**Статика**

Статика – раздел теоретической механики, в котором рассматриваются задачи на равновесие систем сил.

Основные допущения и аксиомы статики.

Аксиомы статики:



1) Сила – мера механического взаимодействия тел. Сила векторная величина, характеризуется тремя элементами: числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Единица измерения – ньютон, , 1кН (килоньютон)= 103Н. Прямая, по которой направлена сила, называется линией действия силы. Действие двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах. ;

.

2. Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, будут уравновешены тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны. Такую систему сил будем называть уравновешенной.

Следствие 1. Действие системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или отнять уравновешенную систему сил.

Следствие 2. Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия. Т.е. сила, приложенная к абсолютно твердому телу – скользящий вектор.

3) аксиома равенства действия и противодействия (3-й закон Ньютона): Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

4) принцип отвердевания: Равновесие сил, приложенных к деформируемому телу, не нарушается при его затвердевании.

Ещё уместно ввести понятие нулевого вектора: две силы, равные по величине, противоположно направленных и приложенных в одной точке.

Тело называется свободным, если его перемещения ничем не ограничены. Тело, перемещение которого ограничено другими телами, называется несвободным. Тела, ограничивающие перемещения данного тела, называются связями. Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются реакциями связей.

Принцип освобождаемости: Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к телу. Основные типы связей: а) опора на идеально гладкую поверхность – реакция поверхности направлена по нормали к ней, т.е. перпендикулярно касательной – нормальная реакция; б) одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (угол), реакция направлена по нормали к другой поверхности; в) нить – реакция направлена вдоль нити к точке подвеса;



г) цилиндрический шарнир (шарнирно-неподвижная опора) – реакция может иметь любое направление в плоскости. При решении задач заменяется двумя взаимно перпендикулярными составляющими;

д) цилиндрическая шарнирно-подвижная опора (шарнир на катках) – реакция направлена перпендикулярно опоре в любом направлении (вверх, вниз); ж) невесомый стержень (обязательно невесомый) – реакция направлена вдоль стержня; е) сферический шарнир. Реакция раскладывается на три составляющие; з) "глухая" заделка (вмурованная балка) – возникает произвольно направленная реакция – сила и реактивный момент, также неизвестный по направлению.

Момент силы относительно точки.

*0*





*H*

*X*

*Y*

*Z*



В определение вектора момента силы относительно точки должны входить величина момента и его направление. Введем следующее векторное определение момента силы:



Величина (модуль) момента равен, где α - угол между векторами и .



Легко видеть, что по численной величине момент силы относительно точки равен удвоенной площади треугольника, построенного на силе как на основании и на центре момента как на вершине. Вместо удвоенной площади треугольника можно взять площадь параллелограмма со сторонами, равными величине силы и отрезка, соединяющему центр *О* с точкой приложения силы. Аналитические выражения моментов силы относительно осей координат:

если  , то 

*Мx(**)=yFz – zFy; Мy()=zFx – xFz; Мz()=xFy – yFx.*

Система сходящихся сил. Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. Равнодействующая сходящихся сил равна Геометрическая сумма называется равнодействующей этих сил и приложена в точке их пересечения . Равнодействующая может быть найдена геометрическим способом – построением силового (векторного) многоугольника или аналитическим способом, проектируя силы на оси координат.

Условия равновесия системы сходящихся сил:

геометрическое:, аналитические:

, ,



Проекции силы на оси координат для пространственной системы сил: ,

*Fx=Fcosα; Fy=Fcosβ; Fz=Fcosγ; ;* *.*

Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси равны алгебраическим суммам проекций этих сил на соответствующие оси:

*Rx=∑Fix; Ry=∑Fiy; Rz=∑Fiz; .*

Проекции силы на оси координат (для плоской системы сил):

*Fx=F⋅cosα; Fy=F⋅cosβ=F⋅sinα;* проекция >0, если направление составляющей силы совпадает с направлением оси. Модуль силы:**; Направляющие косинусы:  разложение силы на составляющие: , где  – орты (единичные векторы соответствующих осей).



Плоская система сил – система сил, расположенных в одной плоскости.

Момент силы относительно оси – скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью. Момент >0, если смотря навстречу оси, мы видим поворот, который стремится совершить сила направленный против часовой стрелки,





На рис. *М>0*. Момент силы относительно оси равен 0 если ось и сила лежат в одной плоскости.

Условия равновесия плоской системы сил:

векторное:  , aналитическое:

1)   

2) 

где *А,В,С* – точки, не лежащие на одной прямой, или

3) ,

ось *"х*" не перпендикулярна отрезку АВ. Здесь и далее  -реакции связей.

Главный вектор и главный момент системы сил. Правило Пуансо.

Рассмотрим две силы и , равные по величине и направленные в противоположные стороны, но действующие на тело не по одной прямой. Такая система сил называется парой сил. Сумма этих двух сил равна нулю, а момент?



*h*

или . Момент таких двух сил не зависит от выбранного центра, то есть вектор  является свободным: его можно переносить как угодно в пространстве, не изменяя его величины и направления. Кратчайшее расстояние между силами *h* называют плечом пары сил. Численно момент пары равен







*A*

*B*

*O*

α

Пусть заданы какие-то два произвольных вектора  и . Мы хотим сложить эти два вектора. Если что-то складывать, то, во-первых, надо выбрать место, куда складывать, а во-вторых, определиться, как складывать. "Место'"— это центр приведения, выбранная нами произвольно точка *О*. А правила сложения объяс­ним на конкретном примере. Приложим нулевой вектор (,) в точке *О,* причем выберем модули этих векторов равными модулю . Итак, был вектор , стала совокупность трёх векторов (,,)). Сгруппируем их теперь по другому( , (,))≈(,(,,)). Вроде бы ничего не изменилось (знак ≈ обозначает эквивалентность), но получили силу ,приложенную в выбранном центре *О*, и совокупность (,), образующих пару сил с моментом . Если проделать те же операции с вектором , то получим

≈( ,( ,))≈(,(,))

*О*



****













Рис7 7

то-есть получили силу , приложенную в выбранном центре, и пару сил (,) с моментом .Теперь два вектора приложены в том же центре *О*, и их можно сложить по правилу параллелограмма. Но!!! Помимо суммы этих двух векторов еще есть сумма двух пар, двух свободных векторов, которое тоже можно сложить и получить результирующий вектор момента. Получили СИЛУ и МОМЕНТ! Чему равна сила? — сумме двух заданных сил. а момент? - моменту этих двух сил относительно выбранно­го центра. Все изложенные соображения можно распространить и на сколь угодное количество сил. Результатом этих преобразований будет сила, равная сумме слагаемых сил, и пара сил с моментом равным сумме моментов пар.

 , 

Вектор называется – главный вектор системы сил.

Вектор  называется – главный момент системы сил относительно выбранного центра.

Метод Пуансо приводит, таким образом, к следующей основной теореме статики: ***произвольная пространственная система сил, приложенная к твердому телу, статически эквивалентна силе, равной главному вектору, приложенной в произвольной точке тела (центре приведения), и паре сил с моментом, равным главному моменту системы сил относительно указанного центра приведения.*** Это основная теорема сложения векторов, применяемая в статике.

Теперь можно дать более точную формулировку статической эквивалентности двух систем сил: если две системы сил имеют одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра приведения, то такие системы сил статически эквивалентны.

Сумма всех сил, а, следовательно, и главный вектор системы сил, не изменится. Главный же момент будет другой, так как теперь моменты сил надо будет считать относительно другого центра, плечи пар станут другими. Пусть новый центр будет в точке *Р*. Тогда,



Первое слагаемое - момент сил относительно старого цен­тра, второе- момент главного вектора относительно нового центра, тогда окончательно запишем



т.е. главный момент сил зависит от центра приведения.

Случаи приведения пространственной системы сил:

При изменении положения центра приведения О главный вектор  будет сохранять величину и напра­вление, а главный момент  будет изменяться. Докажем, что если главный вектор отличен от нуля и перпендикулярен к главному моменту, то система сил приводится к одной силе, которую в этом случае будем называть равнодействующей . Главный момент  можно представить парой сил (,) с плечом , тогда силы  и главный век тор  образуют систему двух сил эквивалентную нулю, которую можно отбросить. Останется одна сила , действующая вдоль прямой, параллельной главному вектору и проходящей на расстоянии h=  от плоскости, образуемой векторами  и .





*О*

*h*=





*L*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | I2= | F0 | М0 | Случай приведения |
| 1 | I2≠ 0 | F0≠ 0 | M0≠ 0 | Две непересекающиеся силы |
| 2 | I2= 0 | F0≠ 0 | M0≠ 0; М0= 0 | Равнодействующая |
| 3 | I2= 0 | F0= 0 | M0≠ 0 | Пара сил |
| 4 | I2= 0 | F0= 0 | M0= 0 | 0 |

Уравнения равновесия пространственной системы.сил:

  *.*

Равновесие тел при наличии трения.

Закон Кулона (закон Амонтона – Кулона):

Явления трения скольжения впервые экспериментально изучались в конце XVII в. французским физиком Амонтоном (1663—1705), законы трения были сформулированы почти сто лет спустя Кулоном (1736-—1806).

1. Сила трения лежит в плоскости касательной к соприкасающимся поверхностям трущихся тел.

2. Сила трения не зависит от площади соприкосновения тел.

*S*

*N*

*P*

*F*тр

3. Максимальное значение силы трения пропорционально нормальному давлению N тела на плоскость (в рассматриваемом случае N=P):

4. Максимальная сила сцепления пропорциональна нормальному давлению тела на плоскость*, fсц* – коэффициент сцепления (зависит от материала, состояния поверхностей, определяется экспериментально). Направление силы сцепления противоположно направлению того движения, которое возникло бы при его отсутствии. При скольжении тела по шероховатой поверхности к нему приложена сила трения скольжения. Ее направление также противоположно скорости тела *, f* –коэффициент трения скольжения (определяется опытным путем). *f<fсц*. Наряду с коэффициентом трения f введем в рассмотрение угол трения φ, определяя его соотношением . Происхождение этого равенства и наименование «угол трения» будут объяснены ниже. Когда *S* достигнет значения *Fmах*, наступит критический (пуско­вой) момент равновесия; если *S* останется равным *Fmax*, то равновесие не нарушится, но достаточно самого ничтожного приращения усилия *S*, чтобы тело сдвинулось с места. Можно заметить, что как только тело сдвинется с места, сила трения сразу несколько умень­шится; опыты показали, что трение при взаимном движении тел не­сколько меньше трения при взаимном покое их. Важно отметить, что до наступления критического момента, т. е. пока тело находится в покое, сила трения равна приложенному усилию и можно лишь утверждать, что *F≤N.* Знак равенства относится к критическому моменту равновесия.

