

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ,

д.ф.-м.н., член-корр. РАН

А. М. Кривцов

«___» _____ 2022 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

магистерская диссертация

МОДЕЛИРОВАНИЕ АКРОБАТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, ОСНОВАННЫХ НА ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ

по направлению подготовки 01.04.03 «Механика и математическое
моделирование»

Направленность (профиль) 01.04.03_01 «Механика деформируемого твердого
тела»

Выполнил

студент гр. 5040103/00101

<подпись>

А.О. Михайлова

Руководитель

профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

<подпись>

Е.А. Иванова

Санкт-Петербург

2022

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

Физико-механический институт, Высшая школа теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ
Директор ВШТМиМФ
А.М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту _____ Михайловой Анастасии Олеговне, группы 5040103/00101
фамилия, имя, отчество (при наличии), номер группы

1. Тема работы: Моделирование акробатических элементов, основанных на изменении момента инерции
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 1 июня 2022 г.
3. Исходные данные по работе: Научные статьи по теме работы, основные балансовые соотношения (баланс количества движения, баланс кинетического момента, баланс полной механической энергии), обобщение теоремы Штейнера на тензор инерции.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
Формулировка задачи и построение математической модели акробатических элементов
Расчет зависимости угла поворота от времени без учёта сопротивления воздуха
Подбор функции, задающей такое изменение момента инерции, которое обеспечивало бы успешное выполнение моделируемого акробатического элемента
Исследование влияния параметров модели на решение дифференциальных уравнений
Исследование устойчивости решения
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей):
График зависимости угла поворота от времени
График зависимости компонент тензора инерции от времени
График, отражающий влияние параметров модели и начальных условий на решение
6. Консультанты по работе: _____
7. Дата выдачи задания 13 мая 2022 г.

Руководитель ВКР _____ Е.А. Иванова
(подпись) инициалы, фамилия

Задание принял к исполнению 13 мая 2022 г.
(дата)

Студент _____ А.О. Михайлова
(подпись) инициалы, фамилия

РЕФЕРАТ

На 38 с., 38 рисунков

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ТЕНЗОР ИНЕРЦИИ, МОМЕНТ ИНЕРЦИИ, ОСЬ ВРАЩЕНИЯ, ТЕОРЕМА ГЮЙГЕНСА – ШТЕЙНЕРА, БАЛАНС КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ, БАЛАНС КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Тема выпускной квалификационной работы: «Моделирование акробатических элементов, основанных на изменении момента инерции».

Данная работа посвящена построению математических моделей акробатических элементов, выполняемых за счёт изменения тензора инерции, в частности прыжков в воду с вышки и танцевальных вращательных элементов. Задачи, решавшиеся в ходе исследования:

- 1) исследование способа изменения тензора инерции при выполнении рассматриваемых элементов и его математическое описание;
- 2) составление дифференциальных уравнений движения спортсмена;
- 3) численное решение полученных дифференциальных уравнений;
- 4) анализ влияния параметров модели и изменений в начальных условиях на решения.

Работа выполнена с опорой на видеозаписи выступлений спортсменов на различных спортивных мероприятиях, в том числе на летних юношеских Олимпийских играх 2018 года. Спортсмены представлены как системы твёрдых тел, для которых составляются и решаются уравнения движения. Численные решения уравнений методом Эйлера получены путём программирования в среде MATLAB.

Исследование влияния параметров модели и изменений в начальных условиях на решения уравнений модели позволяет установить связь между успешностью выполнения рассматриваемых элементов и особенностями движений спортсменов при их исполнении. Полученные результаты могут быть использованы в тренировочном процессе для анализа и корректировки исполнения подобных элементов.

ABSTRACT

38 pages, 38 figures

KEYWORDS: INERTIA TENSOR, THE MOMENT OF INERTIA, THE AXIS OF ROTATION, HUYGENS – SHTEINER THEOREM, CONSERVATION OF LINEAR MOMENTUM, CONSERVATION OF ANGULAR MOMENTUM

The subject of the graduate qualification work is “Modelling of acrobatic elements based on the alteration of the moment of inertia”.

This paper focuses on the creation of mathematical models of acrobatic elements performed through the alteration of the inertia tensor, in particular dives from a platform and turns in dancing. The research pursues the following goals:

- 1) the study of the methods of the inertia tensor alteration during the performance of the elements in question and their mathematical description;
- 2) the formulation of the differential equations describing an athlete's motion;
- 3) numerical solution of the resulting equations;
- 4) the analysis of the influence of the model's parameters and initial condition changes on the solution of the said equations.

The work is based on video records featuring athletes' performances at diverse sporting events, including the 2018 Summer Youth Olympics. Athletes are represented as rigid body systems, for which equations of motion are formulated and solved. The numerical solutions are obtained by programming in MATLAB numeric computing environment.

The study of the influence of the model's parameters and initial condition changes on the said solutions allows to establish relationships between a successful performance of the elements in question and the particularities of athletes' movements during their performance. The results thus obtained might be used for analysis and correction of the performance of such elements.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЫЖКА В ВОДУ С ВЫШКИ С ВЫПОЛНЕНИЕМ САЛЬТО ВПЕРЁД.....	6
1.1. Постановка задачи	6
1.2. Построение модели.....	7
1.3. Численное решение уравнения баланса кинетического момента	9
1.4. Влияние параметров модели и начальных условий на решение	10
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЫЖКА В ВОДУ С ВЫШКИ С ВЫПОЛНЕНИЕМ ВИНТОВОГО ОБОРОТА	13
2.1. Постановка задачи	13
2.2. Построение модели.....	14
2.3. Численное решение	16
2.4. Влияние параметров модели и начальных условий на решения	17
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ТАНЦЕВАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА	22
3.1. Постановка задачи.....	22
3.2. Построение модели	23
3.3. Численное решение.....	26
3.4. Влияние параметров модели и начальных условий на решения	27
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	37
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	38

ВВЕДЕНИЕ

Описание движения тела с переменным тензором инерции представляет собой часто решаемую задачу математического моделирования. Так, данная задача решается при описании движения летательных аппаратов, естественных и искусственных небесных тел. В настоящее время подобные вопросы достаточно широко освещены в литературе [1], [5], [6], [9], [14]. Тем не менее, к решению аналогичной задачи может быть сведено и описание движения человека при выполнении сложнокоординационных движений, основанных на изменении одной или нескольких компонент тензора инерции. К таким движениям, в частности, относятся акробатические элементы в разнообразных видах спорта.

Подобные элементы широко используются в ряде спортивных дисциплин: в фигурном катании, спортивной гимнастике, спортивных танцах, прыжках в воду с трамплина и с вышки и пр. – и требуют высокой точности исполнения. Разработка и анализ математических моделей таких элементов облегчает понимание физических процессов и явлений, протекающих во время их выполнения, и способствует выявлению параметров, наиболее значимых для успешного исполнения конкретного элемента. Результаты исследования модели могут быть использованы для определения оптимальных значений этих параметров и, как следствие, оптимизации тренировочного процесса.

ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЫЖКА В ВОДУ С ВЫШКИ С ВЫПОЛНЕНИЕМ САЛЬТО ВПЕРЁД

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим прыжок в воду с 10-метровой вышки с выполнением сальто вперёд. Для построения математической модели представим спортсмена системой твёрдых тел: цилиндров и шара (см. рисунок 1.1). Рассматриваемый акробатический элемент можно разделить на четыре этапа:

- 1) группировка;
- 2) выполнение сальто;
- 3) выход из группировки;
- 4) вход в воду.

Изменение тензора инерции происходит на первом и четвёртом этапах для набора необходимой угловой скорости и её последующего гашения соответственно. Задача состоит в составлении и решении дифференциальных уравнений движения, описывающих данный спортивный элемент.

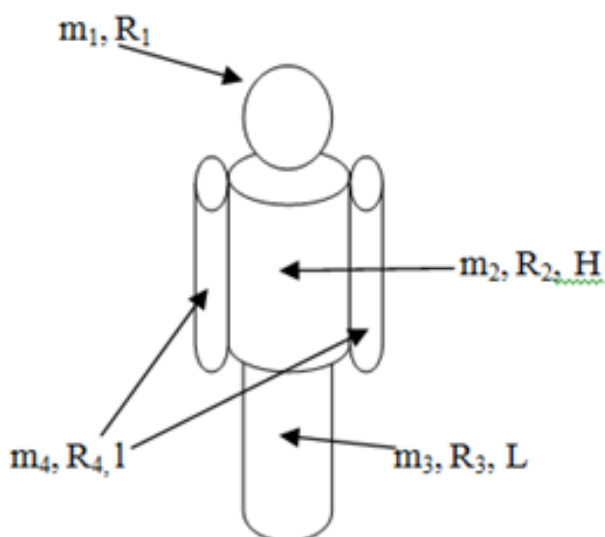


Рисунок 1.1. Представление спортсмена как системы твёрдых тел

1.2. Построение модели

Движение спортсмена описывается уравнениями баланса количества движения и баланса кинетического момента [4], [7]:

$$\begin{cases} m\dot{\underline{v}} = \underline{F} \\ (\underline{J} \cdot \underline{\omega})' = \underline{M} \end{cases},$$

где m – масса спортсмена, \underline{F} – вектор равнодействующей внешних сил, \underline{M} – суммарный момент внешних сил, \underline{v} и $\underline{\omega}$ – трансляционная и угловая скорости соответственно, \underline{J} – тензор инерции с переменными компонентами [13]:

$$\underline{J}(t) = \begin{pmatrix} J_{xx}(t) & J_{xy}(t) & J_{xz}(t) \\ J_{yx}(t) & J_{yy}(t) & J_{yz}(t) \\ J_{zx}(t) & J_{zy}(t) & J_{zz}(t) \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что сопротивление воздуха пренебрежимо мало; в таком случае уравнения движения окажутся однородными и примут следующий вид:

$$\begin{cases} m\dot{\underline{v}} = 0 \\ (\underline{J} \cdot \underline{\omega})' = \underline{0} \end{cases}.$$

Первое уравнение позволяет оценить время полёта; второе служит для определения зависимости угла поворота от времени. Нетрудно заметить, что оно легко интегрируется аналитически:

$$\underline{J} \cdot \underline{\omega} = const,$$

где $const = \underline{J}_0 \cdot \underline{\omega}_0$ определяется начальными условиями.

Введём прямоугольную декартову систему координат, связанную с цилиндром, при помощи которого моделируется туловище; начало отсчёта поместим в геометрическом центре цилиндра (см. рисунок 1.2.1). Выполнение группировки и выхода из неё будет отражаться изменением углов α и β – углов, которые составляют ноги и руки спортсмена с ортом вертикальной оси \underline{k} и которые представляют собой заданные функции времени (рисунок 1.2.2).

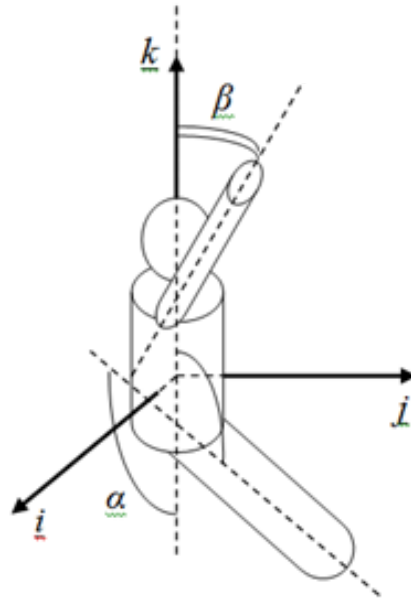


Рисунок 1.2.1. Спортсмен при выполнении группировки и выходе из неё

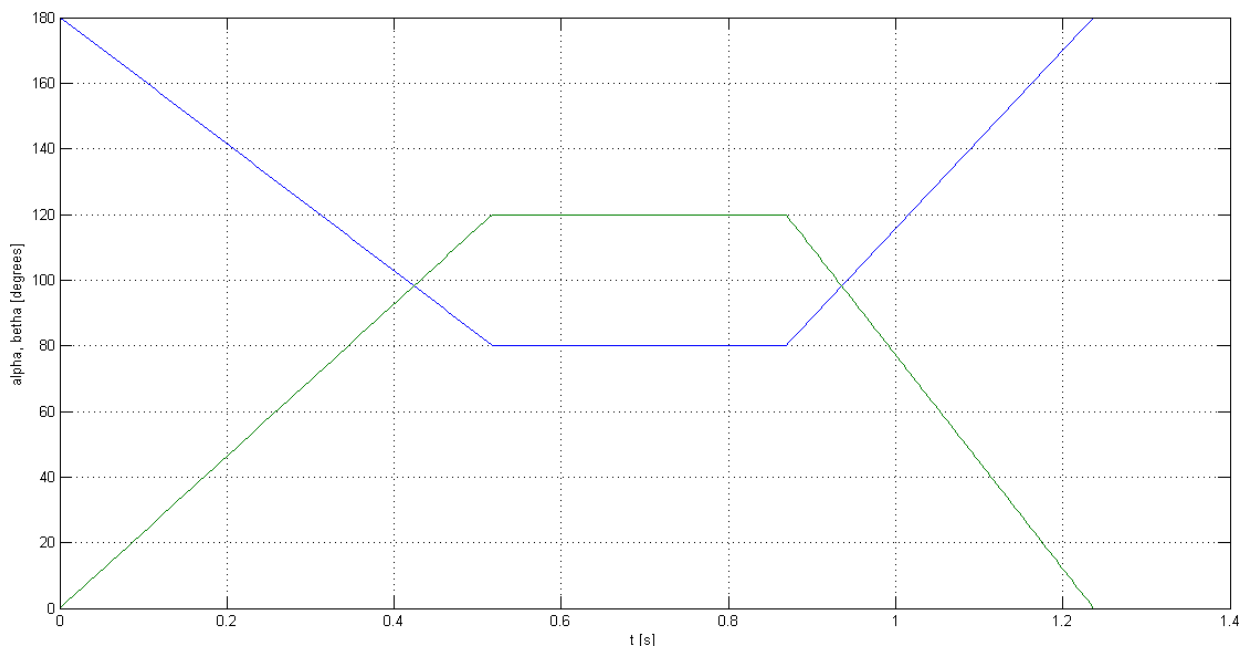


Рисунок 1.2.2. Зависимость углов α и β от времени

Ось вращения пройдёт через центр масс спортсмена. Поскольку поворот осуществляется вокруг единственной координатной оси – оси с ортом \underline{i} , – то уравнение баланса кинетического момента может быть записано как скалярное уравнение:

$$J_{xx} \cdot \omega = (J_{xx})_0 \cdot \omega_0,$$

где $\omega = \dot{\varphi}$, φ – угол поворота.

Осевой момент инерции спортсмена $J_{xx} = J$ вычисляется как сумма тензоров инерции всех составных частей [8]:

$$J = \sum_{k=1}^5 J_k,$$

$$J_1 = m_1 \left(\frac{2}{5} R_1^2 + d_1^2 \right); J_2 = m_2 \left(\frac{R_2^2}{4} + \frac{H^2}{12} + d_2^2 \right); J_3 = m_3 \left(\frac{R_3^2}{4} + \frac{L^2}{12} + d_3^2 \right);$$

$$J_4 = J_5 = m_4 \left(\frac{R_4^2}{4} + \frac{l^2}{12} + d_4^2 \right).$$

Здесь величины d_k определяют расстояния от центров масс составных частей до актуального положения центра масс системы $C(C_x, C_y, C_z)$ [8]:

$$C_x = \frac{1}{M} \sum_k m_k C_{x_k}, C_y = \frac{1}{M} \sum_k m_k C_{y_k}, C_z = \frac{1}{M} \sum_k m_k C_{z_k} \quad (3),$$

где $M = \sum_k m_k$.

