Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа теоретической механики

Работа допущена к защите

Директор в.ш.т.м, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

_____А.М. Кривцов

«___»_____2020 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

«ПОСТРОЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ 1-D ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА»

по направлению 01.04.03 Механика и цифровое математическое моделирование

профиль 01.04.03_03 Механика и цифровое производство

Выполнила
студент гр. 3640103/80301 Н.А.Шаповаленко

Руководитель
к.ф.-м.н., доцент И.Б. Суслова

Санкт-Петербург
2020

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ

Директор в.ш.т.м

А.М. Кривцов

«___»_____2020 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы

студенту Шаповаленко Никита Александрович, гр. 3640103/80301

1. Тема работы: Построение спектральной 1-D геомеханической модели и параметризация в неоднородной среде для моделирования гидроразрыва пласта.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 08.06.2020
3. Исходные данные по работе: имеющаяся проблематика в области разработки месторождений.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): определение оптимальной размерности сетки для модели ГРП, создание 1-D геомеханической модели, уменьшение размерности задачи ГРП.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): отсутствуют.
6. Консультанты по работе: Шель Е.В., ведущий специалист ООО «Газпромнефть НТЦ».
7. Дата выдачи задания: 22.01.2020

Руководитель ВКР (подпись) И.Б.Суслова

Задание принял к исполнению: 22.01.2020

Студент (подпись) Н.А.Шаповаленко

РЕФЕРАТ

На стр. 36, 16 рисунков, 0 таблиц, 0 приложений, 18 литературных источника.

1-D ГЕОМЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАЗРЫВ ПЛАСТА, МОДЕЛЬ PLANAR3D, ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

В работе представлен метод спектрального разложения входных данных задачи ГРП. Проведены несколько видов разложения целевой функции, а именно Фурье преобразование и вейвлет преобразование. Построена 1-D геомеханическая модель, которая является входными данными для симулятора ГРП. Найден и определен безразмерный критерий формы, с помощью которого происходила фильтрация входных данных. Сделаны расчеты и построены профили трещин ГРП в симуляторах.

THE ABSTRACT

36 pages, 16 pictures, 0 tables, 0 application, 18 references.

1-D GEOMECHANICAL MODEL, HYDRAULIC FRACTURING, PLANAR3D MODEL, FOURIER TRANSFORM, WAVELET TRANSFORM.

The paper provides a method of spectral decomposition of the input data of hydraulic fracturing task. Input data conversion methods such as Fourier transformation and wavelet transformation are considered. The 1-D geomechanical model was constructed. The dimensionless form criterion was found and determined. Calculations were performed and crack profiles were constructed using computer simulators.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

На данный момент в нефтегазовой промышленности всё большее значение обретает технология гидроразрыва пласта(ГРП), когда жидкость под большим давлением закачивается в пласт, создавая относительно тонкую и длинную трещину, которая улучшает проводимые свойства породы.

Самой распространённой постановкой задачи о гидроразрыве является постановка о задаче гидроразрыва пласта в кусочно-однородной среде, состоящей из N-2 конечных слоев и 2-х полубесконечных слоев, границы которых строго горизонтальны, а материал – изотропен. Доминирующими напряжениями считаются вертикальные, а потому трещина гидроразрыва по принципу минимальных затрат энергии растёт в вертикальной плоскости, перпендикулярной минимальным горизонтальным напряжениям. В этих условиях ключевым внешним параметром задачи является распределение минимальных горизонтальных горных напряжений по вертикали, которые действуют на трещину, распределение проницаемости пласта по слоям, а также толщины каждого из слоёв.

В реальных одномерных геомеханических моделях, которые подаются на вход симулятору гидроразрыва, количество слоёв может достигать 100-200. Количество размерных и безразмерных параметров задачи растёт пропорционально числу слоёв, при этом скорость расчётов и устойчивость численных схем заметно ухудшается. Время расчёта обычной модели для реальных случаев на рабочей станции может занимать десятки минут, тогда как инженеру ГРП требуется проводить множественные расчёты с вариацией входных данных для подбора неизвестных параметров.

Для сокращения размерности задачи был разработан метод спектрального преобразования входных данных, когда входная кривая внешних напряжений разлагается по базису определённых функций. В качестве примера, в том числе, использовались тригонометрические ряды.

Большая часть спектра, как правило, высокочастотная часть, отсеивалась на основании физического критерия отношения градиентов давлений вязкого трения с градиентом внешних давлений так, чтобы дизайны гидроразрыва, посчитанные на исходных и преобразованных данных имели незначительное различие по результатам расчётов с точки зрения практического применения. Данный метод одновременно улучшает проблемы со скоростью расчётов и параметризует бесконечномерное пространство конечным набором коэффициентов разложения, что в свою очередь позволит построить метамодель.

Таким образом, *целью* данной работы является создание и проверка метода спектрального преобразования входных данных.

Объектом исследования является 1-D геомеханическая модель, которая подается на вход симулятора ГРП. *Предметом исследования* является профиль трещины ГРП.

Задачи, которые нужно выполнить для достижения данной цели:

1) Создание 1-D геомеханической модели.
2) Подбор физического критерия для фильтрации спектра распределения напряжений в 1-D геомеханической модели так, чтобы при уменьшении размерности задачи не терялась точность при моделировании ГРП.
3) Определение оптимальной размерности сетки для модели ГРП.

ГЛАВА 1. ОБЗОР МОДЕЛЕЙ ГРП.

1.1. Модели ГРП.

На данный момент в научной литературе представлено значительное количество моделей гидроразрыва пласта. Обзор по этой тематике, есть, например, в работе [2]. Аналитические или полуаналитические модели, такие как модели Перкинса-Керна-Нордгрена, модель Христиановича-Гиртсмы-де-Клерка и радиальная модель, имеют высокую вычислительную скорость, но ограниченную применимость ввиду их простоты. Модель Pseudo3D, которая по факту является одномерной, достаточна быстра для практических применений, но всё еще неприменима для высоконеоднородных пластов.

Модель Planar3D, напротив, применима для всех типов плоских трещин, в том числе и для трещин в высоконеоднородных коллекторах, но имеет относительную низкую скорость вычислений для инженерных (практических) приложений. Таким образом, данную модель следует применять только в тех случаях, которые не могут быть вычислены с необходимой точностью в существующих моделях.

1.2. Математическая формулировка модели Planar3D.

Модель Planar3D предполагает, что поверхность трещины гидроразрыва плоская и перпендикулярна минимальным горным напряжениям. Содержащая её среда полагается многослойной, с горизонтальной границей раздела между слоями. Каждый слой считается изотропной и однородной средой. Эти предположения приводят к изотропному закону Гука в каждом слое:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{0} + \lambda_k \theta \delta_{ij} + 2\mu_k e_{ij} \tag{1.1}$$

где λ_k, μ_k- константы Ламе для слоя с номером k,

σ_{ij}^{0}- тензор начальных напряжений перед гидроразрывом.

За толщину трещины принимается скачок проекции смещения, перпендикулярной к поверхности трещины (см. Рис.1.1). В зоне, где нет трещины гидроразрыва, в соответствии с симметрией задачи относительно плоскости трещины, проекция перпендикулярного смещения, равно как сдвиговые напряжения, равна нулю.

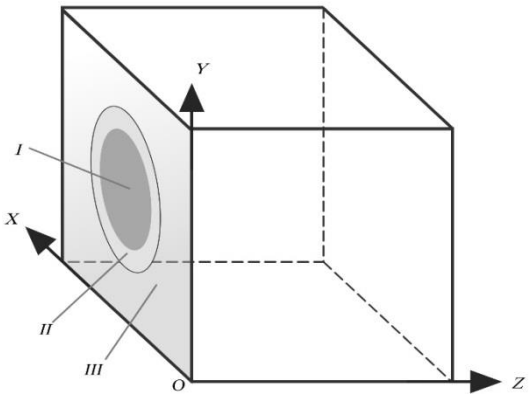

Рис.1.1. Графическое отображение постановки Planar3D. I – область на плоскости трещины, занятой жидкостью, II – область трещины, не занятая жидкостью, III – область, не занятая трещиной

Подводя итог, граничные условия следующие:

$$w|_{I+II} = (u_z^+ - u_z^-)|_{I+II}; w|_{III} = 0 \tag{1.2}$$

Из решения задачи теории упругости может быть найдено перпендикулярное напряжение, которое в зоне проникновения трещины равно давлению флюида:

$$p|_{I+II} = \sigma_{zz}|_{I+II} \tag{1.3}$$

Для упругой среды, однородной по упругим модулям, давление может быть найдено с помощью потенциала двойного слоя:

$$p(x,y) - \sigma(x,y) = -\frac{E'}{8\pi(1-\nu^2)} \oiint \frac{\nabla_0 w(r_0)(\overrightarrow{r_0} - \vec{r}) dS_0}{|r_0 - r|^3} \tag{1.4}$$

где E'- модуль плоской деформации среды,

$\sigma(x,y)$- начальные напряжения на бесконечности, перпендикулярные к плоскости трещины.