Угол трения, конус трения.

Рассматривая трение покоя, предположим, что к телу, покоящемуся на горизонтальной шерохо­ватой плоскости, приложена сила Q, составляющая угол α с нор­малью к плоскости. Составим уравнения равновесия. Для сходящейся системы сил достаточно написать два уравнения

 .

Написанные уравнения определяют силу трения и нормальную реакцию. Для того чтобы тело под действием приложенного усилия не могло быть сдвинуто с места, необходимо, чтобы или . Разделив полученное неравенство на , имеем , или вводя угол трения, получаем α ≤φ. Следовательно, в зависимости от материала и характера поверх­ности трущихся тел можно по заданному коэффициенту трения определить такой угол φ , что если приложенная к телу сила будет наклонена к нормали на угол, меньший угла φ, то как бы ни была велика эта сила, тело останется в равновесии. Это и объясняет наименование угла φ углом трения. Область внутри отрезков с углом 2φ («область трения») представляет область, обладающую замечатель­ным свойством: как бы ни была велика по интенсивности сила, линия действия которой расположена внутри этой области, эта сила не приведет в движение тело, опирающееся на плоскость.

*N*

*F*тр

Рис 14

*Q*

α

*2φ*

Трение качения

Представим себе каток веса *Р* и радиуса *r*, покоящийся на гори­зонтальной плоскости. Опыт показывает, что, если прило­жить к оси катка горизонтальную силу *Q*, каток будет оставаться в покое, пока величина этой силы не достигнет некоторого значе­ния. Чтобы объяснить этот факт, составим уравнения статики для плоской системы сил, действующих на каток; этими силами являются вес *P,* усилие *Q* и реакция *S*, которую можно разложить на нормальную составляющую - реакцию N и горизонтальную - силу трения *Fтр.* Проектируя все силы на горизонтальное и вертикальное направ­ления, получим:

*С*

*О*

*Q*

*N*

*P*

*Fтр*

*r*

*k*

*S*

*Q = Fтр, P = N.*

Остается составить уравнение моментов; за центр моментов примем точку О, точку соприкосновения контура колеса с плоскостью; имеем:



Мы приходим, таким образом, к необходимости принять, что нормальная реакция *N* приложена не в точке *О,* а несколько сдви­нута от нее в сторону действия силы *Q*. Физически этот сдвиг можно объяснить на­личием деформаций катка и опорной пло­скости в области точки *О*; фактически со­прикосновение происходит по некоторой пло­щадке, размеры которой зависят от величины нормального давления, свойств материалов и состояния поверхностей катка и опорной плоскости. Можно считать, что к катку приложена пара, момент которой равен , который называется моментом трения качения. Его предельная величина, как показывают опыты, пропорциональна нормальному давлению катка на плоскость: , причем имеющий размерность длины коэффициент трения качения k определяется опытным путем. Очевидно, что *k* можно рассматривать как отрезок, на который сдвинута сила *N* в направлении силы *Q* в критический момент равновесия. Обычно - значительно меньше, чем *f*; это значит, что нарушение покоя, которое произой­дет при постепенном увеличении силы Q, будет заключаться в том, что каток начнет катиться по опорной плоскости, не скользя по ней. Возникающие здесь вопросы, однако, не могут быть рассмотрены без применения средств динамики.

Центр параллельных сил, центр тяжести.

Теорема Вариньона ( теорема о моменте равнодействующей силы): момент равнодействующей относительно любой точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки. Для определённости все силы параллельны оси *OZ*, тогда



Центр параллельных сил – точка, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол.

 .

Координаты центра параллельных сил:  и т.д.

Центр тяжести твердого тела – точка, неизменно связанная с этим телом, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести при любом положении тела в пространстве. При этом поле тяжести считается однородным, т.е. силы тяжести частиц тела параллельны друг другу и сохраняют постоянную величину при любых поворотах тела. Центр тяжести – геометрическая точка и может лежать и вне пределов тела (например, кольцо).

Центр тяжести сечения:

, – элементарная площадка, *S* – площадь фигуры. Если площадь нельзя разбить на несколько конечных частей, то . Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси. Центр тяжести: дуги окружности с центральным углом 2α: ; кругового сектора: ; треугольник: в точке пересечения медиан (1/3 медианы от основания).

Вспомогательные теоремы для определения положения центра тяжести:

Т.1. Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Т.2. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то его центр тяжести находится в этой плоскости.

Определяя положение центра тяжести плоской фигуры с вырезанной из нее частью, можно считать площадь этой части отрицательной и тогда:  и т.д. — способ отрицательных площадей (объемов).

**Кинематика точки**

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются движение материальных тел с геометрической точки зрения, без учета массы и действующих на них сил. Способы задания движения точки:

1) естественный, 2) координатный, 3) векторный.

Траектория точки – непрерывная кривая, которую описывает точка при своем движении.

Естественный способ: указывается траектория точки, закон ее движения по этой траектории, начало и направление отсчета дуговой координаты:  – закон движения точки. При прямолинейном движении*: х=f(t).*



Координатный способ: положение точки в пространстве определяется тремя координатами, изменения которых определяют закон движения точки:

*x=f1(t), y=f2(t), z=f3(t).*

Если движение в плоскости, то уравнений движения только два.

Векторный способ положение точки определяется ее радиус-вектором *,* проведенным из какого-либо центра. Кривая, которая вычерчивается концом переменного вектора, отложенного от общего начала называют годографом этого вектора. Траектория – годограф радиус-вектора, зависящего от времени. Связь между координатным и векторным способами: , ( – орты – единичные вектора). Модуль , направляющие косинусы:  и т.д.

Скорость точки. Вектор скорости:  – первая производная от радиус-вектора по времени (точка обозначает производную по времени);



Проекции скорости: ,  , . 

Модуль скорости:,

направляющие косинусы:  и т.д. Если модуль скорости не изменяется с течением времени, то движение называется равномерным.

Ускорение точки , [м/сек2].

Проекции ускорения: и т.д.

Модуль ускорения: , направляющие косинусы:, и т.д.

Рассмотрим некоторую кривую, лежащую (вообще говоря) не в одной плоскости. Возьмём на этой кривой три точки *М1, М2* и *М* (рис 20). Проведём через эти три точки плоскость (предполагается, что три точки не лежат на одной прямой). Устремим точки  *М1* и *М2* к точке *М*. Проведённая плоскость при этом будет каким – то образом поворачиваться и займёт предельное положения, когда все три точки сольются. Это предельное положение назовём соприкасающейся плоскостью (СП), в которой проведём касательную к кривой в точке *М*. Орт касательной в точке *М* обозначим . Проведем в точке *М* плоскость перпендикулярную к орту , эту плоскость назовём нормальной плоскостью (НП) кривой. Любая прямая, проведенная в этой плоскости через точку *М*, будет перпендикулярна к , т. е. будет нормалью кривой; линия пересе­чения нормальной и соприкасающейся плоскостей определяет глав­ную нормаль кривой. Иными словами, главной нормалью называется нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости. Нормаль, перпен­дикулярная к главной нормали, называется бинормалью кривой. Если, в частности, кривая — плоская, то соприкасающейся пло­скостью будет плоскость, в которой расположена кривая, а главной нормалью — нормаль к кривой, лежащей в этой плоскости. Совокупность трех взаимно перпендикулярных осей: 1) касатель­ной, направленной в сторону возрастания дуги, 2) главной нормали, направленной в сторону вогнутости кривой, и 3) бинормали, перпендикулярной к касательной и главной нормали образует оси натурального триэдра кривой. Единичные векторы этих осей обозначим соответственно через . 

*М1*

*М2*

*М*

**

**

**

*СП*

*НП*

*Гл. нормаль*

*бинормаль*

*r*

*О*

Найдем выражения  через вектор-радиус точки на кривой, заданный как вектор-функция дуги: . По определению векторной производной вектор  направлен по касательной к годографу вектора  в сторону возрастания дуги *S*. С другой стороны, численная величина производной равна . Таким образом, векторная производная представляет искомый единичный вектор касательной  . Без доказательства примем еще одно выражение  . При естественном способе задания движения:



Найдем выражения  через вектор-радиус точки на кривой, заданный как вектор-функция дуги: . По определению векторной производной вектор  направлен по касательной к годографу вектора  в сторону возрастания дуги *S*. С другой стороны, численная величина производной равна . Таким образом, векторная производная представляет искомый единичный вектор касательной  . Без доказательства примем еще одно выражение  . При естественном способе задания движения:





 – величина скорости равна производной пройденного пути по времени, вектор скорости: , – орт касательной, то-есть скорость всегда направлена по касательной к траектории. Если v>0, то движение происходит в сторону положительного отсчета дуговой координаты и наоборот.

При естественным способе задания движения полное ускорение раскладывают на нормальное и касательное (тангенциальное) ускорения:

,

,

откуда следует



. Модуль нормального ускорения: , ρ – радиус кривизны траектории, нормальное ускорение направлено по нормали к траектории (⊥ к касательной) всегда к центру кривизны, т.е. в сторону вогнутости. Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению. Модуль касательного ускорения , направлено по касательной к траектории, либо в сторону скорости, либо в обратную. Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине. Нормальное ускорение перпендикулярно касательному. При ускоренном движении направление касательного ускорения и скорости совпадают, при замедленном – противоположно. . Вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости, его проекция на бинормаль равна 0.

Частные случаи движения точки:

1) Прямолинейное: радиус кривизны ρ= ∞ (бесконечно большой); *аn=0, a=aτ.*

2) Равномерное криволинейное движение: *v=const* ; *aτ=0, a=an*. Ускорение появляется только за счет изменения направления скорости. Закон движения: *s=s0+v⋅t*, при *s0=0 v=s/t*.

3) Равномерное прямолинейное движение: *а=aτ=an=0*. Единственное движение, где *а=0*.

**Кинематика твёрдого тела**

Простейшие движения твердого тела: поступательное и вращение вокруг неподвижной оси.

Поступательное движение тела – такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельное самой себе. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения, то-есть тело при движении можно считать точкой.

Вращение вокруг неподвижной оси – такое движение твердого тела, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными. Эта прямая называется осью вращения тела. При этом движении все точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения. Уравнение (закон) вращательного движения*: ϕ=f(t*) – угол поворота тела в радианах. (1 рад= 180о/π=57,3о).