1.3. Численное решение уравнения баланса кинетического момента

Полученное выше скалярное уравнение баланса кинетического момента было решено численно методом Эйлера [2] путём программирования средствами MATLAB. Результаты представлены на рисунке 1.3: слева приведена зависимость угла поворота спортсмена (в градусах) вокруг оси с ортом \hat{i} от времени, а справа – зависимость числа выполненных оборотов от времени.

Дальнейшая работа заключается в исследовании влияния параметров модели, а именно времени, затрачиваемого на группировку и выход из неё, на решение, то есть на успешность выполнения прыжка, а также в исследовании влияния изменений в начальных условиях на решение.

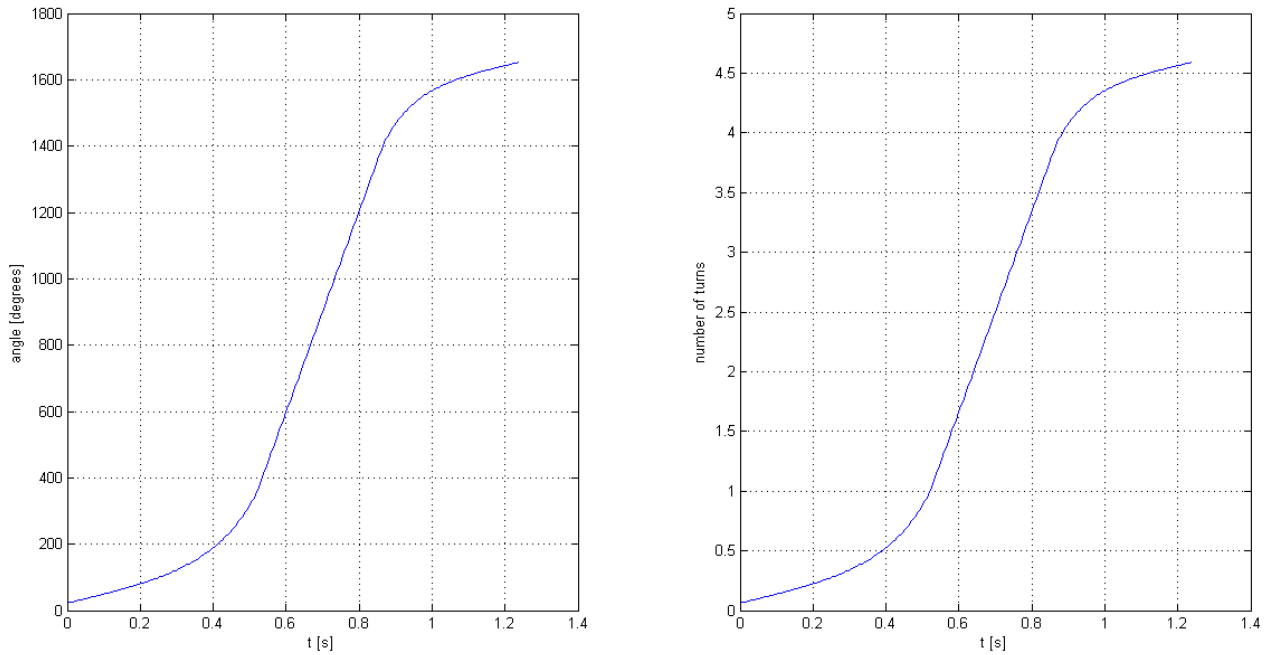


Рисунок 1.3. Зависимость угла поворота и числа выполненных оборотов от времени

1.4. Влияние параметров модели и начальных условий на решение

Для изучения влияния времени группировки на успешность выполнения прыжка этому времени придавались различные значения в диапазоне от 0,48 с. до 0,56 с. Для каждого из заданных значений вычислялись число выполняемых оборотов и высота центра масс над водой к моменту выхода из группировки. Полученные результаты представлены на рисунке 1.4.1. Числу оборотов соответствует синяя линия, высоте центра масс – зелёная.

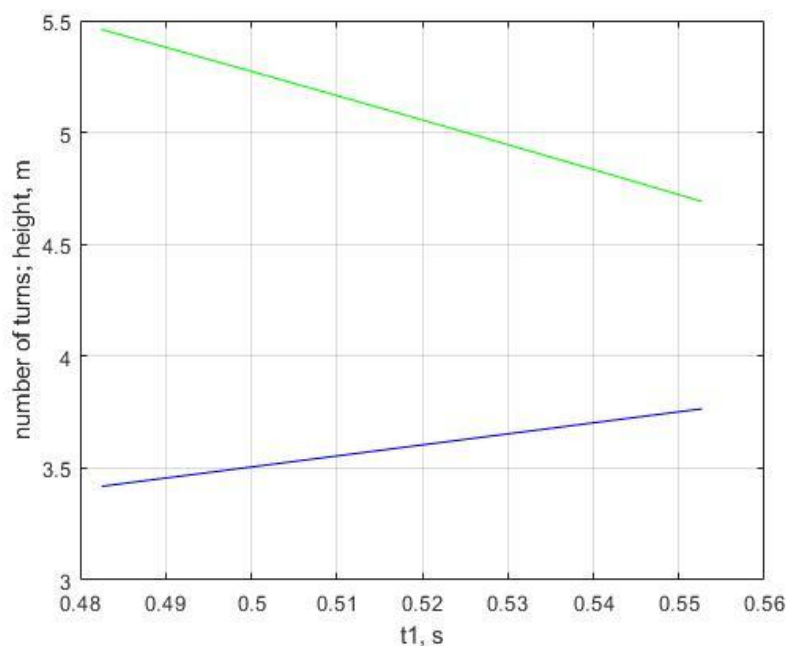


Рисунок 1.4.1. Влияние времени группировки на выполнение прыжка

Как видно из графика, при всех рассматриваемых значениях параметра спортсмен успевает выйти из группировки на достаточной высоте над поверхностью воды. Однако при времени группировки, близком к 0,55 с., число оборотов составляет приблизительно 3,75, что означает вход вводу плашмя, а не вертикально. Значение параметра, равное 0,5 с., напротив, даёт ровно 3,5 оборота: спортсмен входит в воду головой вниз.

На рисунке 1.4.2 представлены результаты аналогичного исследования влияния времени, затрачиваемого на выход из группировки, на успешность выполнения элемента. На основании приведённого графика можно заключить, что оно не оказывает практически никакого влияния на результативность выполнения прыжка: число оборотов меняется весьма незначительно, и высота центра масс над водой для каждого значения параметра говорит о своевременном выходе из группировки.

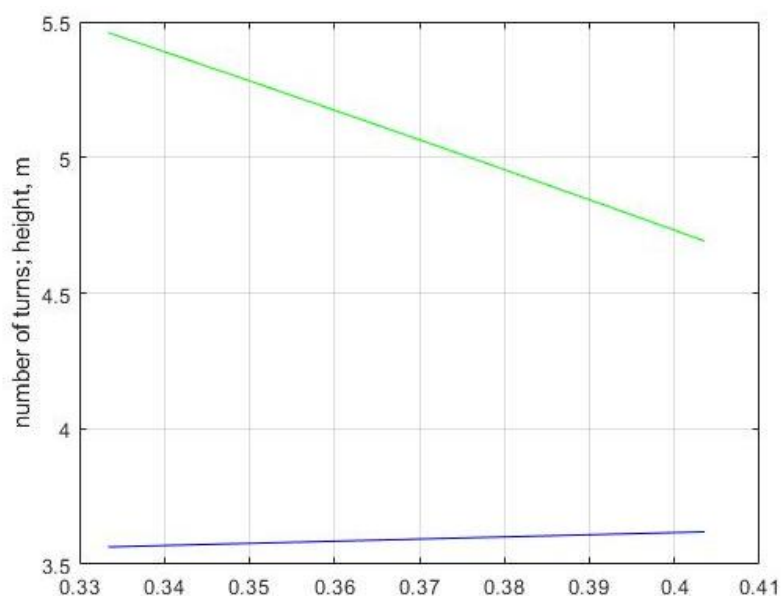


Рисунок 1.4.2. Влияние времени выхода из группировки на выполнение прыжка

Наконец, на рисунке 1.4.3 представлены результаты исследования чувствительности модели к начальным условиям. В рамках этого исследования начальному значению угловой скорости спортсмена придавалось изменение от 0 до 8% (горизонтальная ось) и вычислялось соответствующее изменение решения, т.е. угла поворота (вертикальная ось).

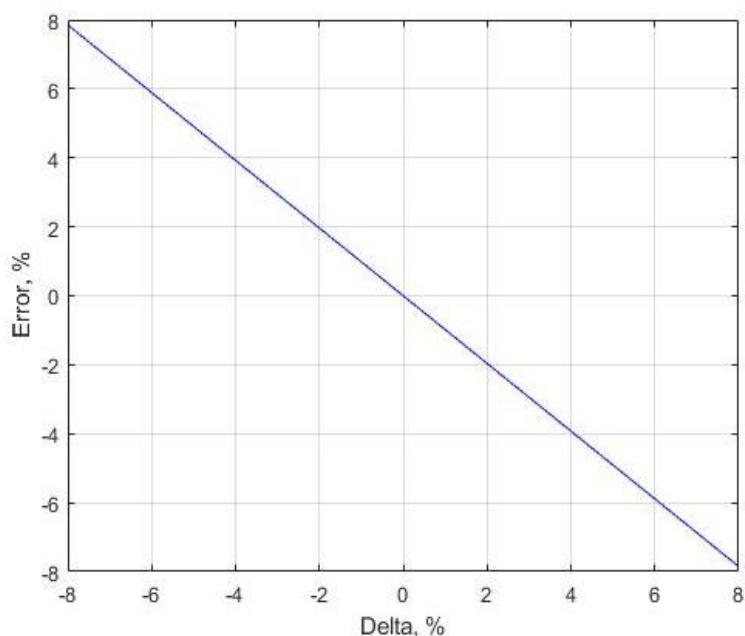


Рисунок 1.4.3. Чувствительность решения к начальным условиям

Можем видеть, что зависимость погрешности решения от погрешности начальных условий имеет линейный характер; более того, эти величины принимают практически равные по абсолютной величине значения.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЫЖКА В ВОДУ С ВЫШКИ С ВЫПОЛНЕНИЕМ ВИНТОВОГО ОБОРОТА

2.1. Постановка задачи

Перейдём к рассмотрению прыжка в воду с 10-метровой вышки с выполнением винтового оборота. Спортсмена по-прежнему будем моделировать системой твёрдых тел, аналогичной той, что использовалась в предыдущей главе. Теперь, однако, разделим каждую из рук на две части: плечо и предплечье, – так как для выполнения данного элемента спортсмен сгибает и разгибает руки в локтевых суставах (см. рисунки 2.1.1 и 2.1.2). Прямоугольная декартова система координат вводится так же, как и в предыдущем случае.

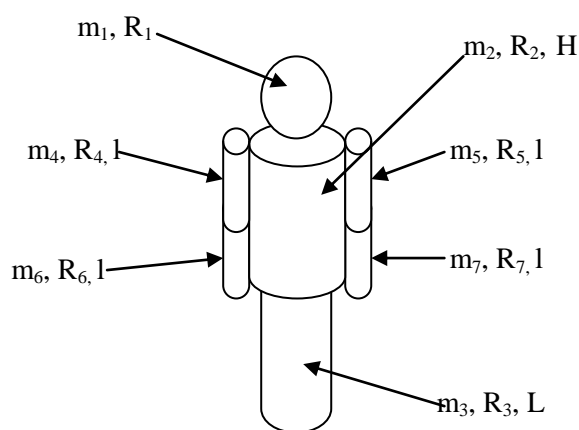


Рисунок 2.1.2. Представление спортсмена как системы твёрдых тел

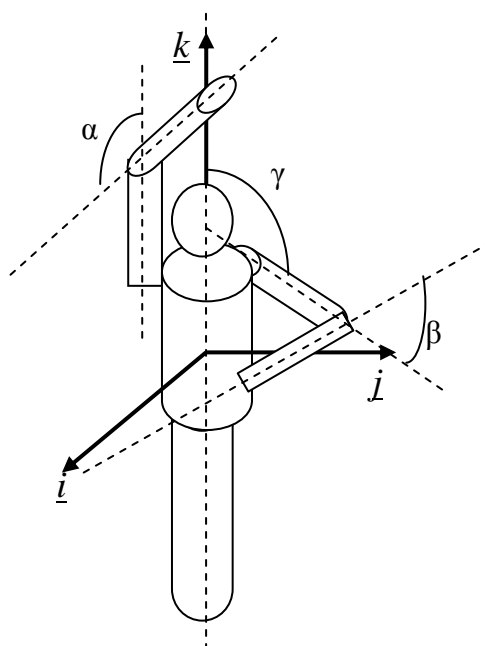


Рисунок 2.1.2. Имитация движений рук для выполнения винтового оборота

Изменение тензора инерции происходит за счёт сгибания и разгибания рук в локтевых суставах и поднятия и опускания плеча правой руки. В рамках модели эти движения соответствуют изменению углов α , β и γ (см. рисунок 2.1.2), являющихся заданными функциями времени.

Задача по-прежнему состоит в составлении и решении дифференциальных уравнений движения спортсмена при выполнении данного элемента.

2.2. Построение модели

Уравнения движения ничем не отличаются от рассмотренного ранее случая и представляют собой ту же самую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m\dot{\underline{v}} = \underline{0} \\ (\underline{J} \cdot \underline{\omega})' = \underline{0} \end{cases}$$

Снова проинтегрируем второе уравнение аналитически:

$$\underline{J} \cdot \underline{\omega} = J_0 \cdot \underline{\omega}_0 = const.$$

Запишем полученное уравнение, представив тензор инерции в отсчётной конфигурации и введя тензор поворота $\underline{P}(t)$:

$$\underline{P}(t) \cdot \underline{J}_*(t) \cdot \underline{P}^T(t) \cdot \underline{\omega}(t) = \underline{P}(0) \cdot \underline{J}_*(0) \cdot \underline{P}^T(0) \cdot \underline{\omega}(0).$$

Здесь тензор инерции $\underline{J}_*(t)$ зависит только от взаимного расположения частей тела; тензор поворота $\underline{P}(t)$ отвечает за повороты спортсмена вокруг координатных осей.

Отметим, что при моделировании данного элемента необходимо учесть вращения вокруг каждой из трёх координатных осей: винтовой оборот вокруг оси \underline{k} , поворот вокруг оси \underline{j} для входа в воду головой, а также незначительный поворот вокруг оси \underline{i} . Следовательно, $\underline{P}(t)$ может быть представлен как композиция трёх тензоров поворота вокруг каждой из координатных осей, после чего можно составить выражение для угловой скорости $\underline{\omega}$ [4]:

$$\begin{aligned} \underline{P}(t) &= \underline{P}_3(\psi(t)\underline{j}) \cdot \underline{P}_2(\beta(t)\underline{i}) \cdot \underline{P}_1(\varphi(t)\underline{k}), \\ \underline{\omega} &= \dot{\psi}\underline{j} + \underline{P}_3(\psi)\dot{\beta}\underline{i} + \underline{P}_3(\psi) \cdot \underline{P}_2(\beta)\dot{\varphi}\underline{k}. \end{aligned}$$

Для дальнейших расчётов вновь потребуется определить положение центра масс спортсмена $C(C_x, C_y, C_z)$ [8]:

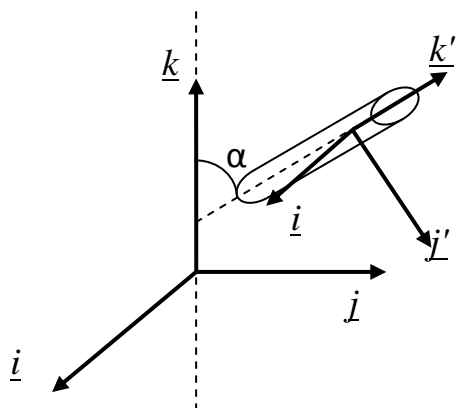
$$C_x = \frac{1}{M} \sum_k m_k C_{x_k}, C_y = \frac{1}{M} \sum_k m_k C_{y_k}, C_z = \frac{1}{M} \sum_k m_k C_{z_k}$$

($C_{x_k}, C_{y_k}, C_{z_k}$ – координаты центров масс частей тела, $M = \sum_k m_k$).