Обычно, $\sigma(x,y)$ рассматривается как кусочно-постоянная или линейная функция, зависящая только от y в каждом слое, так что в дальнейших выкладках она может быть заменена на функцию $\sigma(y)$.

Закон сохранения масс в модели Planar3D выписывается в следующем виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div\vec{q} + q_l = q_i \tag{1.5}$$

где w- толщина трещины, определяемая условием (1.2),

$\vec{q}$- вектор потока жидкости, проинтегрированного по толщине трещины,

q_l- скорость утечек флюида через стенку трещины в пористую среду,

q_i- функция источника, обычно аппроксимируемая как 1- или 2-мерная дельта-функция Дирака.

В большинстве случаев, скорость утечек жидкости вычисляется по закону утечек Картера:

$$q_l = \frac{2C_l}{\sqrt{t - t_0}} \tag{1.6}$$

Поток жидкости вдоль трещины может быть найден по закону Пуазейля псевдо-пластической реологии[6]:

$$\vec{q}|\vec{q}|^{n-1} = -\frac{1}{\psi k'} w^{2n+1} \nabla p \tag{1.7}$$

$$\psi = \frac{2^{n+1}(2n+1)^n}{n^n} \tag{1.8}$$

Условие распространения трещины может принимать достаточно сложные форм, но все они сводятся к эквивалентной формулировке в вариациях потенциальной энергии [12]:

$$\delta A_{frac} = \frac{{K_{Ic}}^2}{E'} \delta S = 2\gamma_{frac} \delta S \tag{1.9}$$

где K_{Ic}- это коэффициент трещиностойкости среды,

δS- вариация площади трещины,

δA_{fract}- вариация энергии на прирост трещины.

Большинство уравнений этого раздела присутствуют, например, в [7].

1.3. Масштабирование модели Planar3D.

Масштабирование всех уравнений модели Planar3D является необходимым для асимптотического анализа. Каждый асимптотический режим может быть получен из исходных уравнений только тогда, когда какой-то из членов уравнений заведомо опустим. Таким образом, система уравнений должна быть приведена в безразмерном виде, таком, что все искомые функции в уравнениях будут порядок единицы, а все масштабные факторы вынесены за скобку как общий множитель. Это даст безразмерные параметры уравнения.

В задаче гидроразрыва имеются две искомые функции – это функция распределения толщины трещины $w(x, y, t)$ и функция давления

флюида $p(x, y, t)$, определённые на плоскости трещины. Форма трещины может быть определена, как носитель функции $w(x, y, t)$. Функция $p(x, y, t)$ может быть выражена с помощью уравнения (1.10) из функции $w(x, y, t)$, и, таким образом, исключена из системы уравнений.

Чтобы получить безразмерную форму уравнения (1.4), координаты x, y должны быть обезразмерены на какую-то константу длины, взятую из геометрии задачи, а давление должно быть обезразмерено на какую-то постоянную из граничных условий задачи. В бесконечной однородной среде таких констант не существует, но в большинстве приложений условия однородности граничных условий не соблюдаются. Как минимум, имеется некий проводящий пласт с толщиной H и значением минимальных горных напряжений σ_0, а также два полубесконечных граничных слоя с повышенными на $\Delta\sigma$ нормальными напряжениями. Таким образом, симметричная трёхслойная среда является минимальной нетривиальной постановкой граничных условий для модели Planar3D.

Для трёхслойной симметричной среды, масштабирование следующее:

$$\tilde{p} = \frac{p_{net}}{\Delta\sigma}; \tilde{x} = \frac{x}{H}; \tilde{y} = \frac{y}{H}; \tilde{w} = w\frac{E'}{\Delta\sigma H}; \tilde{t} = \tilde{V} = \frac{VE'}{\Delta\sigma H^3} = \frac{QE't}{\Delta\sigma H^3} \qquad (1.10)$$

где V- объём закачанного флюида,

$p_{net} = p - \sigma_0$,

Q - постоянный объёмный расход закачки.

Используя данное масштабирование и интегрируя по частям с помощью формулы Грина, уравнение, уравнение (1.4) можно преобразовать к следующему виду:

$$\tilde{p} = \frac{1}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{w}(\overrightarrow{\tilde{r}_0}) d\tilde{S}_0}{|\vec{\tilde{r}} - \overrightarrow{\tilde{r}_0}|^3} \tag{1.11}$$

Используя то же масштабирование в законе Пуазейля для потока в плоско-параллельном канале, уравнение (1.6) может быть сведено к следующей форме:

$$q|q|^{n-1} = -\frac{\Delta\sigma}{\psi k' H} \left(\frac{\Delta\sigma H}{E'}\right)^{2n+1} \vec{\tilde{\nabla}}(\tilde{p} + \tilde{\sigma}) \widetilde{w}^{2n+1} \tag{1.12}$$

Используя масштабирование (1.10) и подставляя уравнения (1.6,1.11-12) в закон сохранения масс (1.5) может быть получено следующее уравнение:

$$-\left(\frac{1}{\psi}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\vec{\tilde{\nabla}}, \vec{\tilde{\nabla}} \left(\frac{1}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{w}(\overrightarrow{\tilde{r}_0}) d\tilde{S}_0}{\left|\vec{\tilde{r}} - \overrightarrow{\tilde{r}_0}\right|^3} + \tilde{\sigma} \right) \left| \vec{\tilde{\nabla}} \left(\frac{1}{8\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{\widetilde{w}(\overrightarrow{\tilde{r}_0}) d\tilde{S}_0}{\left|\vec{\tilde{r}} - \overrightarrow{\tilde{r}_0}\right|^3} + \tilde{\sigma} \right) \right|^{\frac{1}{n}-1} \widetilde{w}^{2+\frac{1}{n}} \right)$$

$$+ \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \tilde{t}} \gamma^{\frac{1}{n}} + \gamma^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} \frac{2\tilde{C}}{\sqrt{\tilde{t} - \tilde{t}_0}} = \gamma^{\frac{1}{n}} \delta(\vec{\tilde{r}}) \tag{1.13}$$

Получившиеся при этом комбинации масштабных факторов могут быть взяты как масштабные факторы задачи:

$$\gamma = \frac{E'^{2n+1} k' Q^n}{H^{3n} \Delta\sigma^{2n+2}} \tag{1.14}$$

$$\tilde{C} = C_l \left(\frac{HE'}{Q\Delta\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.15}$$

Параметрг γ имеет физический смысл отношения градиента давления из-за сил вязкого трения к градиенту горных напряжений. Как будет показано

ниже, это ключевой параметр модели Planar3D. Параметр $\tilde{C}$ качественно показывает отношение между скоростью утечек жидкости из трещины в пласт и скоростью закачки флюида в трещину.

Оставшееся уравнение (1.9), критерий распространения трещины, может быть масштабирован делением на величину порядка энергии упругой деформации $\frac{\Delta\sigma^2 H^3}{E'}$. Это даст дополнительное уравнение и безразмерный параметр:

$$\delta\widetilde{A_{frac}} = \widetilde{K}^2\widetilde{\delta S} \tag{1.16}$$

$$\widetilde{K} = \sqrt{\frac{1}{H}\frac{K_{Ic}}{\Delta\sigma}} \tag{1.17}$$

Параметр $\widetilde{K}^2$ имеет смысл отношения энергии, потраченной на образование поверхности трещины к энергии, потраченной на упругую деформацию горной породы. В инженерных приложениях, $\widetilde{K}\sim 0.1$,откуда следует малое влияния прочности породы на задачу гидроразрыва. В дальнейшей работе данное предположение используется, что означает, что найденные решения будут соответствовать режиму доминирующей вязкости.