Угловая скорость: , [рад/с] – определяет быстроту изменения угла поворота. Вектор угловой скорости тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, направлен вдоль оси вращения так, что если смотреть ему навстречу вращение будет против хода часовой стрелки. Размерность угловой скорости: "*n*"– число оборотов в мин. [об/мин], 1об=2π рад, (рад/сек). Угловое ускорение тела: , [рад/с2]. Вектор углового ускорения также направлен вдоль оси вращения. При ускоренном движении совпадает по направлению с угловой скоростью и противоположно при замедленном вращении.

Скорости и ускорения точек вращающегося тела.



** – скорость любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус–вектор этой точки.** Модуль векторного произведения: *v=ω⋅r⋅sin(α)= ω⋅(CM), (СМ)* – расстояние от точки *М* до оси вращения (*CM=h*). Направлен вектор скорости по касательной к окружности, по которой перемещается точка *М*, в сторону вращения.

,

ωx,ωy,ωz – проекции вектора угловой скорости. Проекция скорости:

*vx=ωyz – ωzy; vy=ωzx – ωxz; vz=ωxy – ωyx.*

Если ось вращения совпадает с осью *z*, то *vx= – ωy; vy=ωx*.

Ускорение точек тела: По определению ускорение точки есть производная от вектора скорости

  , 

т.к. орт  не меняет своего направления, и, учитывая что ,

получим



Первое слагаемое - вращательное ускорение, направленное по вектору скорости при ускоренном вращении и против вектора скорости при замедленном вращении, модуль вращательного ускорения равен  второе слагаемое - есть осестремительное ускорение, направленное всегда к оси вращения и численно равно 

Модуль полного ускорения: .

Угол, между векторами полного и осестремительного ускорений:

.

Плоское движение твердого тела.

Плоским (плоскопараллельным) называется такое движение, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Уравнения плоского движения: *xA= f1(t), yA= f2(t),*



*ϕ = f3(t)*, точка *А* называется полюсом. Плоское движение твердого тела слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся так же, как полюс (А), и из вращательного движения вокруг этого полюса ( оси, проходящей через полюс). Поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а величина и направление угла поворота не зависят. Скорости точек тела при плоском движении:

; , *vBA= ω⋅BA,*

т.е. скорость какой-либо точки *В* плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса *А* и скорости точки В при вращении плоской фигуры вокруг полюса *А.* Теорема: при плоском движении проекции скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой:



*vAcosα = vBcosβ.*



Мгновенный центр скоростей (МЦС) – точка *Р* плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю . Если тело движется непоступательно, т.е. ω≠0, то (МЦС) всегда существует.  – скорость любой точки плоской фигуры имеет модуль, равный произведению угловой скорости фигуры на длину отрезка, соединяющего точку с МЦС, и направлена ⊥ этому отрезку в сторону вращения фигуры. , скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до МЦС , угловая скорость тела равна отношению скорости какой-нибудь точки к ее расстоянию до МЦС. Определение положения МЦС:

1) МЦС – точка пересечения перпендикуляров, восстановленных к скоростям точек (напр. в точке *В* и точке *К*);



2) если скорости точек А и В параллельны между собой и перпендикулярны АВ, то для определения МЦС должны быть известны модули и направления скоростей (см. *vA* и *vB*);

3) если они при этом равны между собой , то МЦС находится в ∞, а угловая скорость *ω=vA/∞=0*; если это имеет *vA = vB* имеет место только к некоторый момент времени, то имеем мгновенное поступательное движение;

5) если плоская фигура катится без скольжения по неподвижной поверхности, то МЦС плоской фигуры будет в точке соприкасания тела и поверхности.

Теорема Шаля: плоскую фигуру можно переместить из одного положения в любое другое положение на плоскости одним поворотом этой фигуры вокруг некоторого неподвижного центра. Этот центр на неподвижной плоскости, совпадает с МЦС и называется мгновенным центром вращений (ось вращений). При движении плоской фигуры МЦС непрерывно изменяет свое положение. Геометрическое место МЦС , отмеченных на неподвижной плоскости, называется неподвижной центроидой. Геометрическое место МЦС, отмеченных на плоскости фигуры, называется подвижной центроидой (колесо катится по прямой: неподвижная центроида – прямая, подвижная – окружность). При движении плоской фигуры подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной центроиде.

Сферическое движение твердого тела.

Сферическое движение – движение твердого тела, одна из точек которого во все время движения остается неподвижной (напр. движение волчка). Точки тела движутся по сферическим поверхностям. Положение тела определяют при помощи трех углов. Для этого задаются две системы координат: неподвижная Оxyz и подвижная Оξης, связанная с твердым телом. Линия *ОJ* – линия узлов, заданные углы*: Ψ* – угол прецессии, *θ* –угол нутации, *ϕ* – угол собственного вращения — называются углами Эйлера. Таким образом уравнения сферического движения: *Ψ=f1(t); θ=f2(t); ϕ=f3(t).*  Углы отсчитываются от осей против хода часовой стрелки.



Простой пример сферического движения – вращение волчка. Собственное вращение  вращение волчка вокруг собственной оси, угол междуосью вращения и вертикалью – угол нутации. Ось вращения описывает конус вокруг вертикальной оси – это прецессия.

Сложное движение точки (тела)

Сложное движение точки (тела) – такое движение, при котором точка (тело) одновременно участвует в нескольких движениях (напр. пассажир, перемещающийся по движущемуся вагону). В этом случае вводится подвижная система координат *,* которая совершает заданное движение относительно неподвижной (основной) системы координат *Oxyz.* Абсолютным движением точки называется движение по отношению к неподвижной системе координат.

Относительное движение – движение по отношению к подвижной системе координат (движение по вагону).

*η*

*О*

*ξ*

*О'*







*Y*

*X*

*Z*

*М*

Переносное движение – движение того места подвижной системы координат, где находится точка, относительно неподвижной.

Теорема о сложении скоростей: 

;

-орты (единичные вектора) подвижной системы координат, орт вращается вокруг мгновенной оси, поэтому скорость его конца 

Тогда , и

–относительная скорость. - абсолютная скорость.

 - переносная скорость.

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме ее переносной (*ve*) и относительной (*vr*) скоростей ,

модуль: .

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса):

Чтобы перейти к ускорениям, вычислим абсолютную производную по времени от обеих частей соотношения, выражающего теорему сложения скоростей. Получим:



Преобразуем это равенство так, чтобы производные от векторов брались в той системе координат, к которой дифференцируемый вектор отнесен; так, производные от - берутся в абсолютной системе *Oxyz*, тогда как производные от  берутся в подвижной системе

. Поэтому



Подставляя полученные формулы в предыдущее выражение и произведя перегруппировку слагаемых, получим

,

Здесь

, , .

В ускорении  первое слагаемое  определяет ускорение поступательного движения, равное ускорению точки О', а второе и третье:  и - вращательную и центростремительную состав­ляющие ускорения вращения тела вокруг этой точки, а в целом, это переносное ускорение точки *М*. Здесь абсолютное ускорение точки, - ее относитель­ное ускорение. Последнее слагаемое





Окончательно

.

Первые три слагаемых представляют собой ускорение точки в переносном движении: – ускорение полюса О;  – вращательное ускорение,  – осестремительное ускорение, т.е. .

Полное ускорение ,

где  – ускорение Кориолиса (кориолисово ускорение) – в случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений Направление вектора определяется по правилу векторного произведения, или по правилу Жуковского: проекцию относительной скорости на плоскость, перпендикулярную переносной угловой скорости, надо повернуть на 90о в направлении вращения.

Кориолисово ускорение равно нулю в трех случаях:

1) *ωe=0*, т.е. в случае поступательного переносного движения или в момент обращения угловой скорости в ноль;

2) *vr=0*;

3) *sin(ωe^vr)=0*, т.е. когда относительная скорость *vr* параллельна оси переносного вращения.

Сложное движение твердого тела

При сложении двух поступательных движений результирующее движение также является поступательным и скорость результирующего движения равна сумме скоростей составляющих движений.

Сложение вращений твердого тела вокруг пересекающихся осей.

Ось вращения, положение которой в пространстве изменяется со временем называется мгновенной осью вращения тела. Вектор угловой скорости – скользящий вектор, направленный вдоль мгновенной оси вращения. Абсолютная угловая скорость тела равна геометрической сумме скоростей составляющих вращений – правило параллелограмма угловых скоростей . Если тело участвует одновременно в мгновенных вращениях вокруг нескольких осей, пересекающихся в одной точке, то



*.*



Сложение вращений вокруг 2-х параллельных осей.

1. Вращения направлены в одну сторону. ω=ω2+ω1, С – мгновенный центр скоростей (МЦС), через нее проходит мгновенная ось вращения, ,.
2. Вращения направлены в разные стороны.

, *ω=ω2—ω1*

точка С – МЦС. Векторы угловых скоростей при вращении вокруг параллельных осей складываются так же, как векторы параллельных сил.



1. Пара вращений – вращения вокруг параллельных осей направлены в разные стороны и угловые скорости по модулю равны ( – пара угловых скоростей). В этом случае *vA=vB*, результирующее движение тела – поступательное (или мгновенное поступательное) движение со скоростью *v=ω1⋅AB* – момент пары угловых скоростей (поступательное движение педали велосипеда относительно рамы). МЦС находится в бесконечности.



**Динамика**

Динамика – раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Основные законы механики (законы Нютона-Галлилея):

закон инерции (1-ый закон): материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние;

основной закон динамики ( 2-ой закон (Ньютона)): ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление ;

закон равенства действия и противодействия (3-й закон (Ньютона)): всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие;

закон независимости сил: несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

В классической механике масса движущегося тела принимается равной массе покоящегося тела, масса – мера инертности тела и его гравитационных свойств. Масса равна весу тела, деленному на ускорение свободного падения.

m=G/g, g≈9,81м/с2. g (ускорение свободного падения тела) непостоянная величина, она зависит от географической широты места, высоты над уровнем моря и т.д. Размерность силы – 1Н (Ньютон) = 1кг⋅м/с2. Система отсчета, в которой праведливы 1-ый и 2-ой законы, называется инерциальной системой отсчета.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки:

Проектируя уравнение (1) на координатные оси и учитывая зависимости задаваемых сил от координат, скоростей и времени, получим дифференциальные уравнения динамики точки. Так, для декартовых координат имеем

, 

 \*)

Дифференциаль­ные уравнения движения в цилиндрической системе координат будут иметь вид

;  ; 

В заключение приведем дифференциальные уравнения динамики точки в проекциях на оси натурального триэдра; эти уравнения бывают особенно удобны в тех случаях, когда известна траектория движения точки. Получаем уравнения движения в проекциях на касательную, главную нормаль и бинормаль к траек­тории

, , 

Рассмотрим теперь на примере уравнений динамики точки в декартовых координатах постановку и процесс реше­ния задач динамики точки. Существуют две основные задачи динамики точки: *прямая* и *обратная.* Первая задача динамики (прямая) состоит в следующем: задано движение точки, обладающей массой *,* т. е. заданы функции



требуется найти силы, вызывающие это движение. Решение этой задачи не представляет затруднении. Со­гласно уравнениям \*) находим проекции  для чего дважды дифференцируем заданные функции.