Особый интерес в данной задаче представляет вычисление тензора инерции спортсмена. Оно осуществляется в несколько этапов. На первом этапе вычисляется тензор инерции каждой отдельно взятой части тела в диагональном виде. Далее полученный тензор инерции пересчитывается через базисные векторы основной системы координат, введённой ранее. Затем при помощи теоремы Гюйгенса – Штейнера для тензоров вычисляется тензор инерции рассматриваемой части тела относительно центра масс

системы. Наконец, на основании принципа суперпозиции определяется тензор инерции спортсмена как системы нескольких твёрдых тел.

Алгоритм вычисления тензора инерции приведён ниже.



Вычисление тензора инерции:

$$1) J'_{*k} = J'_{11*k} \underline{i}\underline{i} + J'_{22*k} \underline{j}'\underline{j}' + J'_{33*k} \underline{k}'\underline{k}';$$

$$2) J''_{*k} = \mathbf{P}(-\alpha(\underline{i})) \cdot J'_{*k} \cdot \mathbf{P}^T(-\alpha(\underline{i}));$$

3) Теорема Штейнера:

$$(J_{*k})_{mn} = (J''_{*k})_{mn} + m_k(a^2\delta_{mn} - a_m a_n),$$

где \mathbf{a} – смещение центра рассматриваемого тела относительно $C(C_x, C_y, C_z)$;

$$4) J_* = \sum_k J_{*k}.$$

Рисунок 2.2.1. Отдельно взятая часть тела спортсмена в рамках модели

2.3. Численное решение

Подстановка выражений для тензора $\mathbf{P}(t)$ и вектора $\underline{\omega}$ в уравнение баланса кинетического момента с последующим проецированием данного уравнения на орты координатных осей даёт систему трёх дифференциальных уравнений относительно трёх углов поворота спортсмена. Полученная таким образом система уравнений была решена численно в пакете MATLAB. Результаты – зависимости углов поворота от времени – представлены на рисунке 2.3.2. На рисунке 2.3.1 показано, каким образом изменяются углы в локтевых и плечевых суставах спортсмена в ходе выполнения прыжка.

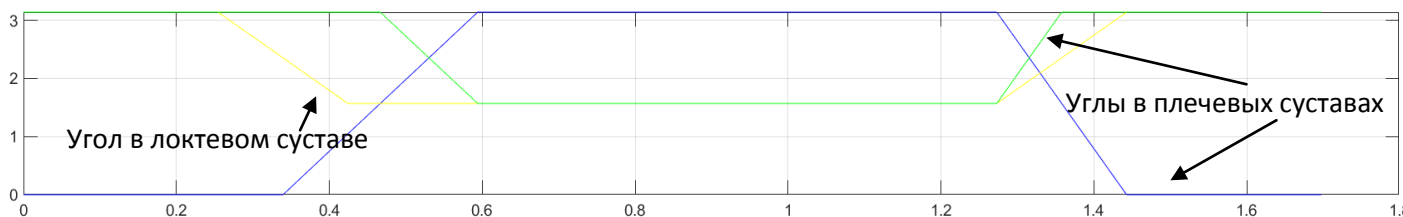


Рисунок 2.3.1. Изменение углов в локтевом и плечевых суставах

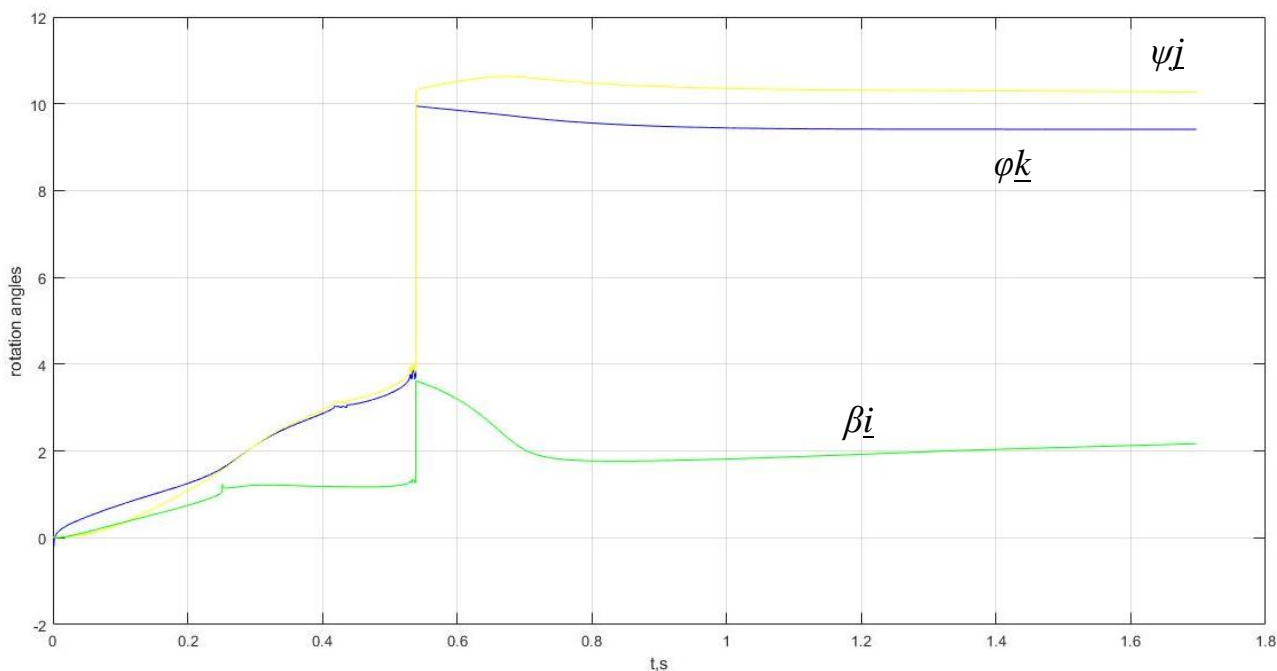


Рисунок 2.3.2. Зависимость углов поворота от времени

Как видно из рисунка 2.3.2, при заданных условиях спортсмен выполняет около 3,5 винтовых оборотов и 3,5 оборота вокруг оси с ортом \underline{j} , что позволяет ему войти в воду головой вниз. При этом имеет место и незначительный поворот вокруг третьей оси.

2.4. Влияние параметров модели и начальных условий на решения

Задачей работы на данном этапе является исследование влияния параметров модели – затрачиваемых на изменение положения рук временных промежутков Δt_1 и Δt_2 – на успешность выполнения прыжка, а также исследование чувствительности решения к изменениям в начальных условиях.

Для изучения влияния промежутка времени Δt_1 на успешность выполнения прыжка ему придавались различные значения в диапазоне от 0,424 с до 0,463 с. Для каждого из данных значений вычислялось число оборотов, выполняемых вокруг каждой из трёх координатных осей. Полученные результаты представлены на рисунке 2.4.1.

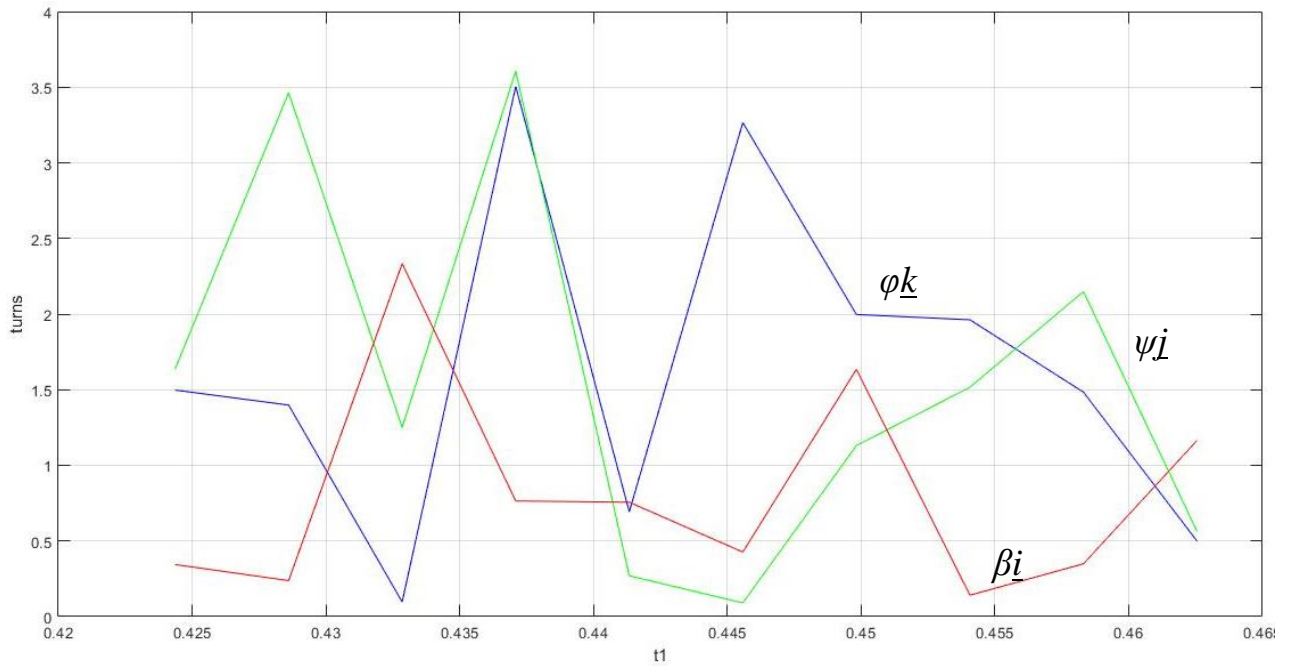


Рисунок 2.4.1. Влияние времени Δt_1 на выполнение прыжка

Как видно из графика, рассматриваемый промежуток времени оказывает существенное влияние на успешность выполнения данного акробатического элемента. Например, при $\Delta t_1 \approx 0,445$ с спортсмен выполнит три винтовых оборота и пол-оборота вокруг оси с ортом \underline{j} , что обеспечит вход в воду головой вниз; при этом колебания вокруг третьей оси будут незначительны. Таким образом, значение $\Delta t_1 \approx 0,445$ с позволит спортсмену успешно справиться с элементом. Значение же $\Delta t_1 \approx 0,432$, напротив, даст отрицательный результат: винтовой оборот совершить не удастся, а поворот вокруг оси с ортом \underline{k} , наоборот, окажется более чем ощутимым (2 полных оборота).

На рисунке 2.4.2 представлены результаты аналогичного исследования влияния промежутка времени Δt_2 . На основании приведённого графика можно заключить, что оно не оказывает никакого влияния на результативность выполнения прыжка.

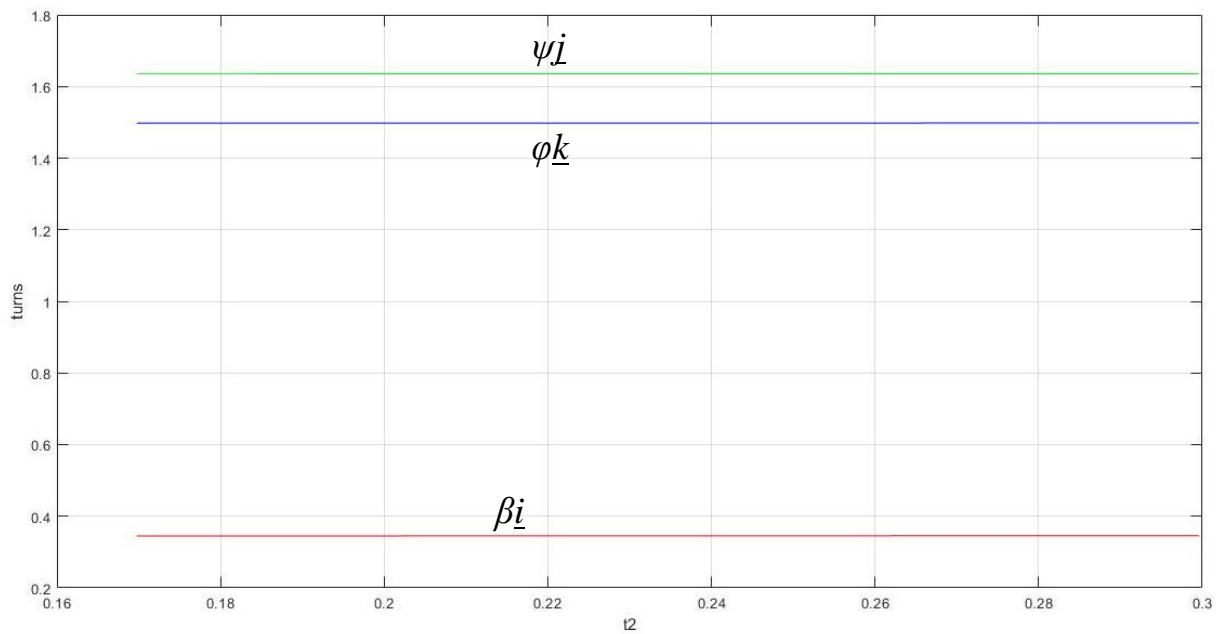


Рисунок 2.4.2. Влияние времени Δt_2 на выполнение прыжка

Наконец, на рисунках 2.4.3-2.4.6 представлены результаты исследования чувствительности модели к начальным условиям. В рамках этого исследования начальным значениям угловых скоростей вращения спортсмена вокруг каждой из осей придавалось изменение от 0 до 8% (горизонтальная ось) и вычислялось соответствующее изменение решения, т.е. углов поворота (вертикальная ось). Можем видеть, что малые изменения в начальных условиях могут провоцировать существенные изменения в самом решении. Стоит также отметить, что начальная скорость вращения вокруг оси j влияет на поворот вокруг оси с ортом k намного сильнее, чем на повороты вокруг двух других осей (см. рисунок 2.4.3).