Также, в дальнейшей работе параметр $\tilde{C}$ опускается, что означает пренебрежение утечками жидкости в пласт. Приближение доминирования утечек должно быть исследовано в другой работе. Наиболее вероятно, что масштабирование в режиме доминирующих утечек не зависит от геомеханических параметров и соответствует аналогичному масштабированию в модели PKN [2].

1.4. Асимптотические режимы модели Planar3D для ГРП.

Первая очевидная асимптота модели Planar3D в трёхслойной симметричной среде это случай отсутствия контраста напряжений. В этом случае, если длина и высота трещины много больше размеров перфорационного кластера (источника флюида в математической модели), задача имеет аксиальную симметрию в плоскости трещины. Таким образом, трещина будет иметь круглую форму, а модель Planar3D перейдёт в радиальную модель трещины. Очевидно, что для радиальной модели, в условиях отсутствия утечек, градиент внешних горных напряжений $\vec{\tilde{\nabla}}\tilde{\sigma} = 0$, и уравнение (13) упрощается следующим образом:

$$-\left(\frac{1}{\psi}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\vec{\tilde{\nabla}},\vec{\tilde{\nabla}}\tilde{p}\left|\vec{\tilde{\nabla}}\tilde{p}\right|^{\frac{1}{n}-1}\tilde{w}^{2+\frac{1}{n}}\right)+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{t}}\gamma^{\frac{1}{n}}=\gamma^{\frac{1}{n}}\delta(\vec{\tilde{r}}) \tag{1.18}$$

Параметр γ (14) стремится к бесконечности, если $H \to 0$ или $\Delta\sigma \to 0$. В самом деле, если $H = 0$ или $\Delta\sigma = 0$ задача о трёхслойной симметричной среде становится задачей об одной однородной среде, и уравнение (1.13) должно перейти в уравнение (1.18) для радиальной модели. Тем не менее, когда $H = 0$ или $\Delta\sigma = 0$, масштабирование (1.10) не имеет физического смысла. «Прямой» предельный переход уравнения (1.13) когда $\gamma \to \infty$ некорректен, так как член со старшей производной исчезает.

Таким образом, уравнение (1.13) должно быть преобразовано и перемасштабировано в форму без параметра γ в каждом члене, за исключением члена с $\vec{\tilde{\nabla}}\tilde{\sigma}$, градиентом горных напряжений. Данный член должен быть пренебрежимо мал в пределе $\gamma \to \infty$.

Так как трещиностойкостью и утечками в пласт уже исключены из рассмотрения, радиальная модель имеет решение в режиме доминирующей вязкости, который может быть получен напрямую из уравнения (1.18).

Однако, для краткости это масштабирование [13,15] будет написано явно в нотации, описанной выше, а затем подставлено в уравнения (1.13,1.18). Для этих целей, толщина трещины w и координаты на плоскости трещины перемасштабируются следующим образом:

$$\vec{\tilde{r}} = \vec{\theta}\gamma^{-\frac{1}{3(n+2)}}\tilde{t}^{\frac{2(n+1)}{3(n+2)}};$$

$$\tilde{p} = p^*\left(\vec{\theta}\right)\gamma^{\frac{1}{n+2}}\tilde{t}^{-\frac{n}{n+2}}; \tag{1.19}$$

$$\tilde{w} = w^*\left(\vec{\theta}\right)\gamma^{\frac{2}{3(n+2)}}\tilde{t}^{\frac{2-n}{3(n+2)}}$$

Подставляя данные выражения в уравнения (1.18) и сокращая общие множители, получаем уравнения радиальной модели в вязкостно-доминирующем режиме:

$$-\left(\frac{1}{\psi}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{\theta}}, w^{*2+\frac{1}{n}}\left|\frac{\partial p^*}{\partial\vec{\theta}}\right|^{\frac{1}{n}-1}\frac{\partial p^*}{\partial\vec{\theta}}\right) + \frac{\partial w^*}{\partial\tilde{t}}\tilde{t} = \delta(\vec{\theta}) \tag{1.20}$$

$$p^* = \frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{w^*\left(\overrightarrow{\theta_0}\right)d^2\overrightarrow{\theta_0}}{|\vec{\theta} - \overrightarrow{\theta_0}|^3} \tag{1.21}$$

Уравнения (1.20-1.21) не зависят от параметра γ, который содержал масштабные факторы $H, \Delta\sigma$, которые не могут присутствовать в радиальной модели. Также, любое перемасштабирование времени сохраняет вид уравнения (20). Уравнения (1.20-1.21) также могут быть преобразованы обратно к размерному виду с помощью соотношений (1.10,1.19), и независимость уравнений (1.20,1.21) от $H,\ \Delta\sigma$ будет очевидна.

Уравнение (1.13) для модели Planar3D в трёхслойной симметричной среде при подстановки масштабирования (1.19) преобразуется к следующему виду:

$$-\left(\frac{1}{\psi}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{\theta}}, w^{*2+\frac{1}{n}}\left|\frac{\partial}{\partial\vec{\theta}}\left(p^{*}+\frac{\tilde{\sigma}}{\gamma^{\frac{1}{n+2}}}\tilde{t}^{\frac{n}{n+2}}\right)\right|^{\frac{1}{n}-1}\frac{\partial}{\partial\vec{\theta}}\left(p^{*}+\frac{\tilde{\sigma}}{\gamma^{\frac{1}{n+2}}}\tilde{t}^{\frac{n}{n+2}}\right)\right)$$

$$+\frac{\partial w^{*}}{\partial\tilde{t}}\tilde{t}=\delta(\vec{\theta}) \tag{1.22}$$

Условие, которое позволит использовать уравнение (1.20) для радиальной модели вместо уравнения (1.22) следующее:

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\gamma^{\frac{1}{n+2}}}\tilde{t}^{\frac{n}{n+2}}\ll 1 \tag{1.23}$$

Принимая во внимание, что функция $\tilde{\sigma}$ имеет порядок единицы, условие (1.23) может быть переписано как:

$$\tilde{t}\ll\gamma^{\frac{1}{n}} \tag{1.24}$$

Это условие означает, что чем выше значения параметра γ, тем больше время, на котором радиальная модель трещины применима. Это означает, что при точечном источнике и малом времени закачки, радиальная модель всегда применима. Трещина дорастает до размеров центрального пласта за время $\tilde{t}\sim 1$. Если $\gamma\gg 1$, тогда трещина может преодолеть барьеры и продолжить расти круглой. В условиях реальных ГРП $\tilde{t}_{inj}>1$. Таким образом, условие применимости радиальной модели может быть просто переписано как:

$$\gamma \gg \tilde{t}_{inj}^{n} > 1 \tag{1.25}$$

Условия (1.24-1.25) зависят только от граничных условий, и могут быть использованы без прямого решения задачи с помощью модели Planar3D.

ГЛАВА 2. ПОСТРОЕНИЕ 1D ГЕОМЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ.

2.1. Подготовка исходных данных.