, , 

Полученные выражения представляют проекции равнодействую­щей всех сил, действующих на точку. Эту задачу можноформально привести к решению задачи статики, если переписать уравнение \*) в виде



Здесь - сила инерции точки. Формальное сведение задачи динамики к задаче статики при помощи введения сил инерции, которое довольно часто практикуется в задачах механики, носит название *метода кинетостатики.*

Вторая (обратная или основная) задача динамики точки ставится сле­дующим образом: на точку массы *т* действуют заданные силы; требуется найти движение этой точки (ее координаты *х,у,z)* как функции времени. Для получения требуемого результата надо проинтегрировать систему трех обыкновен­ных дифференциальных уравнений второго порядка. Анали­тическое решение такой задачи оказывается возможным лишь в отдельных частных случаях. Предположим, что мы проинтегрировали систему диффе­ренциальных уравнений и нашли выражения для коор­динат *х, у, z* в функции времени. Так как система дифференциальных уравнений имеет шестой порядок, то при интегрировании ее появятся шесть постоянных интегрирования , Для определения следует обратиться к начальным условиям задачи. Записывая поставленные условия применительно к декартовым координатам, имеем при *t* = 0: начальное положение  начальная скорость 

Окончательное решение задачи имеет вид

; 



Колебания материальной точки.

Восстанавливающая сила (сила упругости) *Fx= – cx*, сила стремится вернуть точку в равновесное положение, "*с*" – коэффициент жесткости пружины равен силе упругости при деформации, равной единице [Н/м] , *х*-полная деформация пружины.

Свободные колебания

;

обозначив *c/m=k2*, получаем



– линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, характеристическое уравнение: *z2 + k2= 0*, его корни мнимые; общее решение дифференциального уравнения будет

*x= C1coskt + C2sinkt,*

где *C1,C2* – постоянные интегрирования.

Для их определения находим уравнение скоростей: *= – kC1sinkt + kC2coskt,* подставляем начальные условия в уравнения для *х* и , получаем

*С1= х0, С2=/k, т.е. x= х0coskt + (/k)sinkt.*

Можно обозначить *С1=Аsinβ, C2=Acosβ,* тогда *x=Asin(kt+β)* – уравнение гармонических колебаний.

*А*=–амплитуда колебаний , *tgβ=kx0/, β* – начальная фаза свободных колебаний;



*–* круговая частота (угловая, собственная) колебаний; период: *Т=2π/k=*2π,

*k* и *Т* не зависят от начальных условий – такие колебания называются изохронными; амплитуда и начальная фаза зависят от начальных условий. Под действием постоянной силы *Р* происходит смещение центра колебаний в сторону действия силы Р на величину статического отклонения *δст=Р/с.*

Если *Р* – сила тяжести, то Т=2π.

Затухающие колебания или апериодическое движение возникают при действии силы сопротивления, пропорциональная скорости (рассмотрим линейно-вязкое трение *Rx= – b* ).

,

обозначив *b/m=2n*, получаем:

,

характеристическое уравнение: *z2 + 2nz + k2= 0*, его корни:

*z1,2*=.

а) При n<k корни мнимые, следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

,



обозначив *С1=Аsinβ, C2=Acosβ* имеем

*x=Ae-ntsin(kt+β).*

Множитель *e-nt* показывает, что колебания затухающие. График заключен между двумя симметричными относительно оси *t* кривыми *x=±Ae-nt*.

Из начальных условий:

, ;

частота затухающих колебаний: *k\*=*;

период: , период затухающих колебаний больше периода свободных колебаний (при небольших сопротивлениях *Т\*≈Т*).

Амплитуды колебаний уменьшаются в геометрической прогрессии: – декремент колебаний; *–nT\*/2* логарифмический декремент; "*n*" – коэффициент затухания.

Апериодическое движение точки при *n ≥ k* или *b ≥ 2.* При *n > k* корни характеристического уравнения вещественны, тогда общее решение имеет вид:



,

обозначая *С1=(В1+В2)/2, С2=(В1-В2)/2,* получим 

(*ch, sh* – гиперболические косинус и синус). Если ввести *В1= Аshβ, В2= Аchβ,* то  –

это уравнение не колебательного движения (апериодического), т.к. гиперболический синус не является периодической функцией.

При *n = k* корни характеристического уравнения вещественны, равны и отрицательны: *z1=z2= – n*, общее решение:

, или ,

движение также апериодическое.

Вынужденные колебания

Кроме восстанавливающей силы может действовать переменная возмущающая сила. Ограничимся рассмотрением силы вида: *Q = Hsin(pt+δ),*

*р* – частота возмущающей силы, δ – начальная фаза.

, *h=Н/m*, 

– дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (неоднородное линейное дифференциальное уравнение). Его общее решение равно сумме общего решения однородного уравнения  и частного решения данного уравнения:

*х = х\*+х\*\*. х\*= C1coskt + C2sinkt,*

*х\*\*= Asin(рt+δ)* – частное решение если . Подставляя решение в уравнение, находим , и *х* = *C1coskt + C2sinkt*+*sin(рt+δ).*

Величина статического отклонения: *Аст= Н/с*, а – называется коэффициентом динамичности (во сколько раз амплитуда колебаний превосходит статическое отклонение). При *p=k μ=∞* – явление резонанса (частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, при этом амплитуда неограниченно возрастает). При *p/k≈1* наступает явление, называемое биениями: .



Обозначая, имеем *x=A(t)cos(pt+δ)* Полученная формула показывает, что при биении происходит наложение двух колебаний, вызванных возмущающей силой (явление модуляции сигнала): на собственно вынужденные колебания с частотой *р*, накладываются вынужденные колебания , амплитуда которых является периодической функцией.

Явление резонанса возникает при совпадаении частот вынужденных и свободных колебаний точки *p=k*. Частное решение ищем в виде:



*х\*\*= Вtcos(kt+δ),* тогда *B=–h/(2k)* и общее решение имеет вид

*х = C1coskt + C2sinkt – –(h/(2k))tcos(kt+δ).*

Уравнение показывает, что амплитуда вынужденных колебаний при резонансе возрастает пропорционально времени. Период *Т=2π/k*, фаза вынужденных колебаний отстает от фазы возмущающей силы на π/2.

Вынужденные колебания при наличии вязкого трения:

*+Hsin(pt+δ)*, или ,

общее решение в зависимости от величины k и n:

1) при *n<k* ;

2) при *n>k* ;

3) при *n=k* .



Динамики относительного движения точки.

Предположим, что система координат *Oxyz* может быть при­нята за абсолютную (неподвижную или галилееву) систему и что в этой системе координат движение точки определяется дифферен­циальным уравнением



где  обозначает абсолютное ускорение точки. Чтобы составить уравнение движения по отношению к другой системе координат , движущейся заданным образом по отношению к абсолютной системе, вспомним кинематическую зависимость между абсолютным ускорением  и относительным ускорением :



где  — переносное ускорение, т. е. ускорение того места си­стемы , через который проходит в данный момент рассматри­ваемая движущая точка, - кориолисово ускорение точки, обу­словленное вращательным движением относительной системы по отношению к абсолютной системе *Oxyz .*

,

Подставляя значение ускорения  в основное уравнение, получим:



Введем обозначения:  , и условимся в дальнейшем опускать индекс «» у элементов относи­тельного движения; тогда последнее равенство примет вид

 \*)

Вектор  называется пере­носной силой инерции, а - поворотной или кориолисовой силой инерции. Анализ последней формулы \*) приводит к следующему выводу: *дифференциальные урав­нения динамики относительного движения составляются так же, как и в абсолютной системе, только к непосредственно прило­женным силам присоединяются еще силы инерции — переносная и кориолисова.*

Если относительная система  движется по отношению к абсолютной системе *Oxyz* поступательно, прямолинейно и равно­мерно, то она представляет галилееву систему, т. е. уравнение движения в ней не должно ничем отличаться от уравнения движения в абсолютной системе; действительно, в этом случае = =0, так что уравнение \*) совпадает с основным уравнением. В случае плоского движения относительной системы 



При равномерном вращении *(ε = 0)* относительной системы вокруг неподвижной или равномерно и поступательно движущейся по от­ношению к абсолютной системе оси () получим: , (это центробежная сила). Кориолисова сила будет равна нулю, если подвижная система движется поступательно ( = 0) или если в силу характера связей точка вынуждена дви­гаться параллельно оси вращения (). Из уравнения относительного движения легко получить уравне­ния относительного равновесия. Для этого достаточно в формуле \*) положить = = 0; тогда уравнение относитель­ного равновесия будет: =0.

Все, что сейчас говорилось по отношению к точке, может быть перенесено на случай любой системы точек. Прикладывая силы инерции, мы можем рассмотрение движения в относительной си­стеме координат свести к тем же уравнениям, что и в абсолютной.

**Динамика системы материальных точек**

Материальная система – совокупность материальных точек, движение которых взаимосвязаны. Масса системы равна сумме масс всех точек (или тел), образующих систему: *М=∑mk.*

Внешние силы Fe – силы, действующие на точки системы со стороны тел, не входящих в систему. Внутренние силы Fi – силы, вызванные взаимодействием точек, входящих в систему.

Свойства внутренних сил: 1) Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил равен нулю; 2) Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно произвольной точки равна нулю.

Количество движения системы  – вектор, равный геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы:

, *М* – масса всей системы,  – скорость центра масс.

Теорема об изменении количества движения системы:  – производная по времени от количества движения механической системы геометрически равна главному вектору внешних сил, действующих на эту систему. В проекциях: , и т.д. Теорема об изменении количества движения системы в интегральной форме:

, где  – импульсы внешних сил.

В проекциях*: Q1x – Q0x = ∑Sekx* и т.д. Количество движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

Закон сохранения количества движения – если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна 0, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению:  и *= const,* в проекциях (например по оси ох):  , тогда *Qx= const*. Из закона следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движение системы не могут.

Теорема о движении центра масс системы.

Центр масс (центр инерции) – геометрическая точка, радиус-вектор  которой определяется равенством: , где – радиусы-векторы

точек, образующих систему. Координаты центра масс:  и т.д.

Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил  – дифференциальное уравнение движения центра масс. В проекциях на оси координат:  , , 

Закон сохранения движения центра масс. Если главный вектор (векторная сумма) внешних сил остается все время равным нулю, то центр масс механической системы находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Аналогично в проекциях на оси, если  ,то , если при этом в начальный момент *vCx0= 0,* то ** и *xC= const.* Необходимо помнить, что во всех общих теоремах динамики перемещения, скорости и ускорения должны рассматриваться в неподвижной системе отсчёта, т.е. абсолютными.

Главный момент количеств движения (кинетический момент) материальной системы. Теорема об изменении кинетического момента.

*–* величина, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно центра *0*.

 . \*\*

Скорость точек тела, вращающегося относительно неподвижной точки, определяется формулой или в проекциях на оси декартовой системы координат

Подставляя полученные формулы в выражение \*\*, и произведя векторное умножение, получаем для проекции кинетического момента на ось на ось *oz*



Раскрывая полученные произведения и приводя подобные члены при проекциях угловых скоростей, заметим, что мы получаем одинаковые сомножители типа

Выражения, задаваемые формулами первой строки носят названия осевых моментов инерции. Моментом инерции системы материальных точек относи­тельно оси называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до оси. Выражения, задаваемые формулами второй строки носят названия центробежных моментов инерции. Эти формулы для сплошного твёрдого тела можно записать в интегральной форме

Тройной интеграл берётся по объёму всего тела. Подставляя полученные моменты инерции в формулу для кинетического момента, получим

Полученные выражения можно представить в матричной форме



здесь - вектор столбец кинетического момента, - вектор столбец угловой скорости, а - матрица моментов инерции тела.

Теорема об изменении момента количеств движения системы (кинетического момента):

Продифференцируем по времени выражение для кинетического момента



Первое слагаемое равно нулю (как векторное произведение одинаковых векторов), а второе есть



Производная по времени от кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра векторно равна главному моменту внешних сил, действующих на эту систему относительно того же центра. Аналогичные равенства относительно осей координат:  и т.д.

Закон сохранения кинетического момента: если , то . Главный момент количеств движения системы является характеристикой вращательного движения.

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела: . Если *Mz= 0*, то *Jzω = const*, *Jz* – момент инерции телаотносительно оси oz

Геометрия масс.

Формулы для осевых и центробежных моментов инерции тела (системы) приведены в предыдущем параграфе. Другая запись осевого момента инерции относительно оси oz - *Jz= M⋅ρ2,* где ρ – радиус инерции тела – расстояние от оси до точки в которой нужно сосредоточить массу всего тела, чтобы ее момент инерции равнялся моменту инерции тела.

Моменты инерции относительно оси (осевые моменты инерции) всегда >0.

Центробежные моменты инерции симметричны относительно своих индексов, т.е*. Jxy=Jyx* и т.д. В отличие от осевых, центробежные моменты инерции могут иметь любой знак и обращаться в нуль.

Главной осью инерции тела называется ось, для которой оба центробежных момента инерции, содержащие индекс этой оси, равны нулю. Например, если *Jxz=Jyz=0*, то ось *z* – главная ось инерции.

Главной центральной осью инерции назыв. главная ось инерции, проходящая через центр масс тела.

1)Если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная к этой плоскости, будет главной осью инерции тела для точки, в которой ось пересекает плоскость.

2)Если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела . Размерность всех моментов инерции [кгм2]

Центробежный момент инерции зависят не только от направления координатных осей, но и от выбора начала координат.

Моменты инерции некоторых однородных тел:



стержень массы m и длины L:

; .

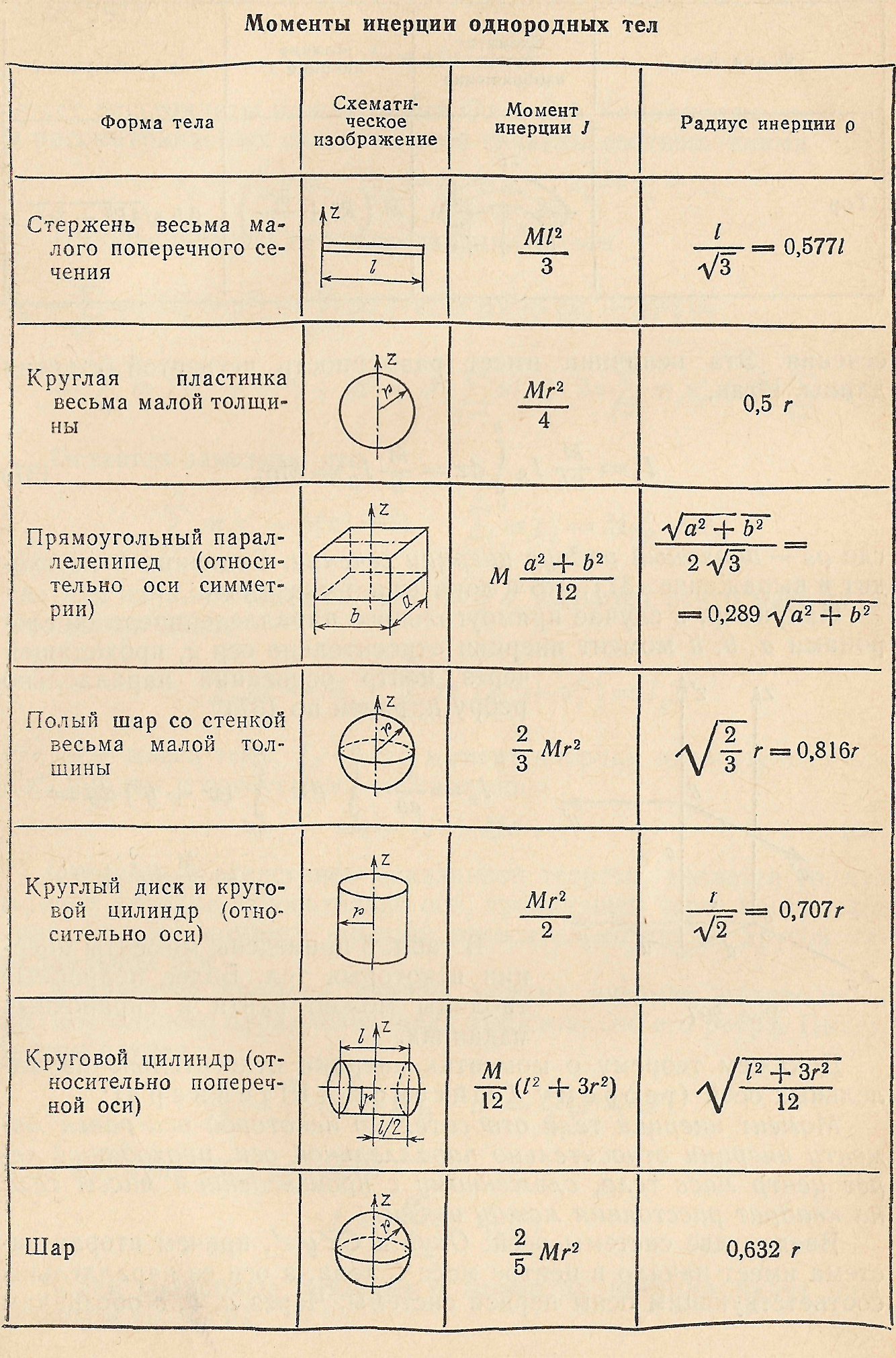
Однородный сплошной диск с центром в точке *С* радиуса *R* и массы m: . Полый цилиндр: , цилиндр с массой распределенной по ободу (обруч): .



Теорема Гюйгенса-Штейнера момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно оси ей параллельной и проходящей через центр масс тела плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями:

.





Наименьший момент инерции будет относительно той оси, которая проходит через центр масс. Момент инерции относительно произвольной оси *ОL*:

*J = Jxcos2α + Jycos2β + Jzcos2γ – 2Jxycosαcosβ – 2Jyzcosβcosγ – 2Jzxcosγcosα,*

если координатные оси являются главными относительно своего начала, то:

*J = Jxcos2α + Jycos2β + Jzcos2γ .*

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия системы – скалярная величина *Т*, равная арифметической сумме кинетической энергий всех точек системы: . Если система состоит из нескольких тел, то *Т = ∑Тк*.

Теорема Кенига: – кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которого равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в ее относительном движении относительно центра масс  где 

кинетическая энергия си­стемы в ее относительном движении относительно центра масс.

Поступательное движение: *Тпост=.*

Вращательное движение: *Твр=,* *Jz*– момент инерции относительно оси вращения.

Плоскопараллельное (плоское) движение: Тпл=+, *vC* – скорость центра масс. Другая формула *Т*=,

*JP* – момент инерции тела относительно (МЦС).

Работа силы

Работа силы  на элементарном перемещении, или элемен­тарная работа  определится выражением ( учитывая, что  )



В общем же случае выражение  не представляет полного дифференциала и символ  следует по­нимать только как символ бесконечно малой величины, а отнюдь не дифференциала. Работа силы на конечном перемещении  определиться интегралом



Интегрирование в полученном выражении производится по величинам, отнесенным к бесконечно малым дугам кривой . Поэтому этот интеграл называется криволинейным интегралом, взятым вдоль дуги кривой от точки  до точки . Такие интегралы называются криволинейными. Вычисление работы может быть сведено к вычислению простого определенного интеграла в следующих случаях:

1. если движение прямолинейное, например по оси *Ох*, и сила являлась функцией только *х,* то элемен­тарная работа действительно представляет дифференциал .

2.Предположим, что движение точки задано уравнениями (см.раздел «динамика точки») . Тогда, написав выражение элементарной работы через проекции силы и перемещения на оси и подставив их выражения через время *t*, получим ,где *Ф (t) -* известная функция времени. Чтобы найти работу на пути , надо взять интеграл ,

где  - моменты, соответствующие прохождению движущейся точкой положений  и . Задача свелась к вычислению опреде­ленного интеграла по аргументу *t*.

3. Область пространства, в каждой точке которого одно­значно определена некоторая функция, будем называть полем; Силовым полем называется область пространства, в каж­дой точке которой определен вектор силы , действующий на помещенную в силовое поле материальную точку. Силовое поле называется потенциальным, если сила пред­ставляет собой градиент скалярной функции. Рассмотрим свойства потенциальных силовых полей. По определению

,

Здесь П = П(*x, у, z*) - потенциальная энергия (или по­тенциал) силового поля. Тогда



а это, в свою очередь, означает, что элементарная работа



в рассматриваемом случае будет полным дифференциалом. Итак, элементарная работа потенциальной силы является полным дифференциалом. Интегрируя полученное соотношение получим выраже­ние для работы на конечном участке пути



Правая часть полученного выражения зависит только от положе­ния (координат) начальной и конечной точек и, следователь­но, работа в потенциальном силовом поле не зависит от вида пути.