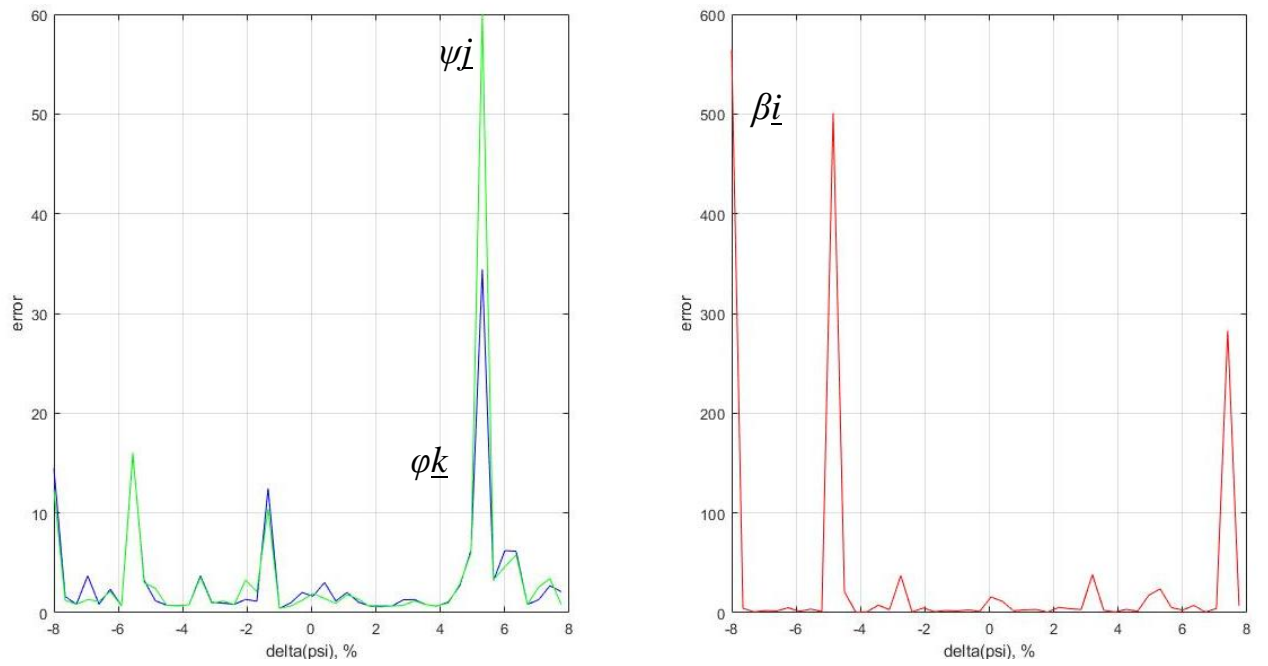


Рисунок 2.4.3. Чувствительность решения к начальной скорости вращения вокруг оси \underline{j}

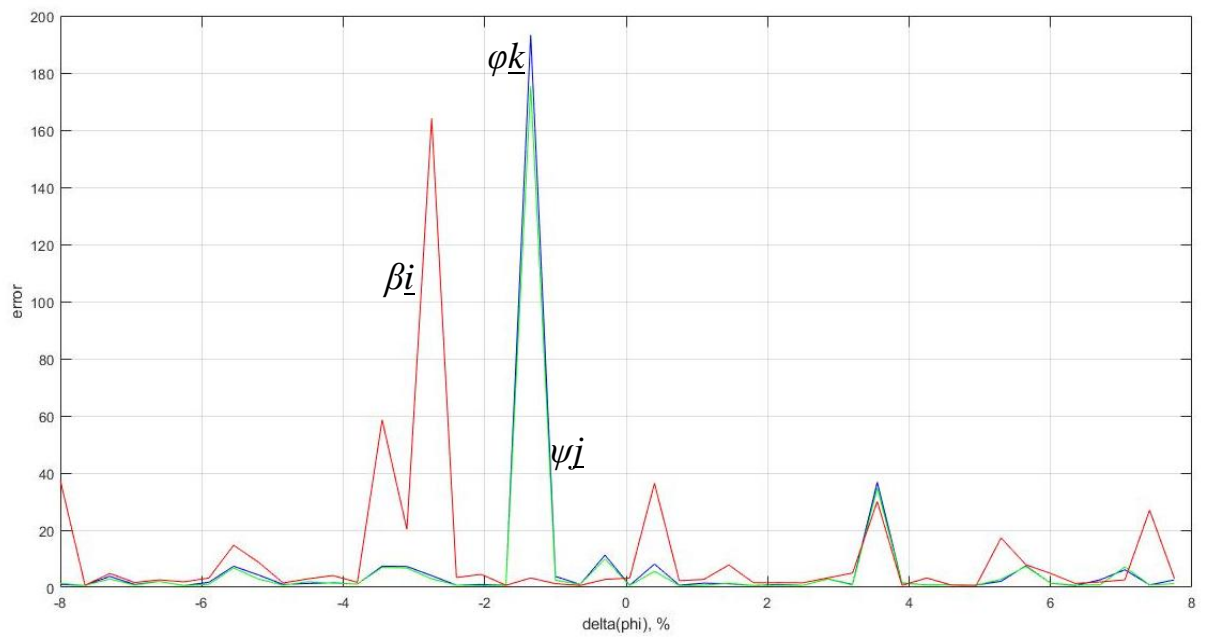


Рисунок 2.4.4. Чувствительность решения к начальной скорости вращения вокруг оси \underline{k}

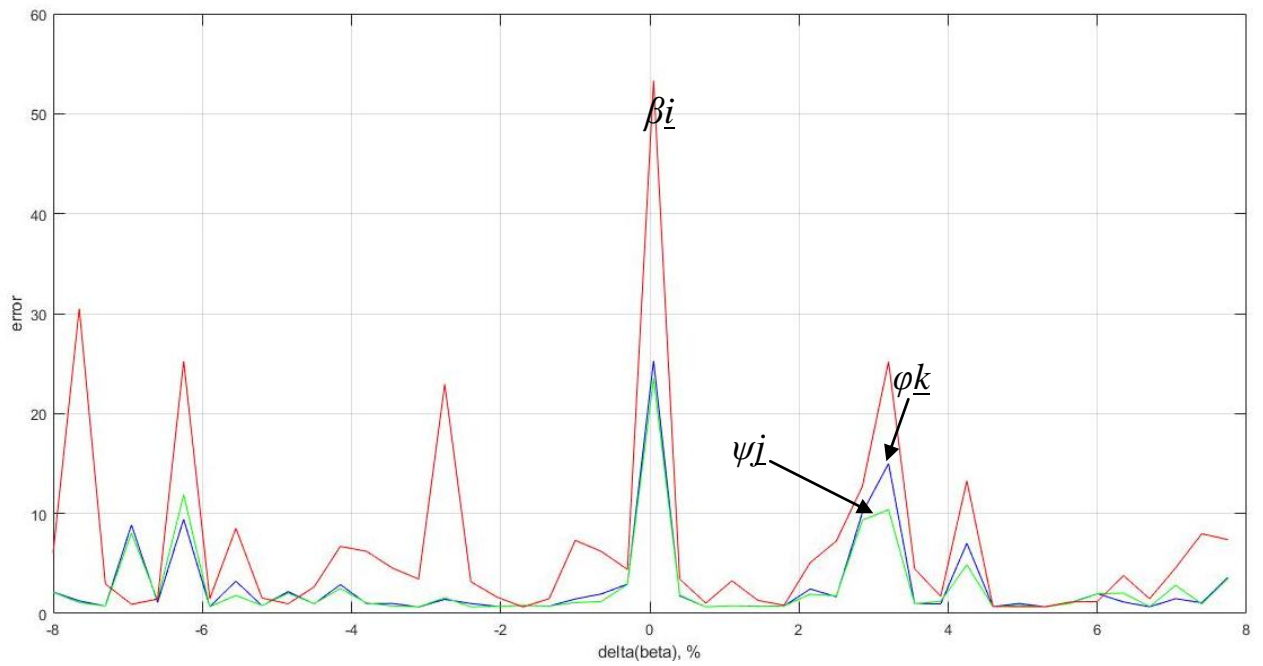


Рисунок 2.4.5. Чувствительность решения к начальной скорости вращения вокруг оси \underline{i}

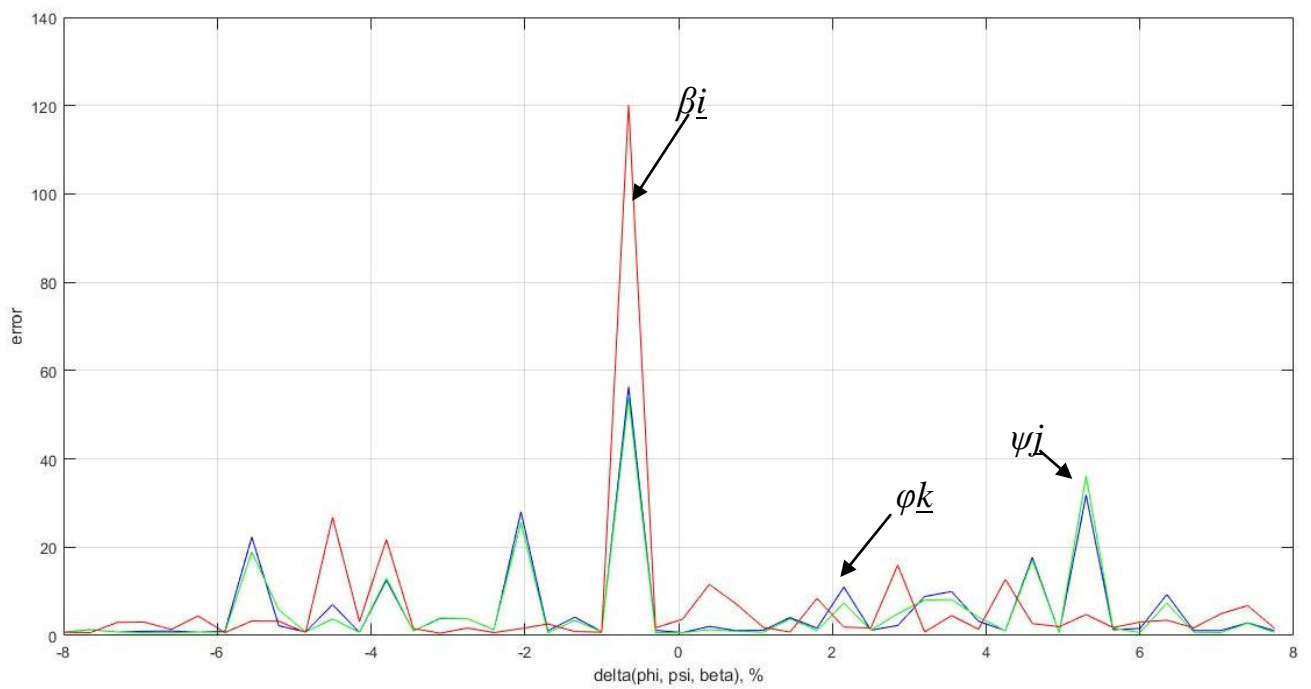


Рисунок 2.4.6. Чувствительность решения к одновременному изменению всех трёх начальных скоростей вращения

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ТАНЦЕВАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

3.1. Постановка задачи

Ещё один элемент, рассматриваемый в рамках данной работы, – это спот-поворот, один из базовых и наиболее распространённых поворотов, используемых в танцевальном спорте. Спортсмен по-прежнему будет представляться системой твёрдых тел, но, в отличие от предыдущих случаев, каждую ногу необходимо моделировать отдельным цилиндром (для прыжков в воду это не было целесообразным). Модель спортсмена схематично изображена на рисунке 3.1.

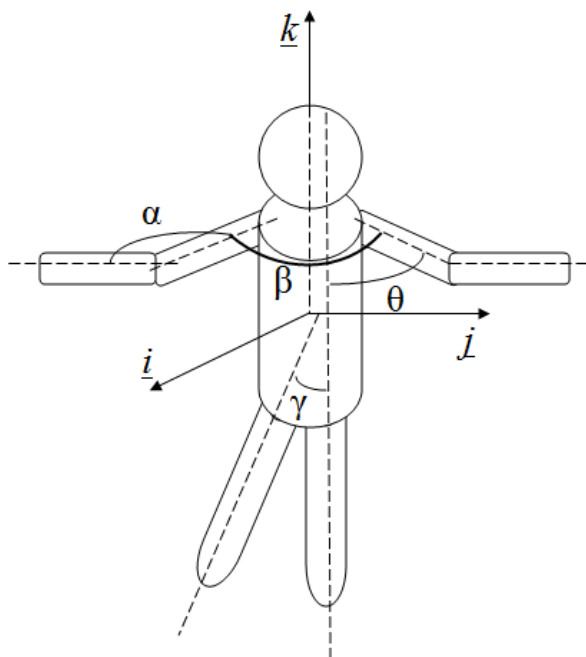


Рисунок 3.1. Модель спортсмена

Поворот осуществляется вокруг оси, проходящей через опорную ногу. Изменение тензора инерции происходит за счёт закрытия и открытия рук, что в рамках модели отражается изменением углов α и θ в локтевых суставах и между плечом и вертикалью соответственно, угла β между плечами, а также сбора ног, то есть изменения угла γ .

Как и ранее, задача состоит в составлении и решении дифференциальных уравнений движения для определения зависимости угла поворота от времени и в последующем анализе построенной модели.

3.2. Построение модели

Как уже упоминалось выше, спот-поворот выполняется вокруг оси, проходящей через опорную ногу; поступательного движения при этом не происходит. Следовательно, интерес будет представлять лишь уравнение баланса кинетического момента, причём в правой его части появится член, отвечающий за трение, препятствующее вращению вокруг вертикальной оси:

$$(\underline{J} \cdot \underline{\omega})' = -\alpha \underline{\omega}_k,$$

где α – коэффициент трения, $\underline{\omega}_k = (\underline{\omega} \cdot \underline{k})\underline{k}$ – составляющая угловой скорости, направленная вдоль оси с ортом \underline{k} .

При исполнении рассматриваемого элемента углы поворотов вокруг осей \underline{i} и \underline{j} , как и соответствующие угловые скорости, незначительны по сравнению с поворотом $\underline{\varphi}_1$ вокруг оси \underline{k} и угловой скоростью вращения вокруг данной оси. Это позволяет положить $\underline{\omega}_k \approx \underline{\dot{\varphi}}_1$ и проинтегрировать уравнение. В результате придём к следующему соотношению:

$$\underline{J} \cdot \underline{\omega} = -\alpha \underline{\varphi}_1 + \underline{J}_0 \cdot \underline{\omega}_0.$$

Отметим, что, так как вращения вокруг других осей ничем не ограничены, в рассматриваемом случае присутствуют все три вращательные степени свободы, что следует учесть при построении модели. Тогда, как и при рассмотрении прыжка в воду с винтовым оборотом, можем переписать последнее уравнение в системе координат, связанной с туловищем, при помощи тензора поворота $\underline{P}(t)$:

$$\underline{P}(t) \cdot \underline{J}_*(t) \cdot \underline{P}^T(t) \cdot \underline{\omega}(t) = \underline{P}(0) \cdot \underline{J}_*(0) \cdot \underline{P}^T(0) \cdot \underline{\omega}_0 - \alpha \underline{\varphi}_1,$$

где тензор $\underline{J}_*(t)$ определяется только взаимным расположением частей тела,

$$\underline{P}(t) = \underline{P}_3(\varphi_3(t)\underline{j}) \cdot \underline{P}_2(\varphi_2(t)\underline{i}) \cdot \underline{P}_1(\varphi_1(t)\underline{k}),$$

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi}_3 \underline{j} + \mathbf{P}_3(\varphi_3 \underline{j}) \cdot \dot{\varphi}_2 \underline{i} + \mathbf{P}_3(\varphi_3 \underline{j}) \cdot \mathbf{P}_2(\varphi_2 \underline{i}) \cdot \dot{\varphi}_1 \underline{k}.$$

Спроецировав полученное уравнение на координатные оси, придём к системе из трёх дифференциальных скалярных уравнений относительно $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – углов поворота вокруг осей с ортами $\underline{k}, \underline{i}, \underline{j}$ соответственно.