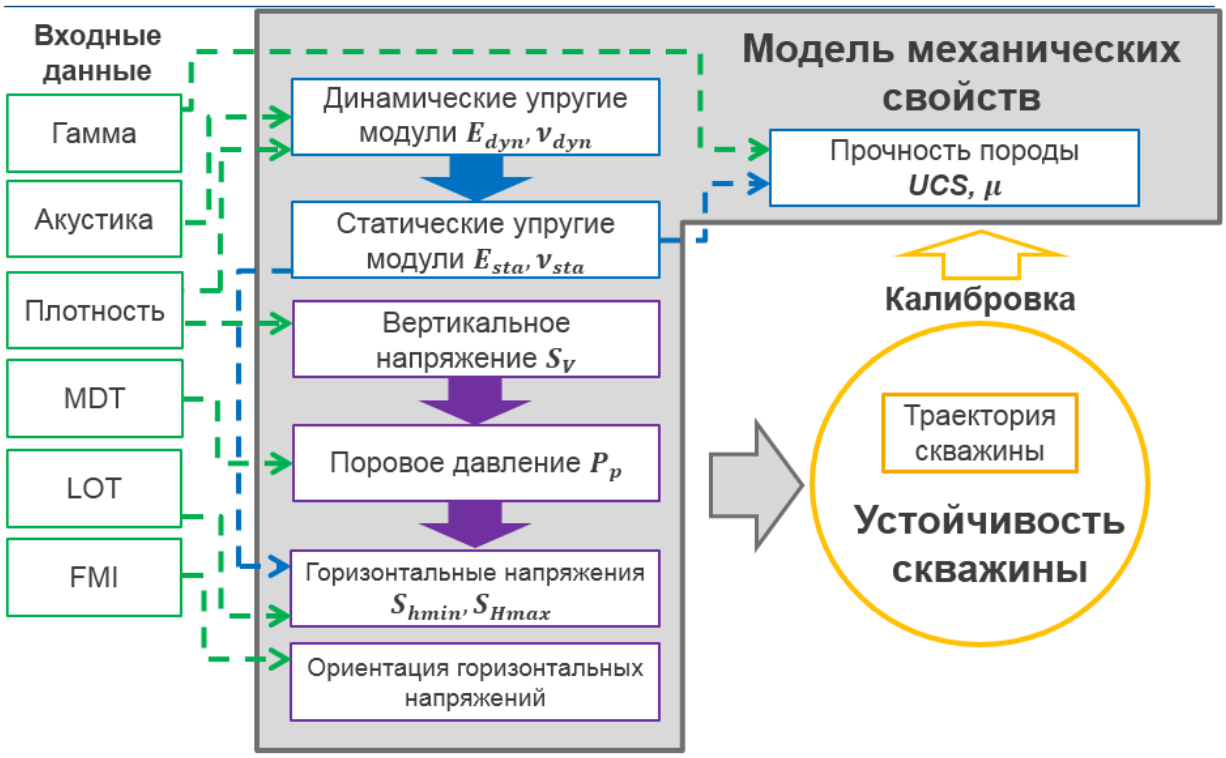

Рис.2.1 Схема построения 1-D геомеханическной модели.

Геомеханическое моделирование является важным этапом в работе инженера ГРП. Оно дает первое представление о напряженном состоянии месторождения.

Для создания 1-D геомеханической модели используют полевые и лабораторные испытания. К полевым относят геофизические исследования скважин(ГИС): результаты плотностного каротажа, скорости продольных и поперечных волн. Они позволяют получить информацию о плотности, прочностных и деформационных свойствах, структурной неоднородности, наличие или отсутствие разломов на месторождении. Помимо этого, проводят лабораторные исследования отобранных образцов керна, что позволяет изучить деформационные, прочностные и фильтрационно-емкостные свойства породы. Также результаты исследования керна являются

калибровочными точками при получении статических упругих модулей.

2.2. Расчет упругих модулей

Первичными характеристиками модели являются динамические упругие модули, а именно модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Благодаря ГИС есть информация о акустическом каротаже. Из уравнения распространения волны:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad (2.1)$$

находим выражение для скоростей продольных и поперечных волн:

$$V_p = \frac{\omega}{q} = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (2.2)$$

$$V_s = \frac{\omega}{q} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.3)$$

Получим выражение для динамических упругих модулей:

$$E_{dyn} = \frac{\rho V_s\left(3V_p^2 - 4V_s^2\right)}{\left(V_p^2 - V_s^2\right)} \quad (2.4)$$

$$E_{dyn} = \frac{\rho V_s\left(3V_p^2 - 4V_s^2\right)}{\left(V_p^2 - V_s^2\right)} \quad (2.5)$$

В работе [1] рассказывает про виды зависимостей динамических и статических упругих модулях. Чаще всего, данная зависимость имеет вид степенной функции с различными коэффициентами А и В в представлении $\log Y = A\log X + B$, где Y- статические упругие модули, а X- динамические.

Чтобы проверить правильность построенных статических упругих модулей, используют показания керна. С их помощью более точно подбираются коэффициенты A и B.

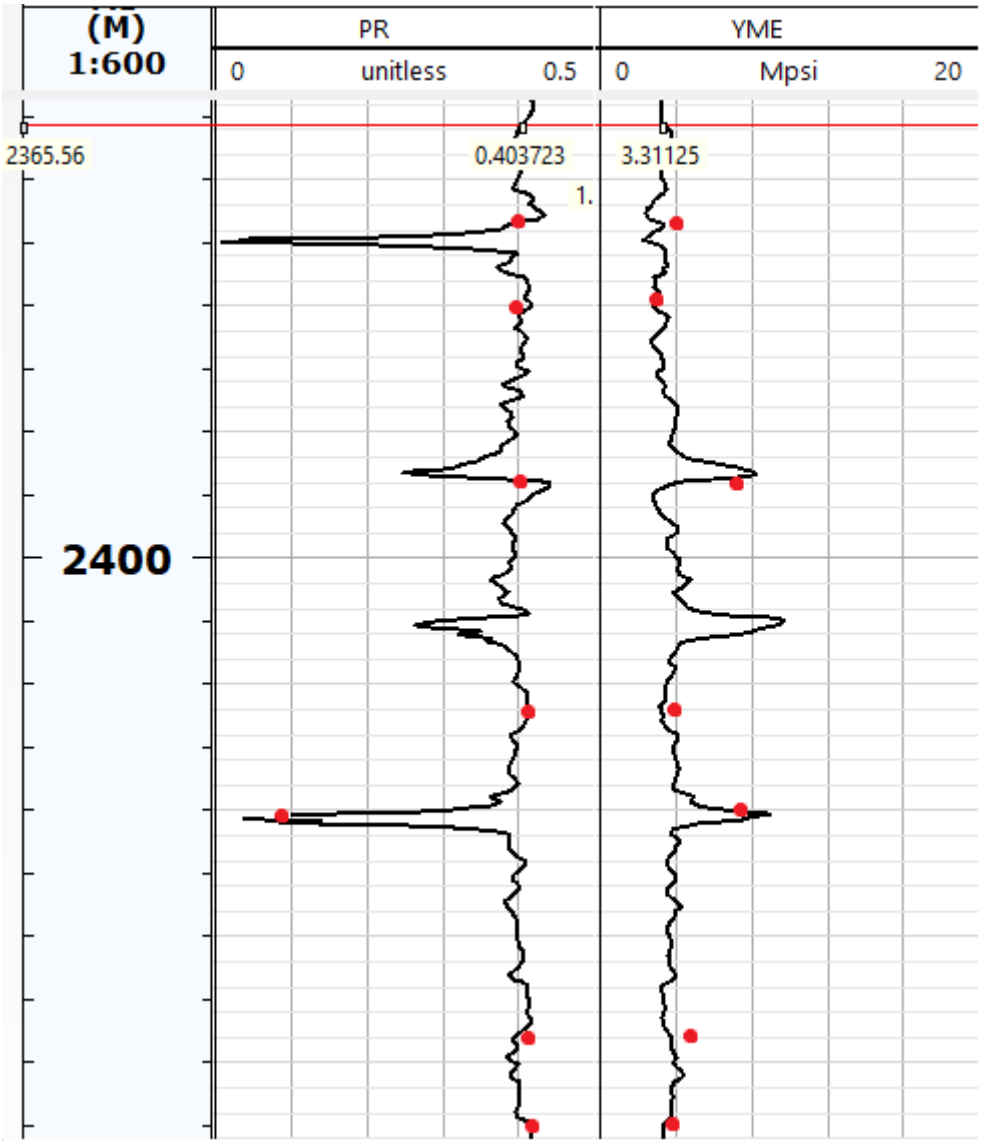

Рис.2.2. Показания керна и построенных упругих модулей, где красные точки – показания керна.

2.3. Расчет напряжений.

Для расчета минимальных горизонтальны напряжений, которые нам нужны для симуляции ГРП, воспользуемся формулой Итона, которую он получил в 1969 году [10]:

$$\sigma_{min}(z) = \sigma_V(z)\frac{\nu(z)}{1-\nu(z)} + \\ + \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}(\varepsilon_{min} + \nu\varepsilon_{max}) + \alpha(z)p(z)\frac{1-2\nu(z)}{1-\nu(z)} \tag{2.6}$$

где $\sigma_V(z)$- вертикальное напряжение,

ε_{min} и ε_{max}- минимальные и максимальные тектонические деформации,

$p(z)$- среднее пластовое давление,

$\alpha(z)$- коэффициент Биота.