Желая охарактеризовать работу с точки зрения времени, в тече­ние которого она производится, вводят понятие мощности



Мощность равна скалярному произведению векторов силы и скорости. За единицу мощности можно принять любую единицу работы, отнесенную к единице времени, т. е. эрг/сек, джоуль/сек, кГм/сек. Иногда принято работу измерять в единицах мощности, умно­женных на единицу времени, т.е. в *ватт • сек, в киловатт-часах* и т.п.

Работа сил, приложенных к твёрдому телу.

Пусть силы ……., приложены к твердому телу в точках …….,. Выбирая произвольную точку тела *О* за полюс и обо­значая вектор-радиус -й точки тела , получим: , т. е. перемещение  точки  равно геометрической сумме пере­мещения полюса  и перемещения  вокруг полюса (- бесконечно малый вектор поворота). Тогда элементарная работа силы  запишется в форме:

.

Второе слагаемое, согласно свойству скалярно-векторного про­изведения, может быть переписано в виде

.

Элементарная работа всех сил будет



Обозначая через - главный вектор системы сил, через - ее главный момент относительно полюса *О*, получим



В частном случае поступательного движения твердого тела , где - элементарное перемещение, одинаковое для всех точек тела. При вращении тела вокруг неподвижной оси (пусть это будет ось Oz), выбирая за полюс точку, лежащую на оси вращения, получим .

В случае плоского движения твердого тела имеем



где через  обозначен главный момент системы сил относительно оси *Oz*, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через полюс *О*.

Теорема об изменении кинетической энергии системы

Для вывода этой теоремы, умножим обе части основного дифференциального уравнения динамики точки ,

скалярно на элементарное перемещение точки , получим



Замечая, что , находим



в правой части равенства стоит выражение элементарной ра­боты внешних и внутренних сил; следовательно,

=,

для системы точек будем иметь



Это соотношение представляет теорему об изменении кинети­ческой энергии системы в дифференциальной форме: приращение кинетической энергии на элементарном участке пути равно элементарной работе внешних и внутренних на этом участке пути.

Интегрируя полученное уравнение, имеем теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме



Для ряда приложений имеет значение другая формулировка до­казанной теоремы: производная по времени от кинетической энергии равна мощности действующих на точку сил.

,

Если система есть твёрдое тело, то работа и мощность внутренних сил равна нулю.

Закон сохранения полной механической энергии: Если все (внутренние и внешние) силы, под действием которых происходит движение системы, являются потенциальными, теорема об изменении кинетической энергии может быть написана в виде 

перепишем равенство в форме 

При движении в потенциальном силовом поле сумма кинети­ческой и потенциальной энергий системы, сохраняет постоянную величину. Такие механические системы называются консервативными.

**Динамика твёрдого тела.**

С помощью этих двух фундаментальных законов

можно получить дифференциальные уравнения движения твёрдого тела и системы тел. Эти уравнения можно переписать в форме, похожей на уравнения статики виде

Эти уравнения называются*уравнениями кинетостатики,* где индекс «*a»* обозначает активные силы и моменты активных сил, «*r*»– силы реакций и моменты сил реакций, а индекс «»- силы инерции и моменты сил инерции, которые равны

, 

1. Дифференциальные уравнения поступательного движения тела: 

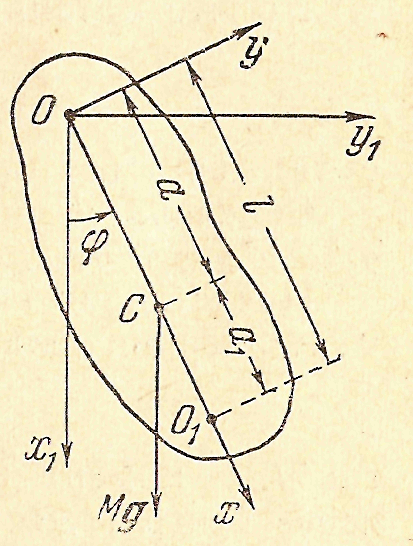
В проекциях на оси

 и т.д.

1. Дифференциальное уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси:

, или . если = 0, то ω = const.

1. Уравнение колебаний физического маятника:

 , ,

если sinϕ ≈ ϕ, тогда 

– дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Здесь 

Решение этого уравнения*:*

*ϕ = С1coskt + C2 sinkt* или *ϕ = Аsin(kt + β).*

Период малых колебаний физического маятника *Т= 2π/k* = 2π .

Величину *L*= называют приведенной длинной физического маятника.

1. Дифференциальные уравнения плоского движения тела:

*; *; .

Рассмотрим подробно часто встречающуюся задачу движения колеса по шероховатой плоскости. При качении цилиндра (колеса) контакт между колесом и поверхностью происходит не в точке, а из-за деформации колеса и самой поверхности реакция контакта распределена на некотором участке. Так как рассматривается плоское движение, то и распределённую реакцию образует плоская система сил, которая может быть заменена равнодействующей. Рассмотрим два случая: движение под действием силы, приложенной в центре колеса и под действием крутящего момента. На рисунке показаны все силы, действующие на колесо. Разложим реакцию F на две составляющие: вертикальную N и горизонтальную T. Составим дифференциальные уравнения движения

*Q*

*mg*

*N*

*T*

*F*

*k*

P



Индекс «*С*» в дальнейшем будем опускать, здесь *r* радиус колеса, *k*- коэффициент трения качения. Для определённости пусть момент инерции равен . Так как колесо движется горизонтально, не подпрыгивая, то из второго уравнения следует . Возможны два вида движения: без скольжения, тогда мгновенный центр скоростей находится в точке *Р* и со скольжением. Для первого случая можно записать условие  тогда, сложив первое и третье уравнения, получим



откуда имеем

 .

Определим силу *Т*, которую по смыслу можно назвать силой трения между колесом и поверхностью. , при этом .

Если сила Q больше, то уравнения движения запишутся так

т.е. два независимых уравнения для . В случае, если  и  то колесо будет скользить и не вращаться, т.е. двигаться поступательно.

Рассмотрим вторую задачу: колесо движется под действием момента (на рис он показан изогнутой стрелкой) *М*.

Уравнения движения запишутся в виде

, , .

*М*

*mg*

*N*

*T*

*F*

*k*

P

Как и в предыдущей задаче возможны два вида движения: без скольжения, тогда мгновенный центр скоростей находится в точке *Р*, и со скольжением. Для первого случая можно записать условие  тогда, разделив третье уравнение на r и сложив первое и третье уравнения получим (при этом *Т* сократится)



Сила *Т*, которую и здесь назовём силой трения, будет равна



т.е. скольжение колеса будет происходить, если .

Если это условие выполняется, то получаем два независимых уравнения для движения центра колеса и его вращения

, .

**Основы аналитической механики**

Возможные (виртуальные) перемещения системы *(δs, δϕ)* – любая совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент наложенными на систему связями. Возможные перемещения рассматривают как величины первого порядка малости, пренебрегая при этом величинами высших порядков малости. Число независимых возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы. Свободное твердое тело имеет 6 степеней свободы.

Возможная (виртуальная) работа *δА* – элементарная работа, которую, действующая сила могла бы совершить на возможном перемещении.

Связи являются идеальными, если сумма элементарных работ реакций этих связей при любом возможном перемещении системы равна нулю, т.е.



Статический принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении была равна нулю  или в проекциях:

.

Принцип возможных перемещений дает в общей форме условия равновесия для любой механической системы, дает общий метод решения задач статики.

Общее уравнение динамики .

Свободная точка описывается дифференциальным уравнением

,

где  - равнодействующая задаваемых сил, приложенных к точке. Рассмотрим несвободную систему с идеальными связями. Обозначая, как и раньше, массы точек через , равнодействующую задаваемых сил через, ускорение точки - , реакции связей через, возможные перемещения через . Тогда уравнения движения точки запишется в виде

.

Вычитая из второго первое уравнение, получим



Умножим каждое из полученных уравнений на возможное перемещение  и просуммируем по всем точкам системы

.

В случае идеальных связей правая часть уравнения равна нулю, тогда имеем

.

Это основное, как мы дальше увидим, для всей динамики несвободной системы полученное уравнение получило название общего уравнения динамики. При движении системы с идеальными связями в каждый данный момент времен сумма элементарных работ всех сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

Общее уравнение динамики в обобщённых координатах называется уравнение Лагранжа второго рода.

Уравнения Лагранжа 2-го рода:

, (*i*=1,2…*s*)

Полученное уравнение позволяет составить *n* (по числу степеней свободы) обыкновенных дифференциальных уравнений второго по­рядка с *n* независимыми обобщенными координатами, являющимися искомыми функциями времени. Оператор



носит название оператор Эйлера-Лагранжа. *s* – число степеней свободы системы (число независимых координат); *qi* – обобщенная координата (координаты *x.y.z*, угол *φ,ψ*, площадь и др.); – обобщенная скорость (линейная скорость, угловая, секторная и др.).

*Т = Т(q1,q2,…,qS,,…,t)–* кинетическая энергия системы, *Qi* – обобщенная сила (сила, момент и др. Для вычисления обобщенной силы, например *Q1*, задаем возможное перемещение, при котором все вариации обобщенных координат, кроме *δq1*, равны нулю:

*δq1≠0, δq2= δq3=…= δqS= 0*. Вычисляем на этом перемещении возможную работу δА1 всех активных сил, приложенных к системе. Имея , находим 

Если силы, действующие на систему, потенциальные (консервативные) (например, силы тяжести, силы упругости), то

,  – потенциальная энергия.

Если ввести функцию Лагранжа: L = T – П,

тогда  – уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы.

**Основные формулы.**

**Статика**

Для пространственной системы: ,

*Fx=Fcosα; Fy=Fcosβ; Fz=Fcosγ;* ; .

Проекции равнодействующей системы сходящихся сил на координатные оси: *Rx=∑Fix; Ry=∑Fiy; Rz=∑Fiz;* 

Условия равновесия системы сходящихся сил:

векторное:, в проекциях: *∑Fix=0; ∑Fiy=0; ∑Fiz=0.*

Равнодействующая двух пересекающихся сил– -- диагональ параллелограмма .

Равнодействующая сходящихся сил .