Углы α, β и γ , определяющие взаимное расположение частей тела спортсмена, а значит, и значения компонент тензора инерции J_* , являются заданными функциями времени. Они представлены на рисунках 3.2.1 и 3.2.2. Соответствующие зависимости компонент тензора J_* от времени приведены на рисунке 3.2.3.

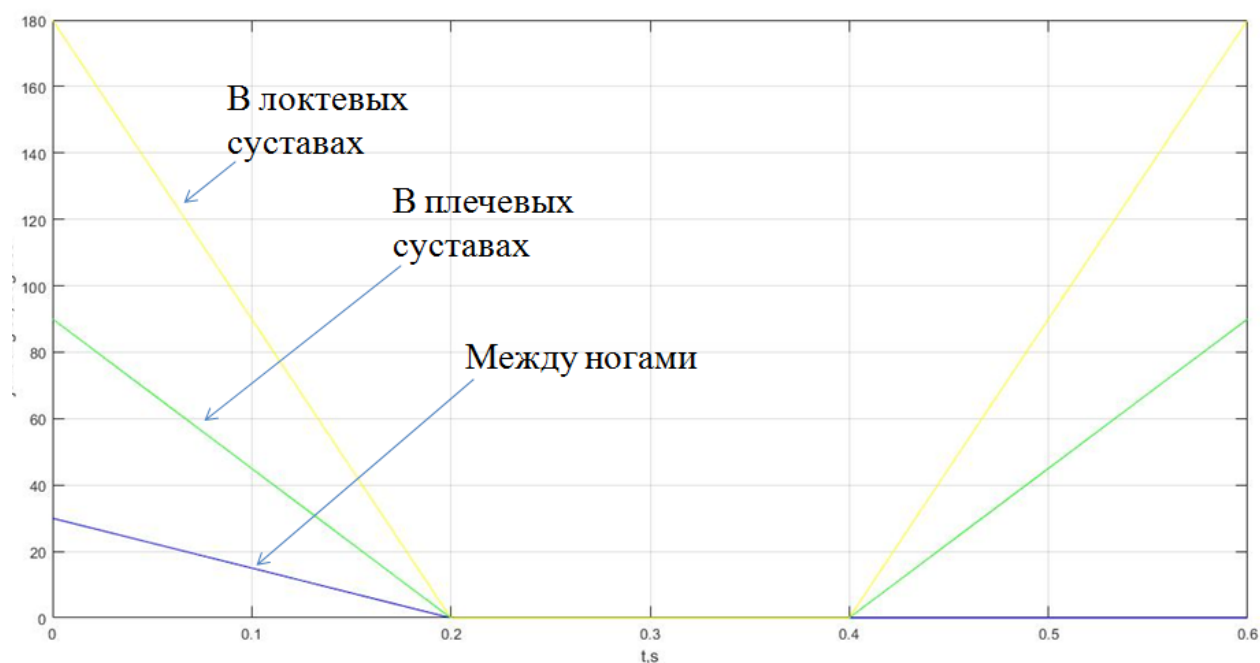


Рисунок 3.2.1. Зависимость углов α, θ и γ от времени

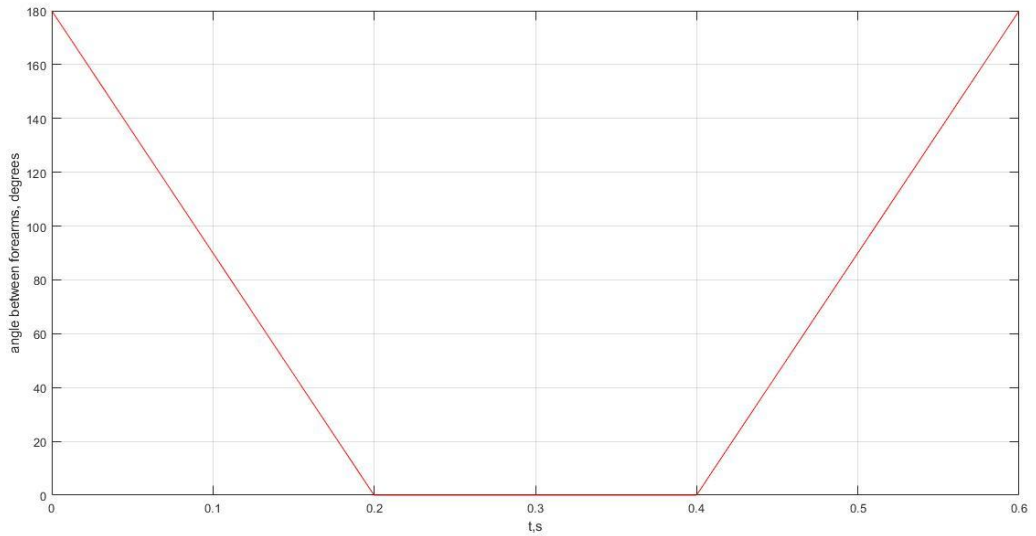


Рисунок 3.2.2. Зависимость угла β от времени

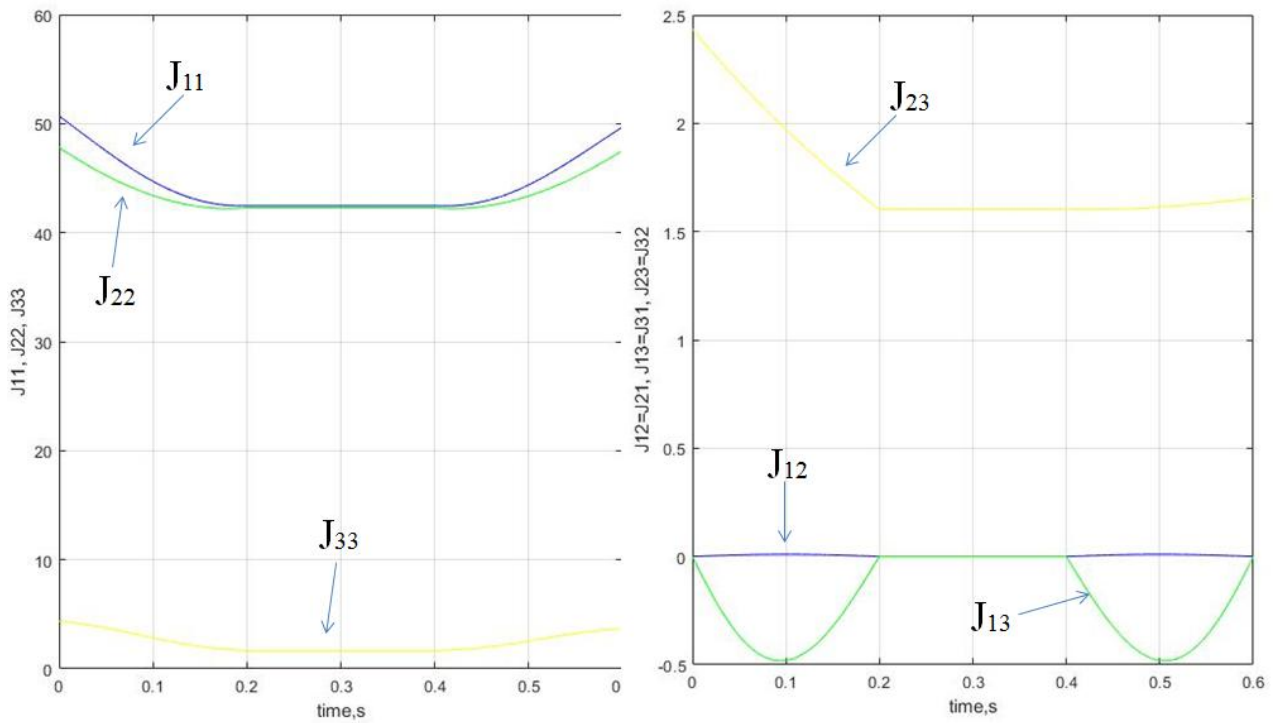


Рисунок 3.2.3. Зависимость компонент тензора инерции от времени

Время, затрачиваемое на поворот, диктуется музыкой. Здесь был выбран темп, составляющий около 100 ударов в минуту и соответствующий времени исполнения элемента, равному 0,6 с.

3.3. Численное решение

Решения, полученные методом Эйлера при начальной скорости вращения вокруг вертикальной оси $\omega_{k_0} = \frac{3\pi}{2} \text{ c}^{-1}$, приведены на рисунке 3.3.1. Как видно из рисунка, при таком начальном условии спортсмен осуществляет почти полный оборот вокруг вертикальной оси, что является оптимальным результатом: степень вращения при исполнении спот-поворота должна составлять $\frac{7}{8}$. Вращения вокруг осей с ортами \underline{i} и \underline{j} также присутствуют, но их величины незначительны.

Изменение значений угловых скоростей во времени показано на рисунке 3.3.2.

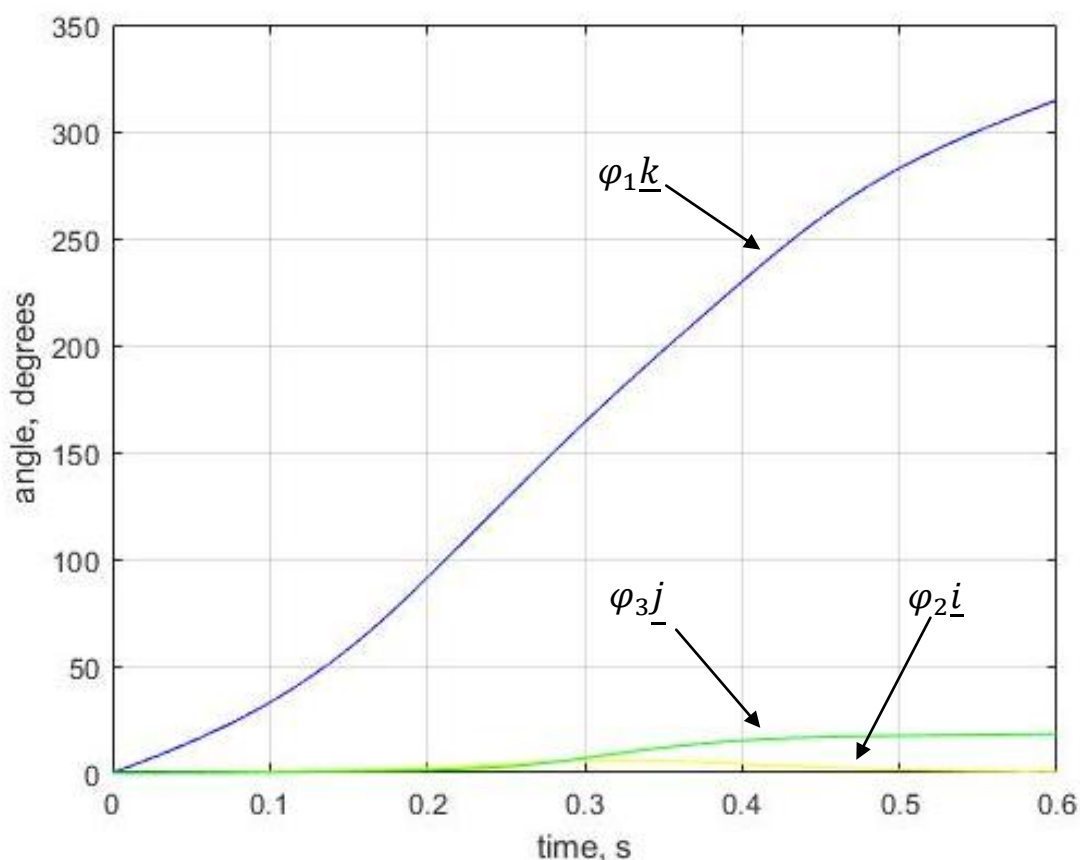


Рисунок 3.3.1. Зависимость углов поворота от времени

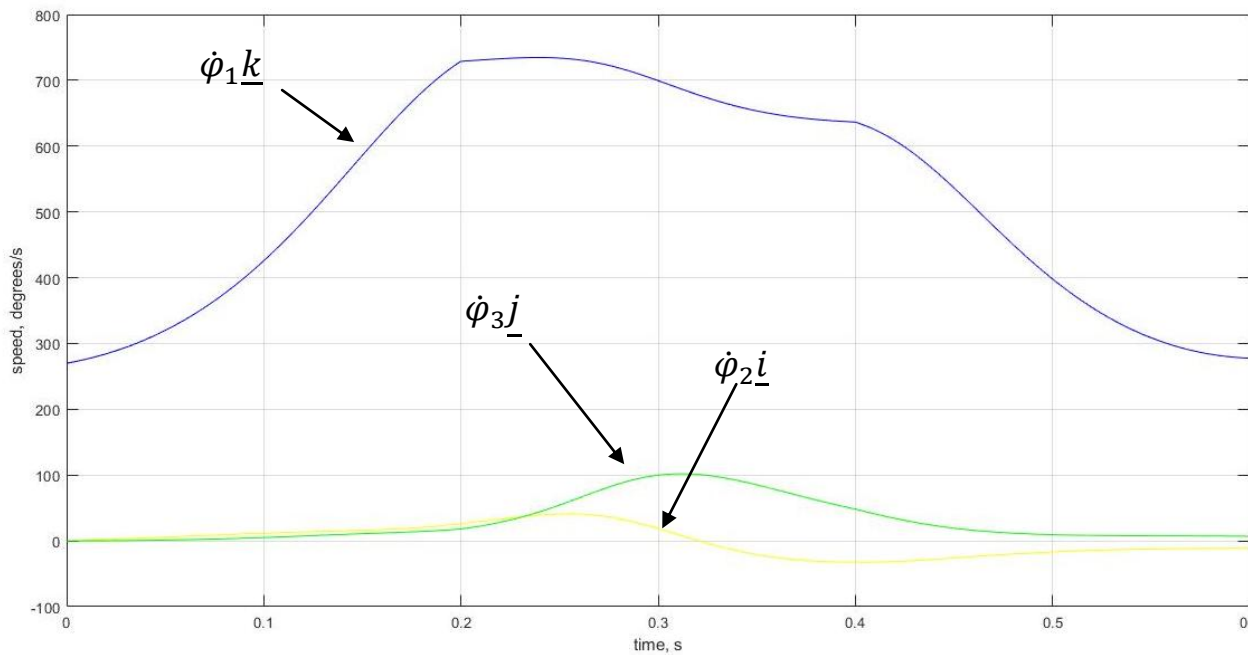


Рисунок 3.3.2. Зависимость угловых скоростей от времени

3.4. Влияние параметров модели и начальных условий на решения

Дальнейшее исследование включало в себя изучение влияния на решения следующих параметров модели:

- 1) времени t_1 , затрачиваемого на закрытие рук перед поворотом;
- 2) времени t_2 , затрачиваемого на раскрытие рук после поворота;
- 3) времени Δt , остающегося на вращение и изменяющегося вследствие одновременного изменения времён t_1 и t_2 ;
- 4) начальной скорости вращения ω_{k_0} ;
- 5) коэффициента трения α .

Полученные зависимости представлены графически на рисунках 3.4.1-3.4.15.