Таким образом, мы получили все нужные данные 1-D геомеханической модели для симуляции ГРП. Сама модель не ограничивается статическим модулем Юнга, коэффициентом Пуассона и минимальными горизонтальными напряжениями. В нее так же входит, как упоминалось ранее, расчет порового давления, прочность породы, траектория скважины и тд. Но для наших целей это информация избыточна.

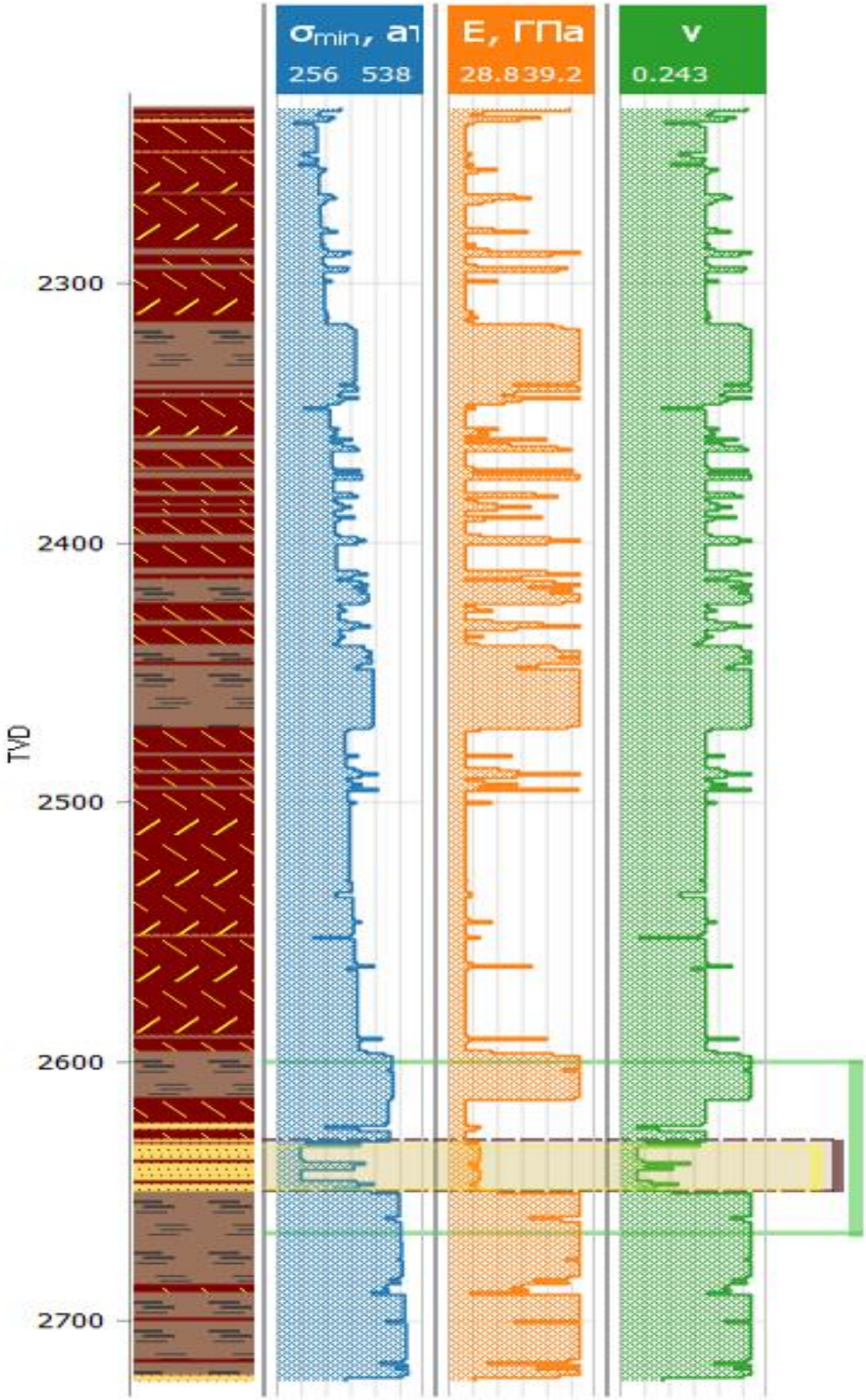

Рис.2.3 Планшет 1-D геомеханической модели.

Глава 3. МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАННЫХ.

3.1. Постановка проблемы.

На практике инженерам ГРП поступают данные с достаточно маленьким шагом дискретизации (обычно 10 см). Связано это с чувствительностью приборов, делающие полевые замеры. Хоть целевые интервалы для ГРП в разы меньше длины скважины, но все равно достигают нескольких сотен метров. Для моделирования профиля трещины ГРП эта информация избыточна. Это не только увеличивает время расчета, но и неэффективно занимает объемы памяти в компьютерах инженеров.

Для решения данной проблемы был предложен метод спектрального разложения функций напряжения в ряды гармонический функций.

3.2. Значение периодической функции напряжений

Предположим, что напряжения представлены в виде ступенчатой функцией с различной шириной шага. В момент инициации, для точечного источника, трещина растет радиально, пока не будет достигнут барьер напряжений(см.Рис.3.1.).

До достижения барьера:

$$\tilde{R} = 1 = C_1 \gamma^{-\frac{1}{3(n+2)}} \tilde{t}_{cross}^{\frac{2(n+1)}{3(n+2)}} \tag{3.1}$$

где γ- фактор формы,

$\tilde{t}_{cross}$- время до достижения.

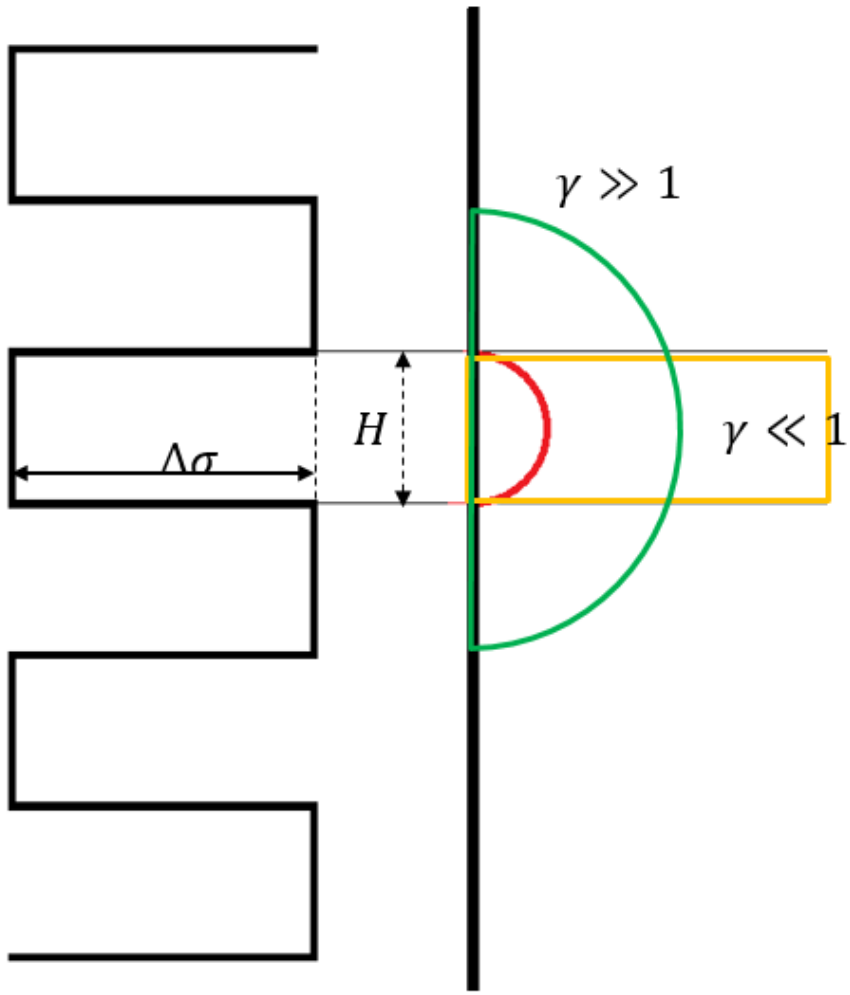

Рис.3.1. Пример роста трещины.

