «Центр».

В случае действительных отрицательных чисел получаем устойчивый портрет типа «Узел».

При двух комплексно сопряженных корнях с отрицательной вещественной частью получаем неустойчивое решение с фазовым портретом типа «Фокус».

Для случая отрицательных совпадающих корней характеристического уравнения имеем устойчивое решение типа «Вырожденный устойчивый узел».

Если один из корней характеристического уравнения равен нулю, то фазовая траектория представляет собой параллельные прямые. В зависимости от знака ненулевого собственного числа движение по прямой происходит в оба направления.

Список используемой литературы

1. Я. Г. Пановко “Введение в теорию механических колебаний”
2. С. С. Степанов “Курс дифференциальных уравнений. Том 2“
3. А. А. Яблонский “Курс теоретической механики”