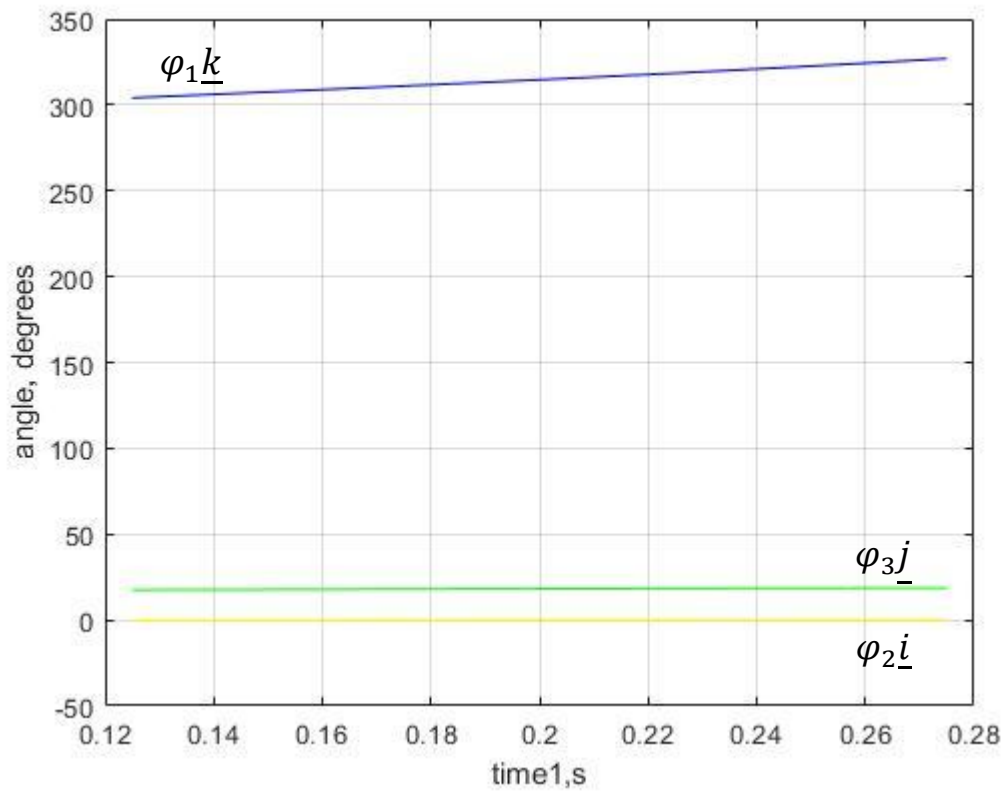


Рисунок 3.4.1. Зависимость решения от времени t_1

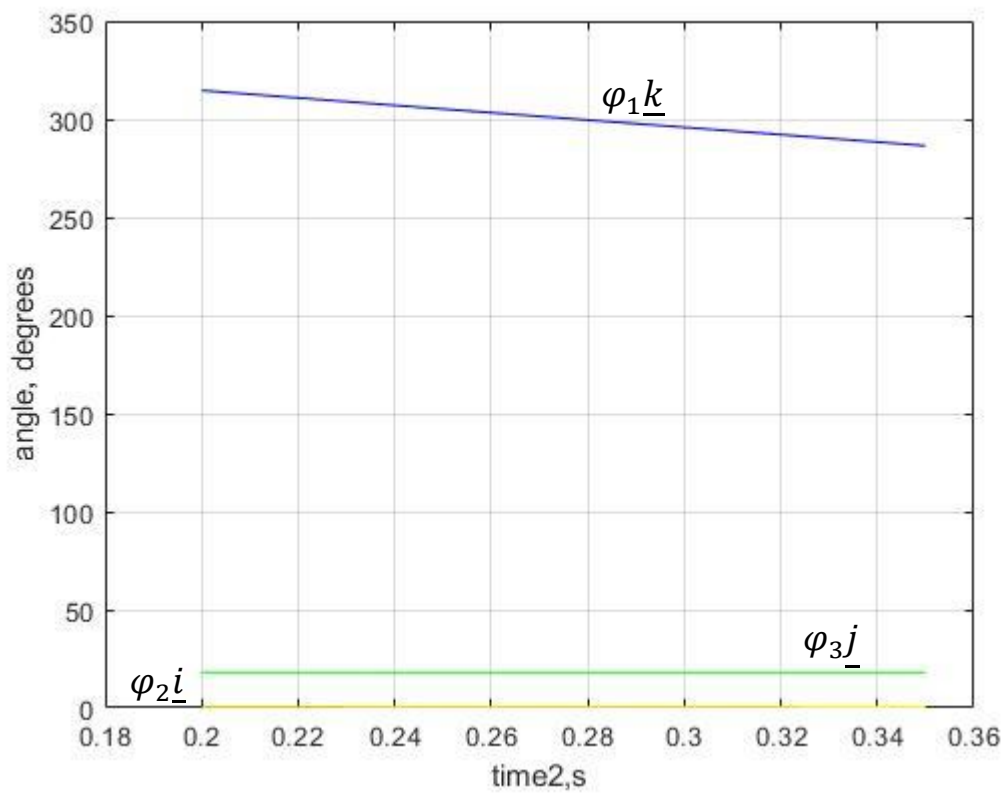


Рисунок 3.4.2. Зависимость решения от времени t_2

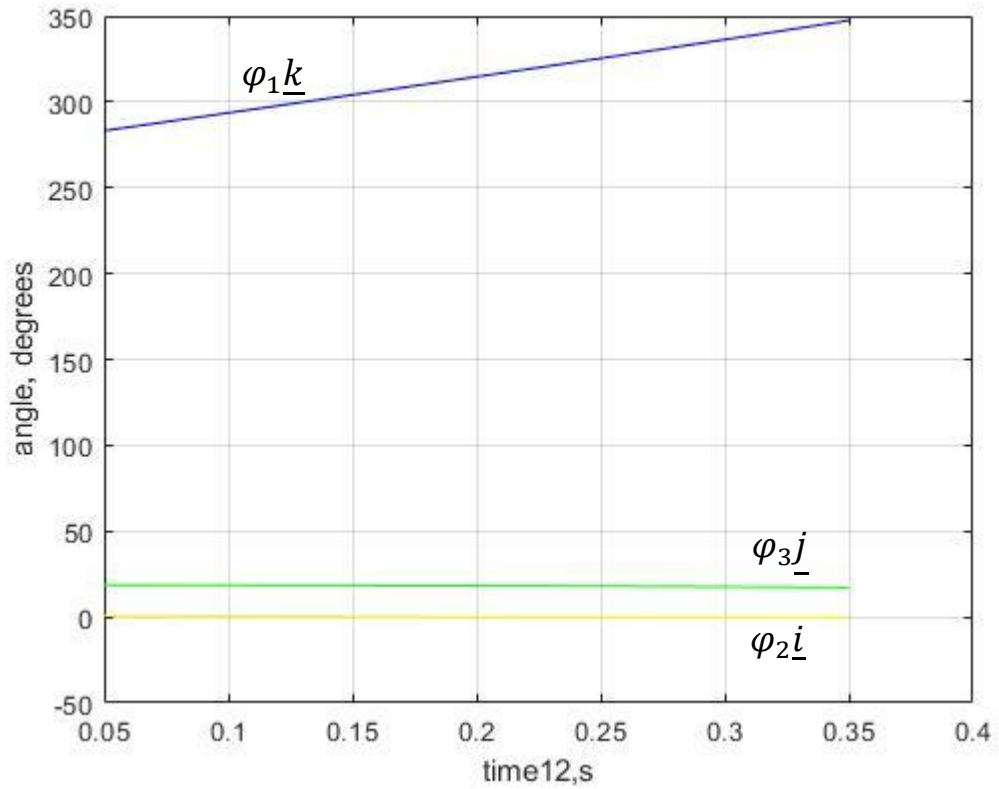


Рисунок 3.4.3. Зависимость решения от времени Δt

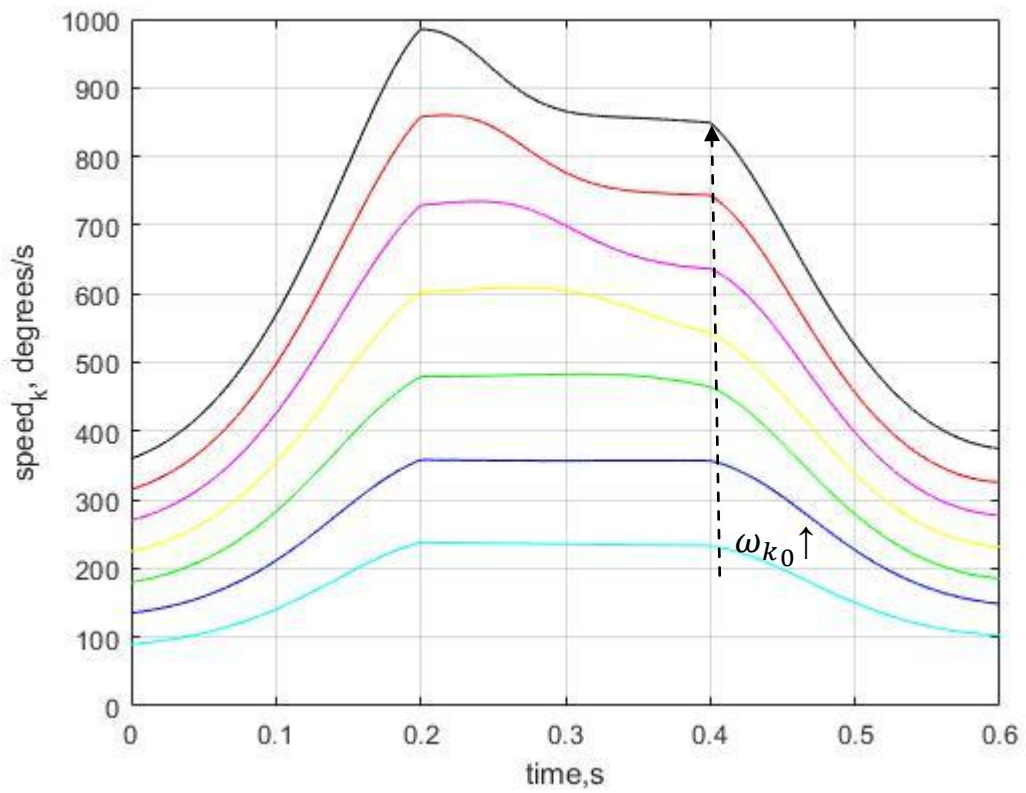


Рисунок 3.4.4. Зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}_1$ от времени при значениях начальной угловой скорости ω_{k0} от $\frac{\pi}{2}$ до 2π рад/с

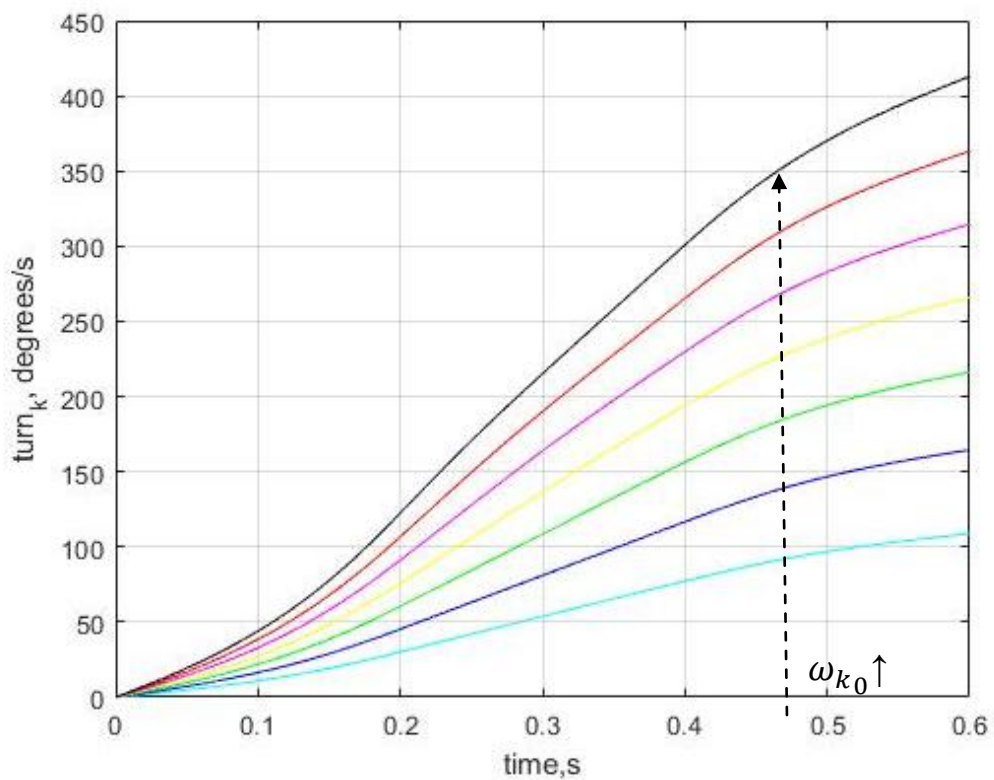


Рисунок 3.4.5. Зависимость угла поворота φ_1 от времени при значениях начальной угловой скорости ω_{k_0} от $\frac{\pi}{2}$ до 2π рад/с

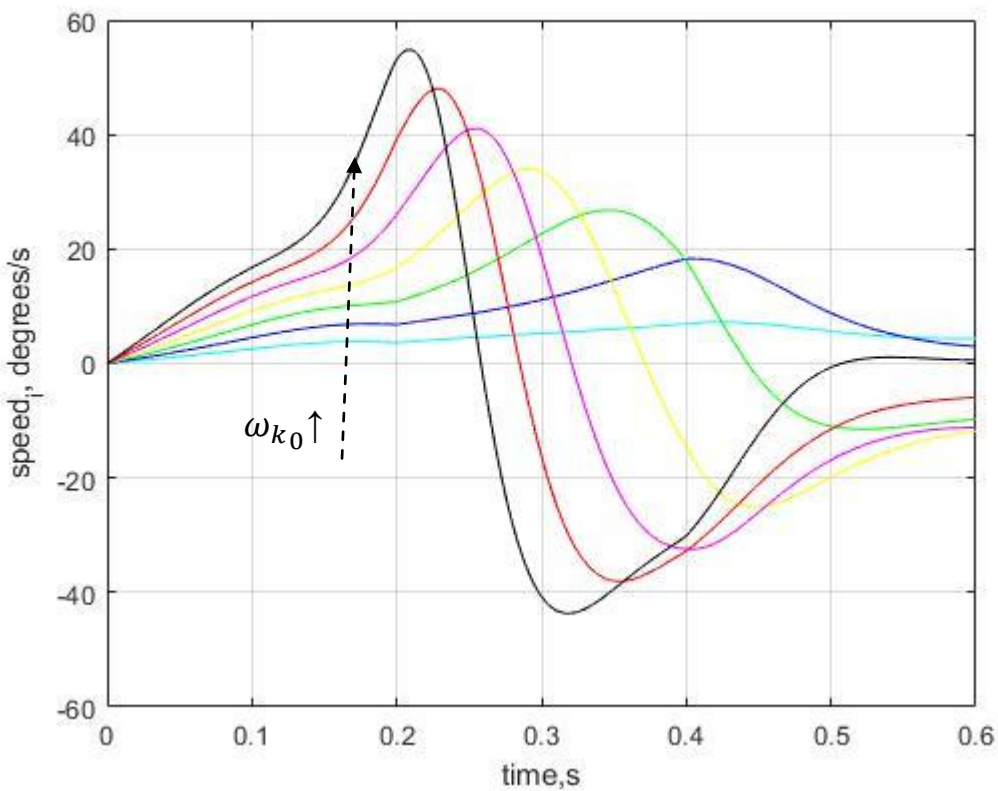


Рисунок 3.4.6. Зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}_2$ от времени при значениях начальной угловой скорости ω_{k_0} от $\frac{\pi}{2}$ до 2π рад/с