В момент достижения барьера:

$$\tilde{t}_{cross} \sim \gamma^{\frac{1}{2(n+1)}} \tag{3.2}$$

$$\tilde{p}_{cross} = C_2 \gamma^{\frac{1}{n+2}} \tilde{t}^{-\frac{n}{n+2}} \sim \gamma^{\frac{1}{2(n+1)}} \tag{3.3}$$

Если $\gamma \gg 1$, то $\tilde{p}_{cross} \gg 1$, и трещина будет продолжать расти радиально до времени пересечения с следующим барьером. Обычно, когда давление может упасть до $\Delta\sigma$ в момент времени $\gamma^{\frac{1}{n}}$, высота разрушения $h \sim H\gamma^{\frac{1}{n}} \gg H$ и функция периодического напряжения в этом масштабе все еще могут быть усредняется как ноль.

В случае жесткости преобладает режим $\tilde{p}_{cross} \sim \tilde{K} = \frac{K}{\Delta\sigma\sqrt{H}}$. Если $\tilde{K} \gg 1$, тонким слоем с разностью напряжений также можно пренебречь.

3.3. Безразмерный форм-фактор гармоники: критерий значимости.

В работе [4] были рассмотрены пути уменьшения размерности задачи ГРП. Было получено, что задача с трёхслойной реологией успешно параметризуется 4 параметрами. Это позволяет провести множественную серию расчётов и построить метамодель решения.

Однако при переходе к реальным задачам, количество конечных слоёв может достигать 100 и более, и тогда пространство решений достигнет порядка нескольких сотен, что делает невозможным никакую параметризацию.

От проклятия размерностей помогает избавиться замена послойного моделирования внешних параметров разложение функций внешних параметров по базису, например, в ряды Фурье:

$$\sigma(z) = \sigma_0 + \sum a_m \cos kmz + \sum b_m \sin kmz \tag{3.4}$$

а безразмерный критерий формы имеет вид:

$$F_m = \frac{1}{m^{3n}} \frac{{a_m}^{2n+2}}{k' k^{3n} E'^{2n+1} Q^n} \tag{3.5}$$

При этом, из физических соображений легко получить, что ведущее значение имеют гармоники, для которых параметр F_m максимален. Все гармоники с $F_m \ll F_{max}$ можно исключить из рассмотрения без потери точности решения. Таким образом, размерность задачи становится конечной и любой реальный профиль напряжений можно с удовлетворительной

точностью итогового решения заменить на аналитическую функцию. Так как пространство решений теперь стало конечным, а итоговое число членов разложения становится порядка 10-20, построение метамодели также существенно упрощается.

Для примера, возьмем 1-D геомеханическую модель скважины №??? и проведем данные вычисления.

Разложив функцию напряжений в ряды Фурье, мы получим:

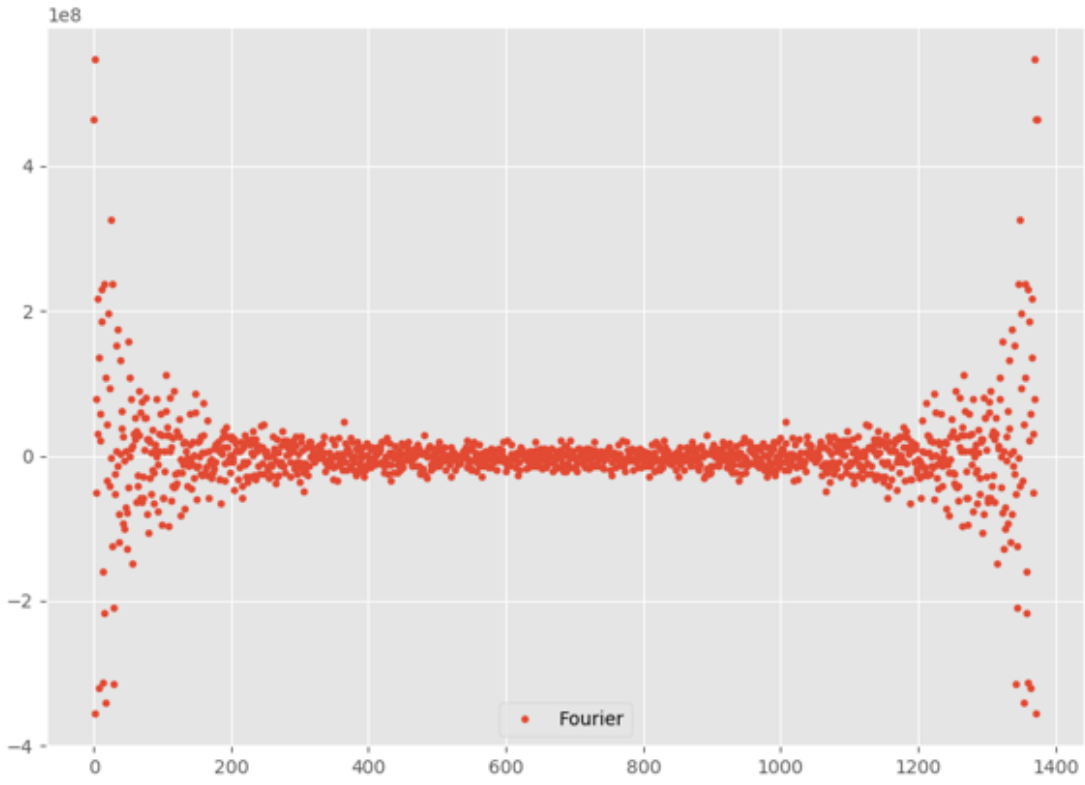

Рис.3.2. Фурье спектр

Далее, следует посмотреть, как выглядит критерий формы, и как он себя ведет.

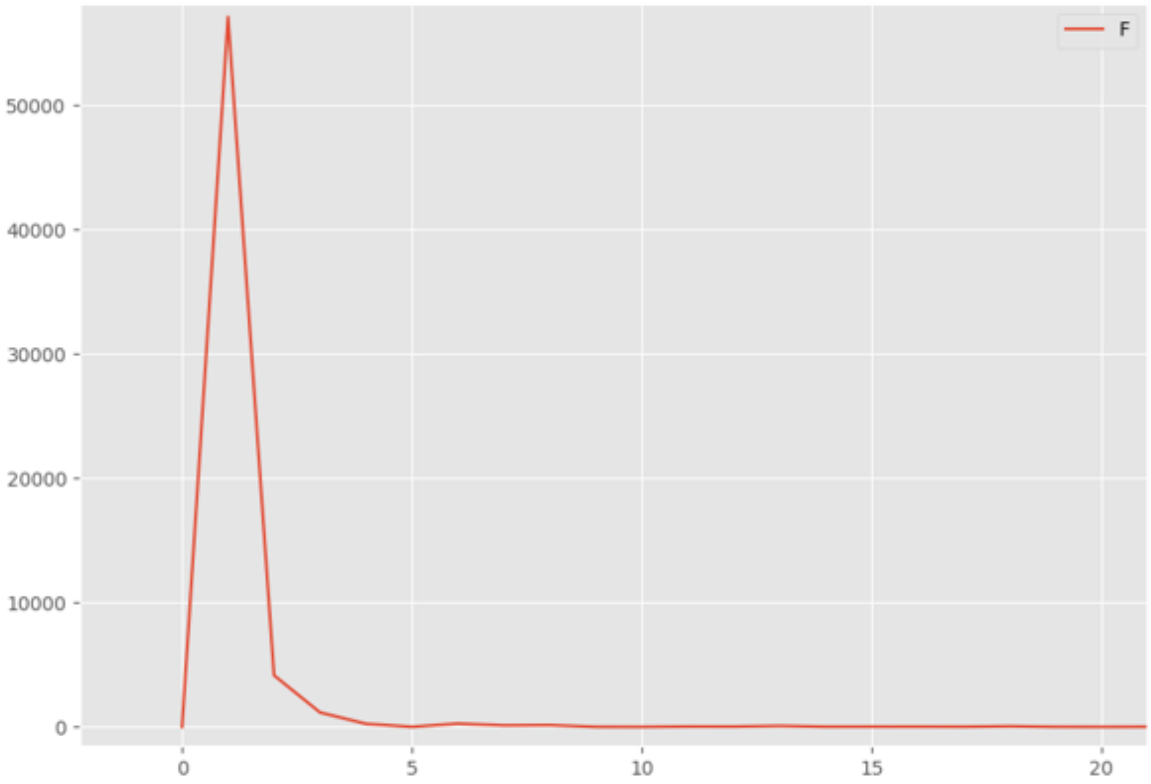

Рис.3.3. Критерий

Осталось понять, сколько членов гармоник Фурье следует оставить, чтобы точность построения профиля трещины ГРП оставалась в норме (допустимое отклонение – 5-10%)