Проекции силы на оси координат (для плоской системы сил): 

*Fx=F⋅cosα; Fy=F⋅cosβ.* Модуль силы:;

Момент силы относительно точки:

**=*(yFz – zFy)+(zFx – xFz)+(xFy – yFx)*, Модуль векторного произведения:  *R⋅F⋅sinα= F⋅h.* проекции момента силы на оси координат:

*М0x()=yFz – zFy; М0y()=zFx – xFz; М0z()=xFy – yFx.*

Плоская система сил: *±F⋅h*,

Условия равновесия плоской системы сил:

1)   

2) 

где *А,В,С* – точки, не лежащие на одной прямой, или

3) ,

ось *"х*" не перпендикулярна отрезку АВ. Здесь и далее  - реакции связей.

Момент пары сил 

Кратчайшее расстояние между силами *h* называют плечом пары сил.

Вектор называется – главный вектор системы сил.

Вектор  называется – главный момент системы сил относительно выбранного центра. Зависимость главного момента от центра приведения



Условия равновесия пространственной системы сил:

  *.*

Трение. Закон Кулона (закон Амонтона – Кулона): .

Сила трения скольжения: . 

*Мтр≤ fкачN* – момент трения качения. .

Координаты центра параллельных сил: 

.

Координаты центра тяжести: 

; ; где *Р=∑рk.*

Центр тяжести плоской фигуры:, .

Центр тяжести: дуги окружности с центральным углом 2α: ; кругового сектора: .

Центр тяжести плоской фигуры с вырезанной частью: .

**Кинематика точки.**

Скорость точки. Вектор скорости:  – первая производная от радиус-вектора по времени (точка обозначает производную по времени);



Проекции скорости: , , .

Модуль скорости:,

направляющие косинусы:  и т.д.

При естественном способе задания движения: , – орт касательной.

Движение в полярной системе координат: r=r(t) – полярный радиус, ϕ=ϕ(t) – угол. Проекции скорости на радиальное направление , поперечное направление , модуль скорости ; *x=rcosϕ, y=rsinϕ*.

Ускорение точки. , [м/сек2].

Проекции ускорения:  и т.д.

Модуль ускорения: ,

направляющие косинусы: , и т.д.

При естественным способе задания движения полное ускорение раскладывают на нормальное и касательное (тангенциальное) ускорения: . 



Модуль нормального ускорения: , ρ – радиус кривизны траектории. Модуль касательного ускорения .

Частные случаи движения точки:

1) Прямолинейное: ρ= ∞ (бесконечно большой); аn=0, a=aτ.

2) Равномерное криволинейное движение: v=const ; aτ=0, a=an.

3) Равномерное прямолинейное движение: а=aτ=an=0.

4) Равнопеременное криволинейное движение:

*aτ=const*, *v=v0+aτ⋅t*, .

**Кинематика твёрдого тела**

При поступательном движении тела все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Вращение вокруг неподвижной оси. Уравнение (закон) движения:

*ϕ=f(t)* – угол поворота тела в радианах. (1 рад= 180о/π=57,3о).

Угловая скорость:,  [рад/с]

Если "*n*"– число оборотов в мин. [об/мин], 1об=2π рад, .

Угловое ускорение тела: , [рад/с2]. Вектор углового ускорения также направлен вдоль оси вращения. 1) Равномерное вращение: ω=const, ϕ=ωt, ω=ϕ/t,

2) Равнопеременное вращение: ω=ω0+εt; , здесь начальный угол ϕ0=0.



Скорости и ускорения точек вращающегося тела.

 – скорость любой точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Модуль: v=ω⋅r⋅sin(α)= ω⋅(CM), (СМ) – расстояние от точки *М* до оси вращения.

,

ωx,ωy,ωz – проекции вектора угловой скорости. Проекция скорости:

*vx=ωyz – ωzy; vy=ωzx – ωxz; vz=ωxy – ωyx.*

Если ось вращения совпадает с осью *z*, *то vx= – ωy; vy=ωx.*

Ускорение точек тела:

  , 

Учитывая, что , получим



- вращательное ускорение, его модуль равен  - осестремительное ускорение, направленное всегда к оси вращения и численно равно 

Модуль полного ускорения: .

Угол, между векторами полного и осестремительного ускорений: .

Плоское движение твердого тела.

Уравнения плоского движения: *xA= f1(t), yA= f2(t), ϕ = f3(t),* точка *А* называется полюсом. Скорости точек тела при плоском движении:  *vBA= ω⋅BA,*

;,

проекции скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой:



*vAcosα = vBcosβ.*

Мгновенный центр скоростей (МЦС) – точка *Р* плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

 – скорость любой точки плоской фигуры ; , скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до(МЦС).



Ускорения точек:

,





, , , .

.

Ускорения: , вращательное ускорение модуль вращательного ускорения *авр=ε⋅r⋅sinβ=ε⋅h1*, *h1*– расстояние от точки до вектора . Осестремительное ускорение *, аос=ω2⋅h*, направлено к мгновенной оси вращения.



Движение свободного твердого тела (общий случай движения).

Уравнения движения свободного твердого тела:

Сложное движение точки (тела)

Теорема о сложении скоростей:

- абсолютная скорость.

 - переносная скорость.

,

модуль: .

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса):

,

Здесь , , .

 переносное ускорение

,

- абсолютное ускорение точки, - ее относитель­ное ускорение.



 – ускорение Кориолиса (кориолисово ускорение), его модуль

*ас= 2⋅|ωe⋅vr|⋅sin(ωe^vr),* .

Кориолисово ускорение равно нулю в трех случаях:

1) ωe=0, 2) vr=0; 3) sin(ωe^vr)=0,

Сложение вращений вокруг 2-х параллельных осей.



1. Вращения направлены в одну сторону. ω=ω2+ω1, С – мгновенный центр скоростей, .
2. Вращения направлены в разные стороны. , ω=ω2—ω1

С – мгн. центр ск. и мгн. ось вращения, .



Пара вращений – вращения вокруг |параллельных осей направлены в разные стороны и угловые скорости по модулю равны ( – пара угловых скоростей). В этом случае vA=vB, результирующее движение тела – поступательное ( или мгновенное поступательное) движение со скоростью *v=ω1⋅AB*



**Дифференциальные уравнения движения материальной точки:**

Основной закон динамики ( 2-ой закон (Ньютона)):

.

1. В проекциях на оси декартовой системы координат

, 

 \*)

2) При естественном способе задания;



1. В полярной системе координат

.

4)–– дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки, его общее решение:

*x=f(t,C1,C2)*, начальные условия: *t=0, x=x0, =Vx=V0.*

Общее решение задачи имеет вид

; 



Колебания точки.

; c/m=k2, ;

Решение уравнения

*x= C1coskt + C2sinkt,*

*С1= х0, С2=/k, т.е. x= х0coskt + (/k)sinkt.*

Обозначив *С1=Аsinβ, C2=Acosβ,* получим *x=Asin(kt+β)* – уравнение гармонических колебаний.

*А*= амплитуда колебаний,

, *β* – начальная фаза свободных колебаний;

– собственная частота колебаний; период *Т=2π/k.*

Статическое отклонение *δст=Р/с.* *Т*=2π.

Учет линейно-вязкого трения. *Rx= – b* -- сила сопротивления,

, *b/m=2n*, ,

а) n<k ,

.

, ;

Частота затухающих колебаний: k\*=; период колебаний

.

 – декремент колебаний; – *nT\*/2* логарифмический декремент; "*n*" – коэффициент затухания.

б) Апериодическое движение n ≥ k .

При *n > k*: ,

обозначая *С1=(В1+В2)/2, С2=(В1-В2)/2,*



.

с) При *n = k*: , ,

Вынужденные колебания.

Возмущающая сила: *Q = Hsin(pt+δ), р* – частота возмущающей силы, δ – начальная фаза.

, . *h=Н/m,*

Решение уравнения *х* = *C1coskt + C2sinkt*+*sin(рt+δ).* Уравнение биений 

Вынужденные колебания при наличии вязкого трения:

*+Hsin(pt+δ)*, или ,

общее решение в зависимости от величины k и n:

1) при *n<k* ;

2) при *n>k* ;

3) при *n=k* .



Уравнение динамики относительного движения.

Абсолютное ускорение точки задаётся известным соотношением



Откуда следует, что 

Вектор  называется пере­носной силой инерции, а - поворотной или кориолисовой силой инерции.

.

**Динамика системы материальных точек и твердого тела**

Количество движения системы  –

, *М* – масса всей системы,  – скорость центра масс.

Теорема об изменении количества движения системы: . В проекциях: , и т.д. Теорема об изменении количества движения системы в интегральной форме:

, где  – импульсы внешних сил.

В проекциях*: Q1x – Q0x = ∑Sekx* и т.д.

Теорема о движении центра масс системы.

Центр масс (центр инерции) , где – радиусы-векторы

точек, образующих систему. Координаты центра масс:  и т.д.

 – дифференциальное уравнение движения центра масс. В проекциях на оси координат:  , , 

Главный момент количеств движения (кинетический момент) материальной системы 

 .

Если , то

для проекции кинетического момента на ось на ось *oz*  имеем



Выражения, задаваемые формулами первой строки носят названия осевых моментов инерции оси. Выражения, задаваемые формулами второй строки носят названия центробежных моментов инерции. Для сплошного твёрдого тела

Тройной интеграл берётся по объёму всего тела.

В матричной форме



здесь - вектор столбец кинетического момента, - вектор столбец угловой скорости, а - матрица моментов инерции тела.

Теорема об изменении момента количеств движения системы (кинетического момента):



относительно осей координат:  и т.д.

Если , то . Кинетический момент вращающегося тела *Kz = Jzω*. Если *Mz= 0*, то *Jzω* = const.

Другая запись осевого момента инерции относительно оси oz - *Jz= M⋅ρ2,* где ρ – радиус инерции тела.

**Дифференциальное уравнение** движения точек системы:

****

или в проекциях на оси координат:  и т.д. для каждой точки (тела) системы.

Количество движения системы .

Теорема об изменении количества движения системы: ****.

Теорема об изменении кол-ва движения системы в интегральной форме:

.

 – импульсы внешних сил,  – импульсы внешних сил.

Закон сохранения количества движения: , откуда = const,

Теорема о движении центра масс системы:

- дифференциальное уравнение движения центра масс: Закон сохранения движения центра масс. Если  , то  , и если при этом в начальный момент vCx(0)= 0, то  и *x*C= const.

Главный момент количеств движения матер. системы (кинетический момент)  .

Теорема об изменении кинетического момента: *; .*

Закон сохранения кинетического момента: если , то .

Кинетический момент вращающегося тела *Kz = Jzω*. Если *Mz= 0*, то

*Jzω* = const.

Геометрия масс.

Моменты инерции твёрдого тела: осевые и центробежные

Другая запись осевого момента инерции - *Jz= M⋅ρ2*, где *ρ* – радиус инерции тела.