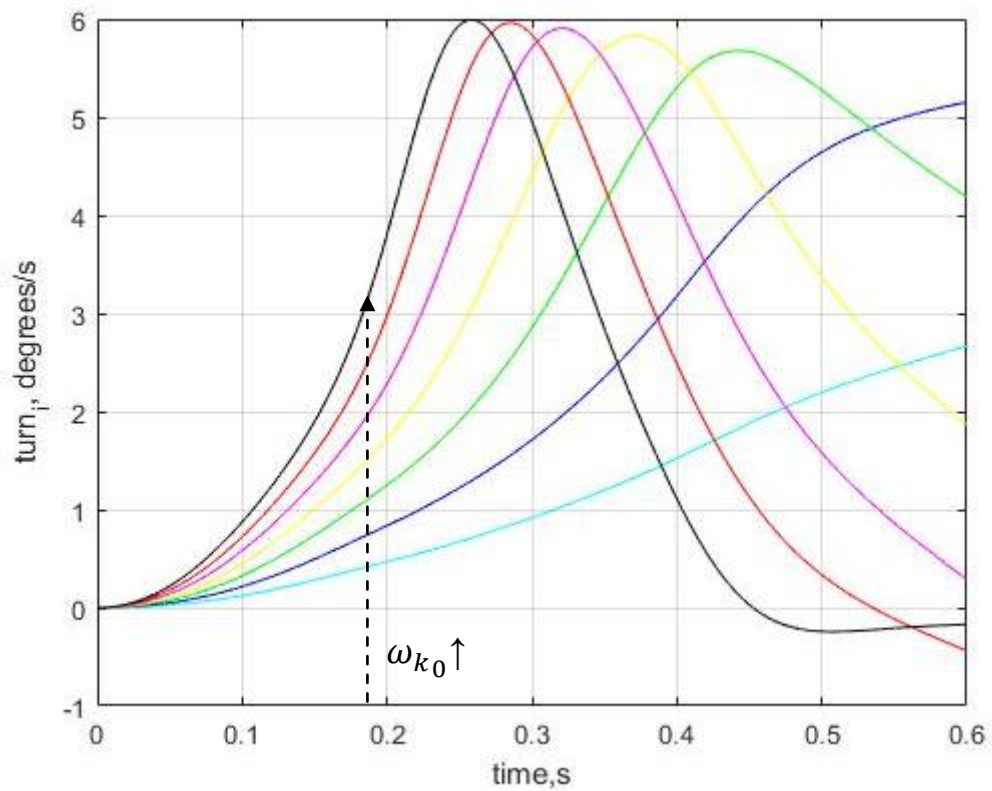


Рисунок 3.4.7. Зависимость угла поворота φ_2 от времени при значениях начальной угловой скорости ω_{k_0} от $\frac{\pi}{2}$ до 2π рад/с

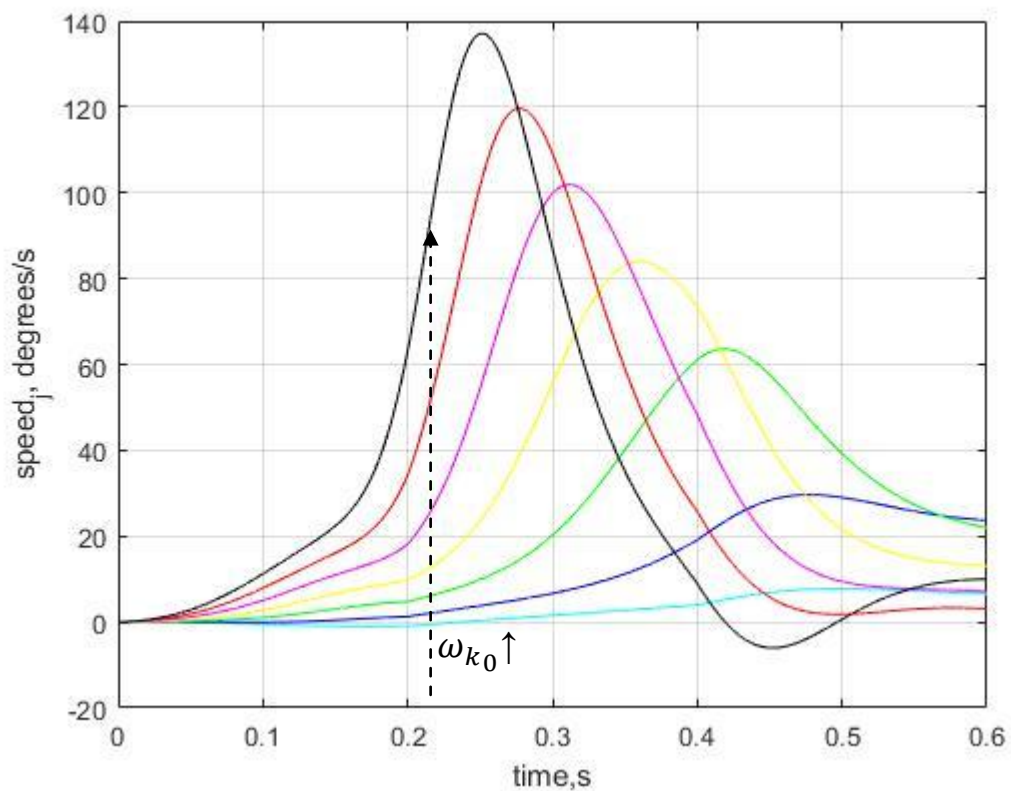


Рисунок 3.4.8. Зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}_3$ от времени при значениях начальной угловой скорости ω_{k_0} от $\frac{\pi}{2}$ до 2π рад/с

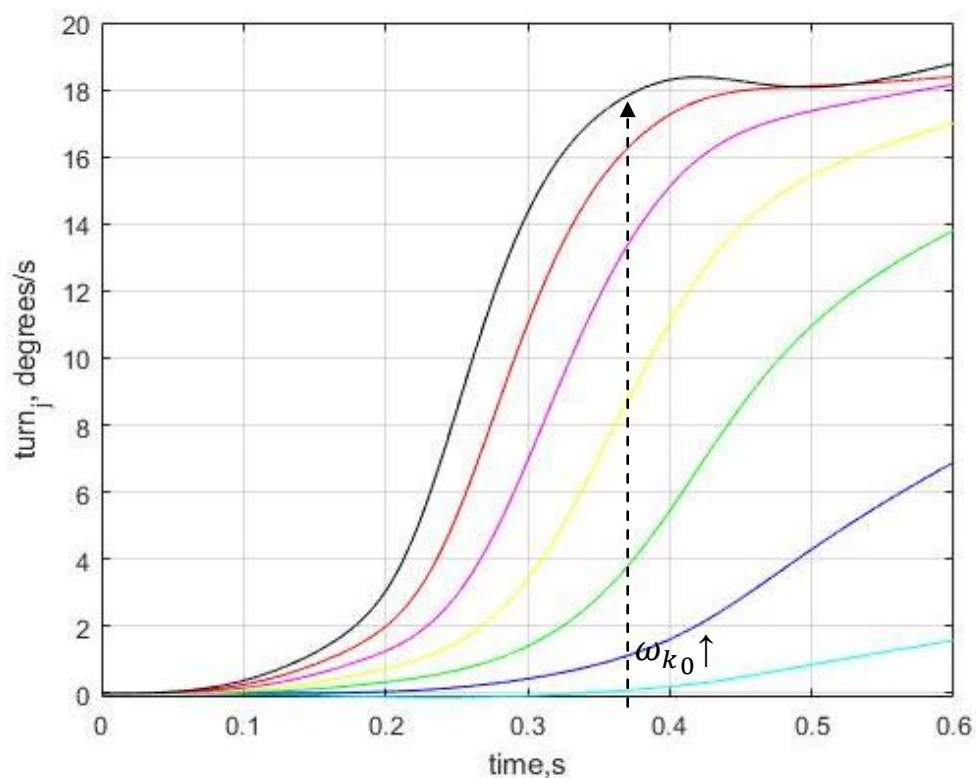


Рисунок 3.4.9. Зависимость угла поворота φ_3 от времени при значениях начальной угловой скорости ω_{k0} от $\frac{\pi}{2}$ до 2π рад/с

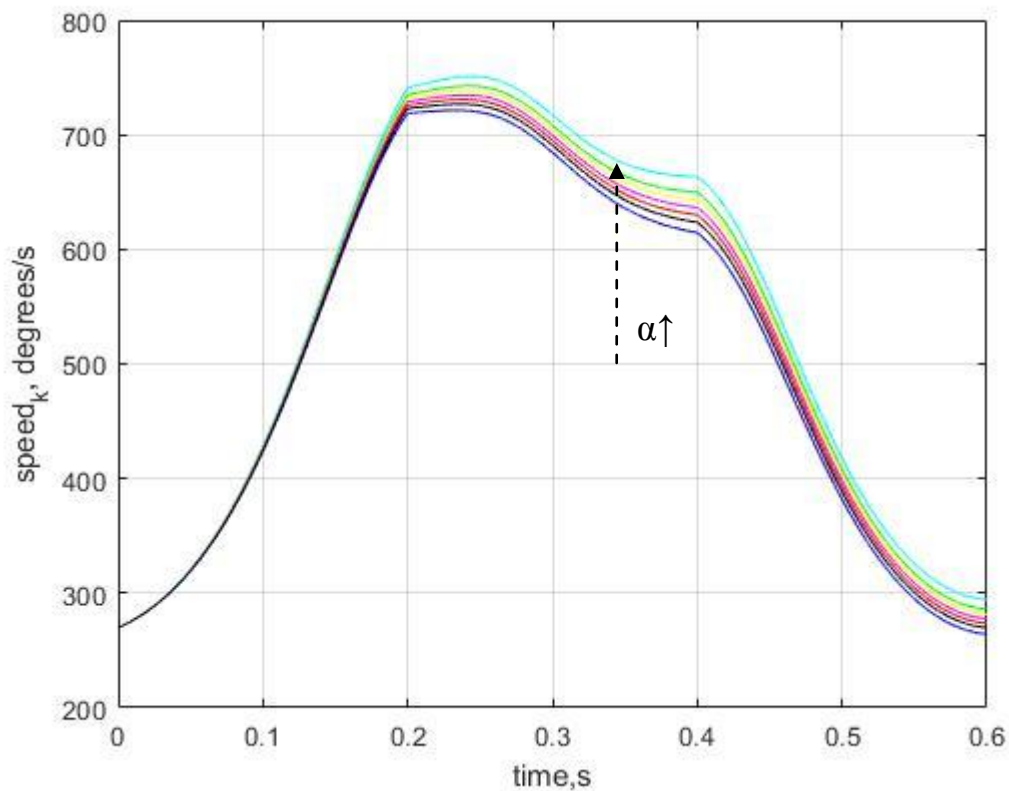


Рисунок 3.4.10. Зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}_1$ от времени при значениях коэффициента трения α от 0,1 до 0,7

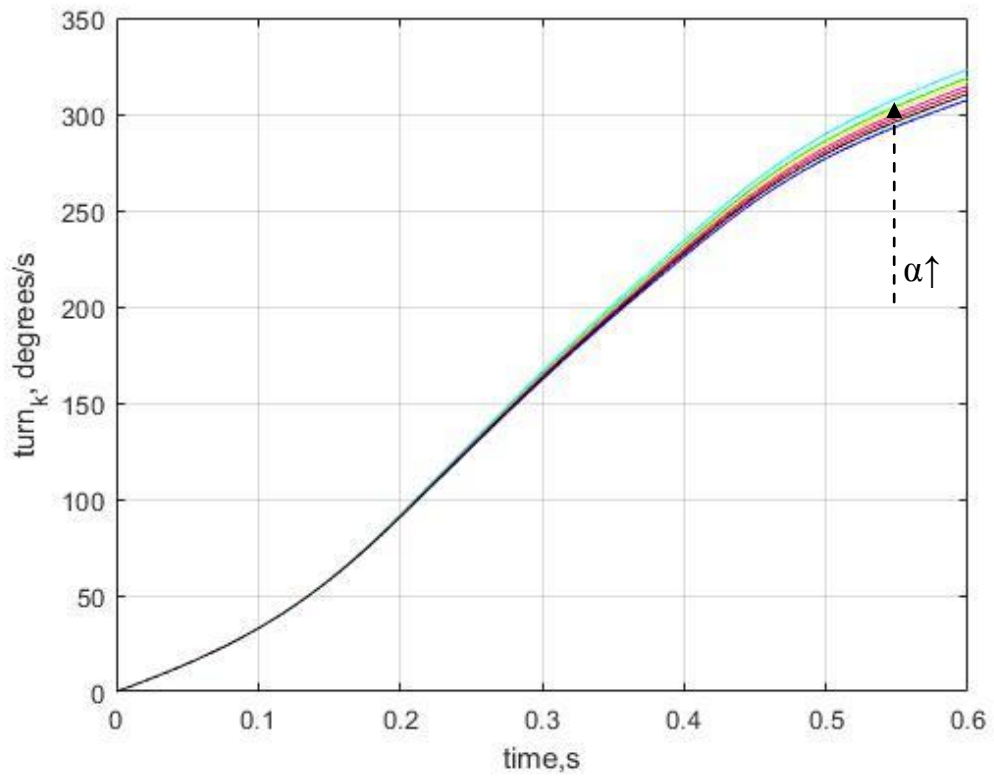


Рисунок 3.4.11. Зависимость угла поворота φ_1 от времени при значениях коэффициента трения α от 0,1 до 0,7

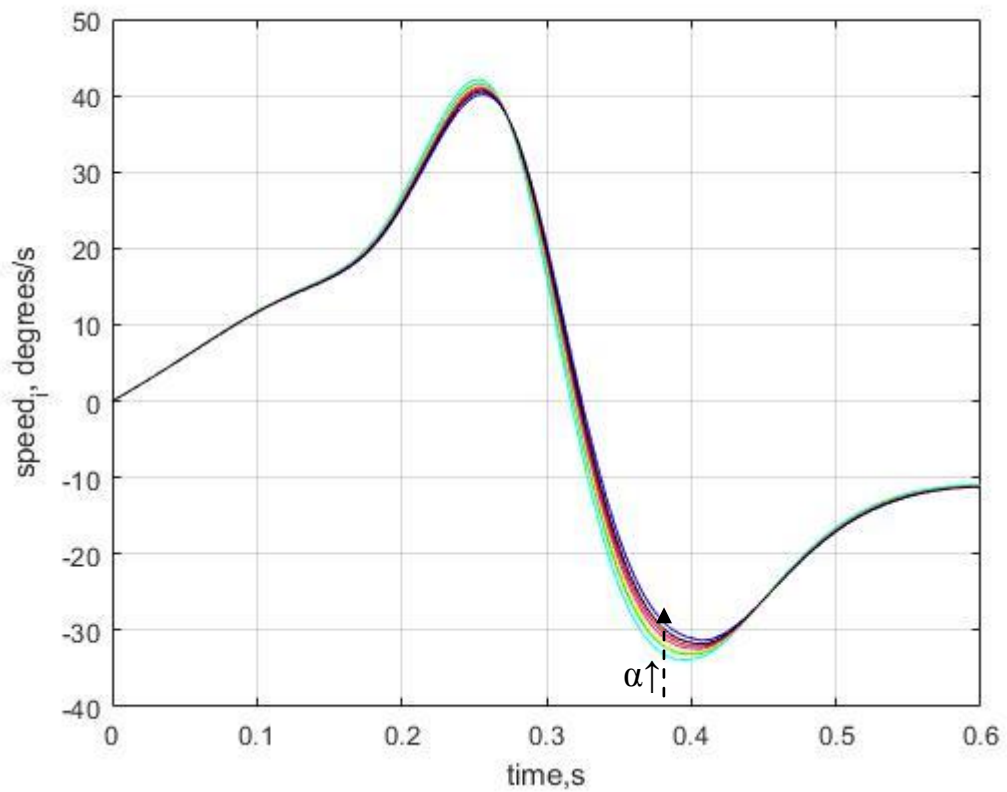


Рисунок 3.4.12. Зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}_2$ от времени при значениях коэффициента трения α от 0,1 до 0,7