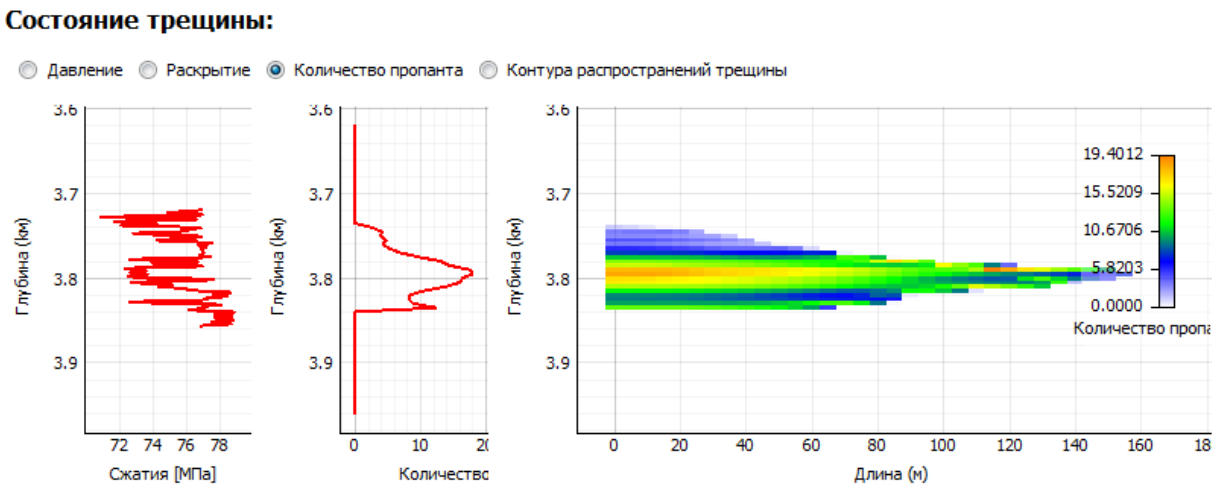

Рис.3.4. Профиль трещины ГРП. Исходная функция напряжений.

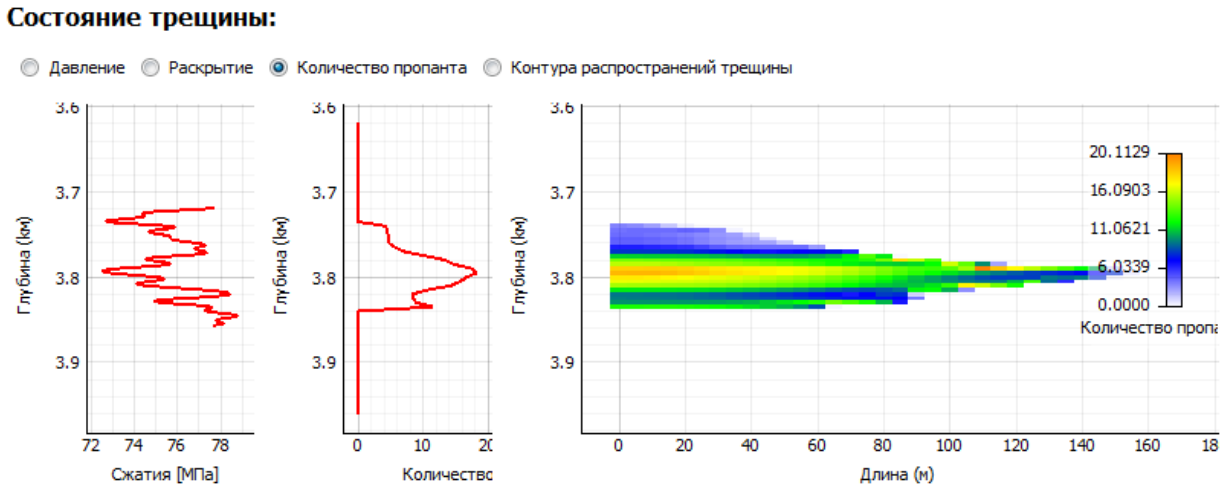

Рис.3.5. Профиль трещины ГРП. Преобразованная функция напряжений. 26 членов.

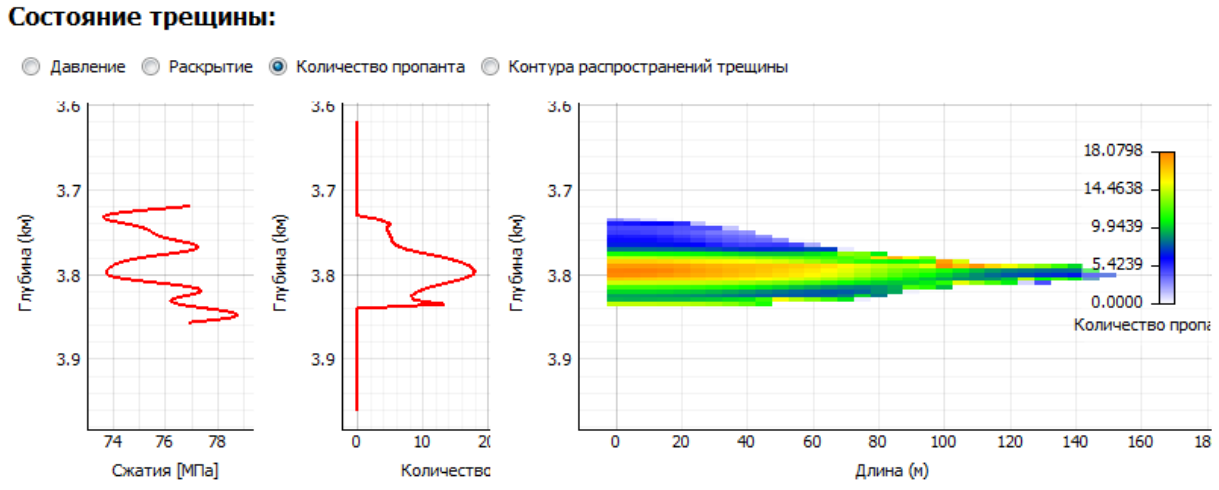

Рис.3.6. Профиль трещины ГРП. Преобразованная функция напряжений. 13 членов.

Как видно из расчетов, достаточно оставить 10-20 членов, чтобы точность построения сетки оставалась в норме. В нашем случае, при 13 членах профиль трещины остался в пределах нормы.

3.4. Уменьшение размерности

Пусть функция напряжений будет иметь 2^n точек (например, интервал в 204.8 метра с шагом 0.1 метра). Попробуем разложить исходную функцию напряжений другим способом- воспользуемся вейвлет преобразованием.

Вейвлеты Хаара- один из первых и наиболее простых вейвлетов, который прекрасно нам подойдет. Впервые он был описан Альфредом Хааром в работе [11] в 1909 году.

В случае вейвлет преобразования, безразмерный критерий формы будет иметь вид:

$$F_{i,m} = \frac{1}{2^{(N-m)3n}} \frac{{h_i}^{2n+2} H^{3n}}{k' E'^{2n+1} Q^n} \tag{3.6}$$

где h_i- детальный коэффициент,

m- уровень глубины вейлет преобразования.