Матрица моментов инерции в данной точке: 

Моменты инерции стержня: ; .

Сплошной диск: . Полый цилиндр :,

Теорема Гюйгенса-Штейнера:

.

Момент инерции относительно произвольной оси:

 если координатные оси главные, то:

.

**Кинетическая энергия системы**

. *Т = ∑Тк.*

Теорема Кенига: Т=+.

Поступательное движение: *Тпост*=. Вращательное: *Твр*=.

Плоскопараллельное (плоское): *Тпл*=+, *vC* – скорость центра масс.

**Работа сил.**

Работа силы  на элементарном перемещении, ( учитывая, что  )



Работа силы на конечном перемещении  определиться интегралом



1. если движение прямолинейное, то .

2.Если движение точки задано ее уравнениями (см.раздел «динамика точки») то ,

3. Если ,

Здесь П = П(*x, у, z*) - потенциальная энергия (или по­тенциал) силового поля. Тогда



и 



Мощность 

Работа сил, приложенных к твёрдому телу.

.

.

Элементарная работа всех сил будет





В случае поступательного движения твердого тела , при вращении тела вокруг неподвижной оси (пусть это будет ось Oz), получим .

В случае плоского движения 

Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы: , 

Замечая, что , находим



следовательно, =,

для системы точек будем иметь



Интегрируя полученное уравнение, имеем теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме



в дифференциальной форме

,

Если система есть твёрдое тело, то работа и мощность внутренних сил равна нулю.

Закон сохранения полной механической энергии:  или



Такие механические системы называются консервативными.

Динамика твёрдого тела

Уравнения *кинетостатики,*

где индекс «*a»* обозна чает активные силы и моменты активных сил, «*r*»– силы реакций и моменты сил реакций, а индекс «»- силы инерции и моменты сил инерции, которые равны

, 

1. Дифференциальные уравнения поступательного движения тела: 

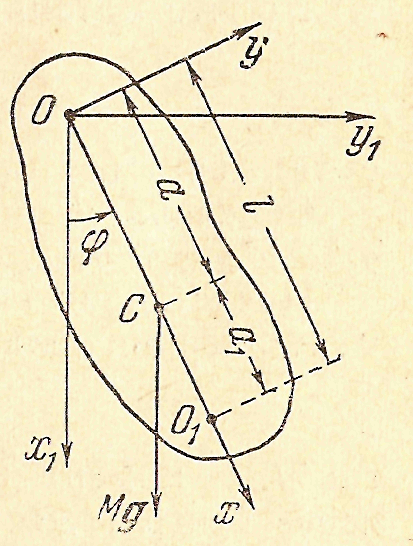
В проекциях на оси

 и т.д.

1. Дифференциальное уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси:

, или . если = 0, то ω = const.

1. Уравнение колебаний физического маятника:

 , ,

если sinϕ ≈ ϕ, тогда 

– дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Здесь 

Решение этого уравнения*:*

*ϕ = С1coskt + C2 sinkt* или *ϕ = Аsin(kt + β).*

Период малых колебаний физического маятника *Т= 2π/k* = 2π .

Величину *L*= называют приведенной длинной физического маятника.

1. Дифференциальные уравнения плоского движения тела:

*; *; .

Задача качения цилиндра (колеса

*Q*

*mg*

*N*

*T*

*F*

*k*

P



Если  тогда, получим



откуда имеем

 .

Сила трения между колесом и поверхностью. , при этом .

Если сила Q больше, то уравнения движения

В случае, если  и  то колесо будет скользить и не вращаться, т.е. двигаться поступательно.

Колесо движется под действием момента *М*.

Уравнения движения запишутся в виде

, , .

*М*

*mg*

*N*

*T*

*F*

*k*

P

Для случая  

Сила *Т*, которую и здесь назовём силой трения, будет равна



скольжение колеса будет происходить, если . В этом случае

, .

Главный момент сил инерции при плоском движении: .

**Основы аналитической механики**

Возможные (виртуальные) перемещения системы *(δs, δϕ)* – любая совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент наложенными на систему связями. Возможная (виртуальная) работа *δА* – элементарная работа, которую, действующая сила могла бы совершить на возможном перемещении.

Связи являются идеальными, если сумма элементарных работ реакций этих связей при любом возможном перемещении системы равна нулю, т.е.



Статический принцип возможных перемещений:



Общее уравнение динамики .

.

.

Общее уравнение динамики в обобщённых координатах - уравнение Лагранжа второго рода.

, (*i*=1,2…*s*) , 

Оператор 

носит название оператор Эйлера-Лагранжа. *s* – число степеней свободы системы (число независимых координат); *qi* – обобщенная координата (координаты *x.y.z*, угол *φ,ψ*, площадь и др.); – обобщенная скорость (линейная скорость, угловая, секторная и др.).

Для консервативной системы ,  – потенциальная энергия. Если ввести функцию Лагранжа: L = T – П,

тогда  – уравнения Лагранжа второго рода для консервативной системы.

**Содержание тестов по статике**

1. Что такое момент силы относительно точки?
2. Чему равен момент силы *F* с проекциями на оси декартовой системы координат (1,2,3) относительно оси *Oy,* если координаты точки ее приложенная (0,1,5)
3. Напишите условия равновесия сходящейся системы сил в векторной форме, а также в проекциях на оси декартовой системы координат.
4. Что такое пара сил, чему равен ее момент?
5. Как зависит главный момент от выбора центра приведения, прокомментируйте введенные обозначения?

Р

F

О

А

В

ά

β

1. Чему равен момент силы Р=10 н и F=15н относительно оси 0Z , перпендикулярной плоскости рисунка, если ОА= 0.1м, АВ=0.15м Углы ά и β равны соответственно π/6 и π/4. Все силы лежат в плоскости чертежа.
2. Напишите условие равновесия твердого тела ( в самом общем случае).
3. Какие уравнения равновесия необходимо записать для плоской системы сил, если все силы расположены в плоскости *XOY* ( варианты *XOZ,YOZ* )?
4. Крышка ABCD открыта на угол α=π/6 и удерживается в этом положении стержнем СЕ. Отношение АВ/ВС=3/4 Чему равны проекции силы ***F*** на указанные оси координат?

C

X

Y

Z

A

B

D

***F***

E

α

1. Чему равен момент силы ***F*** относительно оси OX (OZ)? Сила ***F*** направлена по линии ВD
2. Какие уравнения равновесия необходимо записать для системы сил, параллельных оси *OY* (варианты *OX,OZ* ) *?*
3. Сформулируйте теорему Пуансо.
4. Какие статические инварианты Вам известны, прокомментируйте введенные обозначения?
5. В каких случаях система сил приводится к равнодействующей?
6. Приведите указанную на рисунке систему сил к силе и паре. Равные силы направлены по диагоналям граней кубика со стороной *b*.
7. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю ?

*У*

*Х*

*Z*

1. Сформулируйте теорему Вариньона.
2. Векторная формула центра параллельных сил.
3. Докажите, что система параллельных сил приводится к равнодействующей.
4. Векторная формула центра тяжести , прокомментируйте введенные обозначения.
5. Где находится центр тяжести указанной фигуры, состоящей из квадрата и равностороннего треугольника со стороной *в*?..

F

α

1. Чему равна сила трения в указанном примере, если вес груза 100 н, угол наклона плоскости π/4, сила F=50 н, а коэффициент трения скольжения f=0.4?

**Содержание тестов по кинематике точки и твердого тела.**

1. Векторная формула скорости точки. Чему равна скорость точки, если ее движение задано законом

x(t)= f1(t), y(t)= f2(t), z(t)= f3(t) .

1. Векторная формула ускорения точки . Чему равно ускорение точки, если ее движение задано законом x(t)=  y(t)=  z(t)= 
2. Формула нормального ускорения точки, прокомментируйте введенные обозначения. Когда оно равно нулю?
3. Чему равно касательное ускорение точки, если ее движение задано законом  
    x(t)= f1(t), y(t)= f2(t), z(t)= f3(t) ?
4. Как направлен вектор угловой скорости и вектор углового ускорения тела, вращающегося относительно неподвижной оси ?

29. Векторная формула (Эйлера) скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

30. .Какие ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Вам известны, прокомментируйте введенные обозначения?

1. Чему равно и как направлено осестремительное ускорение?
2. Векторная формула скоростей точек плоской фигуры.
3. Определите скорости и угловую скорость плоской фигуры, представленной на рис., если известны углы длина отрезка и скорость одного из концов.

V1

V2

φ

ψ

φ(t)

X

Y

M,l

M,l

M2

1. Приведите примеры нахождения мгновенного центра скоростей. Где находится мгн. центр скоростей в указанном примере?
2. Дайте определение прямой и обратной (основной) задачи динамики, в чем разница между этими задачами?
3. Напишите формулу центра масс системы.
4. Сосчитайте положение центра масс шатунно-кривошипного механизма, указанного на рисунке в функции от угла φ(t). Длина стержня L.
5. Какие уравнения кинетостатики ( в векторном виде) Вам известны?
6. Теорема об изменении главного вектора количества движения
7. Сформулируйте теорему о движении центра масс.
8. Как переместится центр доски, если стоящие по краям люди массами М1, М2 поменяются местами на длину L. Трение между доской и полом отсутствует, масса доски М3.

М1

М2

M3

L

1. Векторная формула кинетического момента системы точек.
2. Теорема об изменении кинетического момента.
3. Дайте определения центральной и главной оси инерции.
4. Напишите дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси.

L

1. Как изменится угловая скорость вращения стержня длины L и массы M1 , если груз массы М переместится из положения h на конец стержня.
2. Напишите формулу Гюйгенса.
3. Сформулируйте теорему Кенига.
4. Кинетическая энергия тела при плоском движении (две формулы).
5. Чему равна кинетическая энергия катящегося однородного цилиндра?
6. Напишите формулу работы упругой силы.
7. Напишите формулу работы сил, приложенных к твердому телу (общий случай).



Рис 2.

1. Чему равна работа силы трения цилиндра, катящегося по шероховатой поверхности (разберите два случая).
2. Теорема об изменении кинетической энергии ( две формулировки).
3. Какой путь пройдет центр однородного цилиндра, катящегося по наклонной плоскости, чтобы его скорость возросла в два раза, Коэффициент трения качения равен *К.* (рис 2)

57. Чему равна потенциальная энергия физического маятника, состоящего из кольца радиуса -- R , массы m1 и стержня длины l и массы m2 ,если он отклонен от вертикали на угол φ .

58. Чему равна кинетическая энергия этого маятника в его нижнем положении, если он был отпущен без начальной скорости

φ