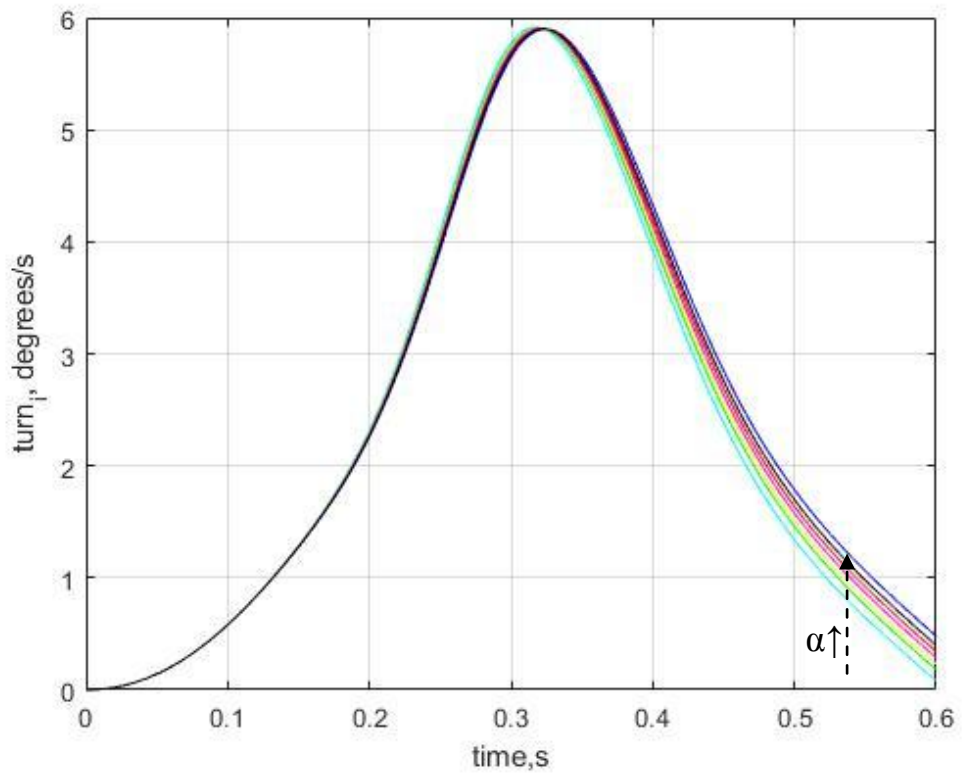


Рисунок 3.4.13. Зависимость угла поворота φ_2 от времени при значениях коэффициента трения α от 0,1 до 0,7

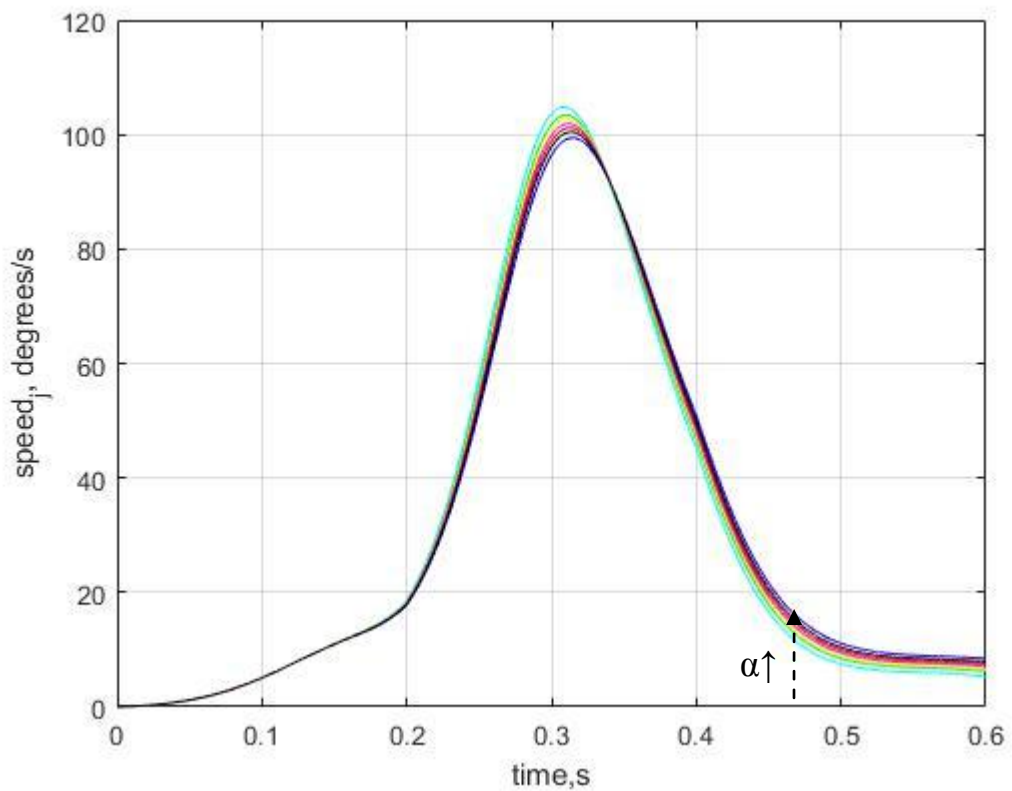


Рисунок 3.4.14. Зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}_3$ от времени при значениях коэффициента трения α от 0,1 до 0,7

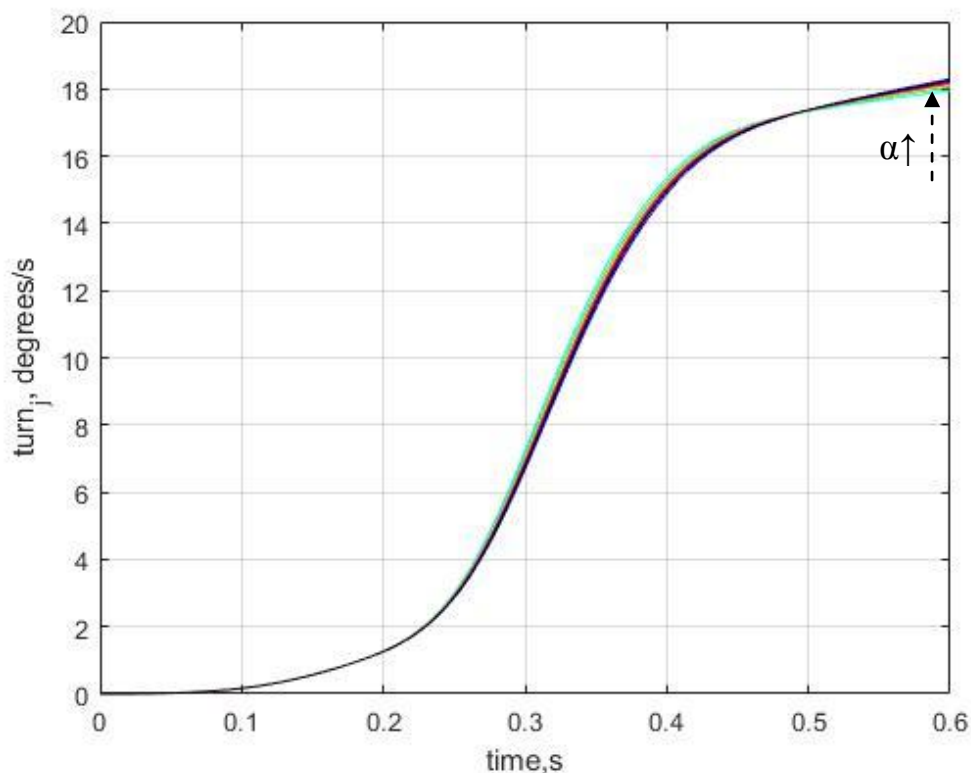


Рисунок 3.4.15 . Зависимость угла поворота φ_3 от времени при значениях коэффициента трения α от 0,1 до 0,7

Как видно из приведённых графиков, все три временных параметра: t_1 , t_2 и Δt – оказывают влияние лишь на поворот вокруг вертикальной оси; повороты вокруг двух других осей к значениям этих параметров нечувствительны.

Также можем наблюдать, что начальная угловая скорость ω_{k_0} оказывает влияние на повороты вокруг каждой из трёх осей вращения. Тем не менее, её влияние наиболее ощутимо на вращение вокруг оси с ортом \underline{k} , в то время как повороты вокруг остальных двух осей остаются в пределах допустимого при всех рассмотренных значениях ω_{k_0} .

Что касается коэффициента трения, то для него справедливы все те же выводы, что и для начальной скорости вращения. Стоит, однако, отметить, что его влияние слабее, чем влияние угловой скорости.

Наконец, результаты исследования чувствительности решения к начальному условию приведены на рисунке 3.4.16. В ходе этого исследования значению ω_{k_0} придавалась погрешность от 0 до 8% и

вычислялась соответствующая погрешность решения. Как видно из графика, зависимость между отклонениями значений ω_{k_0} и каждого из углов поворота близка к линейной. Почти полное совпадение погрешностей начальных условий и решения, однако, наблюдается лишь в случае поворота вокруг вертикальной оси. Повороты вокруг двух других осей оказываются более чувствительными к изменениям в начальном условии.

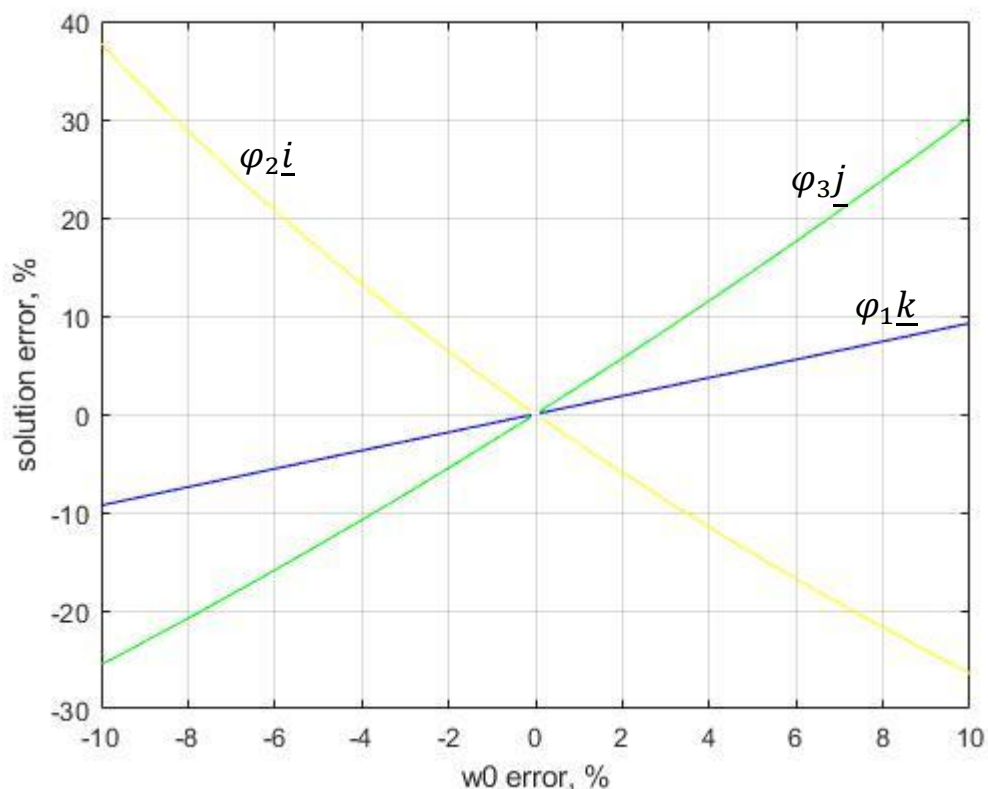


Рисунок 3.4.16. Анализ чувствительности к начальным условиям

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в рамках данной работы построены математические модели трёх акробатических элементов, основанных на изменении тензора инерции: прыжка в воду с вышки высотой 10 м с выполнением сальто вперёд, прыжка в воду с вышки высотой 10 м с выполнением винтового оборота и танцевального вращательного элемента (спот-поворота). Составлены дифференциальные уравнения движения спортсмена при выполнении каждого из рассмотренных элементов и получены численные решения этих уравнений.

Кроме того, для каждой модели проведено исследование влияния её параметров на качество выполнения рассматриваемого спортивного элемента и анализ чувствительности решения к начальным условиям.

Полученные результаты могут быть использованы в тренировочном процессе для корректировки исполнения того или иного элемента с целью повышения его качества.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Баранова Е. Ю., Вильке В. Г., Вращение упругого шара вокруг центра масс в гравитационном поле двух притягивающих центров, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2014, № 3, 33–40
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов : учеб. для вузов по спец. "Прикладная математика" – М.: Высшая Школа, 2002 – 848 с.
3. Дьяконов В.П. MATLAB – СПб: Питер, 2001 – 553 с.
4. Жилин П.А. Динамика твердого тела : учебное пособие – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2015 – 639 с.
5. Заболотнов Ю.М., Лобанков А.А. К задаче об оптимальной стабилизации углового движения малого космического аппарата при развёртывании орбитальной тросовой системы. Вестн. Сам. гос. аэрокосм. ун-та, т. 15, № 1, 2016
6. Новиков В.В., Февральских Л.Н., К задаче о свободных угловых движениях деформируемого твердого тела, близкого по форме к шару, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2014, т. 156, кн. 1, 109–116
7. Носов В.Н. Теоретическая механика. Статика. Динамика. Дополнительные вопросы: учебное пособие – СПб: Изд-во СПбГТУ, 2001 – 55 с.
8. Прохоренко Ф.Ф. Теоретическая механика : учебное пособие – СПб : Изд-во Политехн. ун-та, 2013 – 116 с.
9. Чуркин В.М., Чуркина Т.Ю. К построению математической модели раскрытия паруса космического аппарата. Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 3, 2015
10. Beer F.P., Johnston E.R., Cornwell P.J. Jr. Vector mechanics for engineers: Dynamics, 9th Ed. – Boston: McGraw-Hill, 2010 – 361 p.
11. Goldstein, H. Classical Mechanics, 2nd Ed. – Addison-Wesley: ISBN 0-201-02918-9, 1980

12. Landau L. D. and Lifshitz E. M., Mechanics, Vol 1. 2nd Ed. – Pergamon Press, 1969 – 176 p.
13. Mach.E. The Science of Mechanics – The Open Court Publishing Co., 1919 – 634 p.
14. Mysina O. A., About one-axial and tri-axial orientations of coaxial bodys of variable structure, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 2010, Issue 2, 81–90
15. Norman C.W. Undergraduate algebra – Oxford University Press, ISBN 0-19-853248-2, 1986
16. Sylvester J.J. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares, Philosophical Magazine, 4th Series. 4 (23) , 1852