Идея заключается в том, что каждый коэффициент $h_{i,m}$ описывает локальный скачок или «яму напряжений» с глубиной h_i и толщиной $\frac{H}{2^{(N-m)}}$. Чем выше уровень коэффициента, тем больше $F_{i,m}$ и этими коэффициентами нельзя пренебрегать после некоторого критического значения $F_{i,m}$.

И когда будет определен уровень глубины или критическое значение $F_{i,m}$, где общая сумма этих коэффициентов будет ценной, преобразование заканчивается. Данный уровень отвечает, во сколько раз можно увеличить шаг дискретизации, не потеряв при этом точность вычислений.

Рассмотрим функцию напряжений. Проведем вейвлет преобразование и постараемся понять, на каком уровне стоит остановиться, чтобы получить оптимальную сетку.

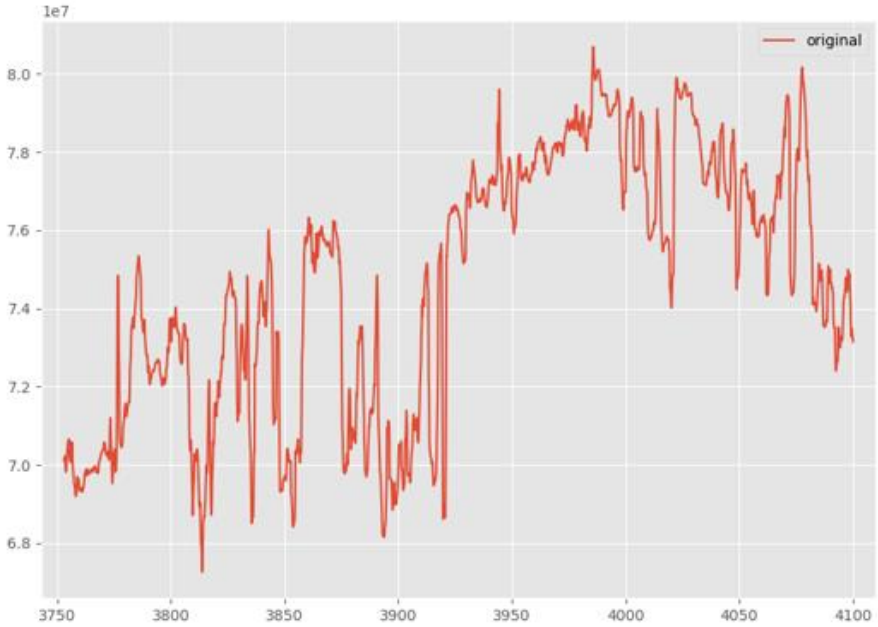

Рис.3.7. Исходная функция напряжений.

Рис.3.8. Преобразованная функция напряжений. Уровень - 6. 32 члена.

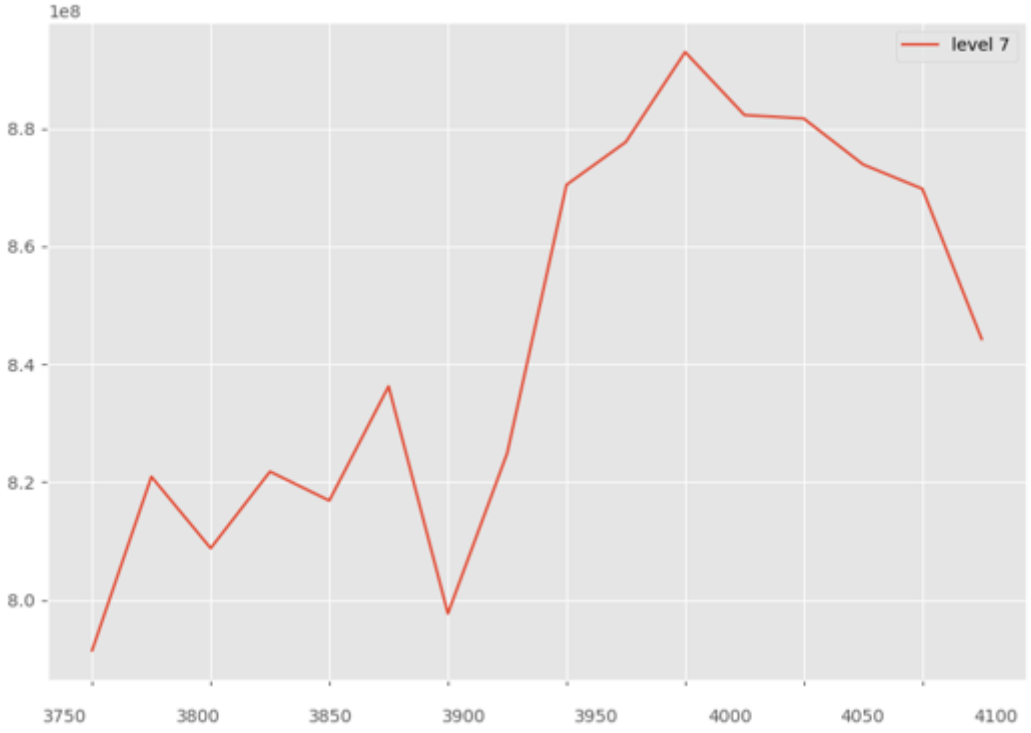

Рис.3.9. Преобразованная функция напряжений. Уровень - 7. 16 членов.

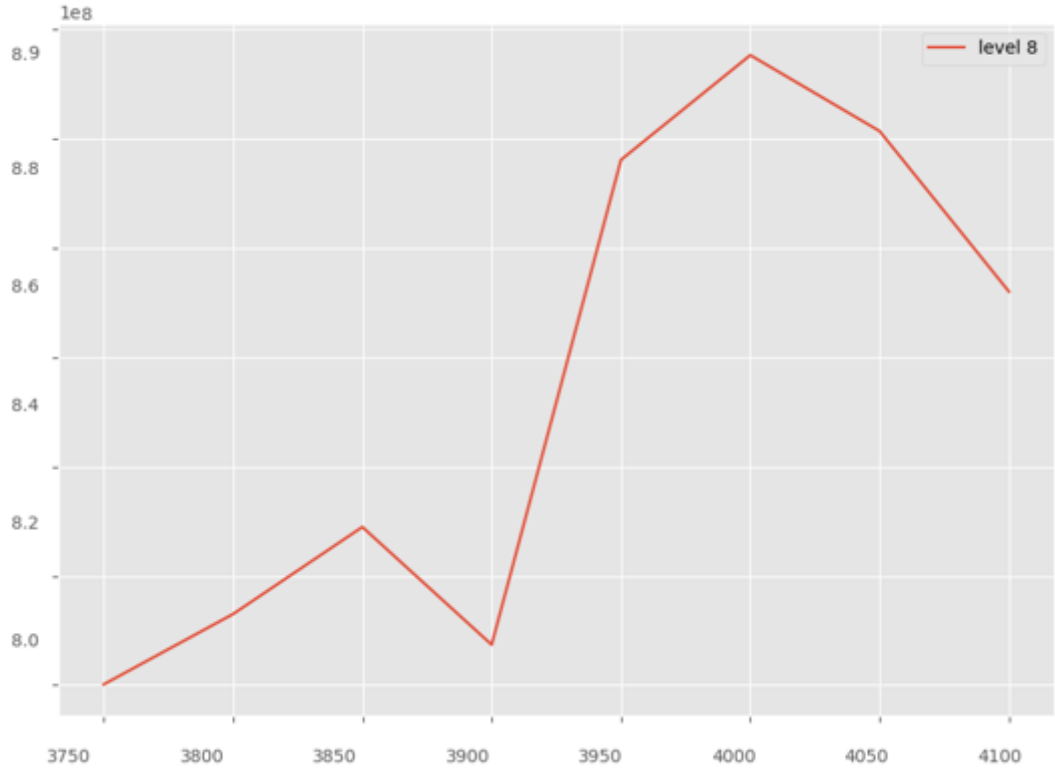

Рис.3.10. Преобразованная функция напряжений. Уровень - 8. 8 членов.

В нашем случае, 32 члена – оптимальный уровень, при котором профиль трещины остается в пределах нормы. Таким образом, мы смогли увеличить сетку в 64 раза, что существенно поможет ускорить процесс расчета.

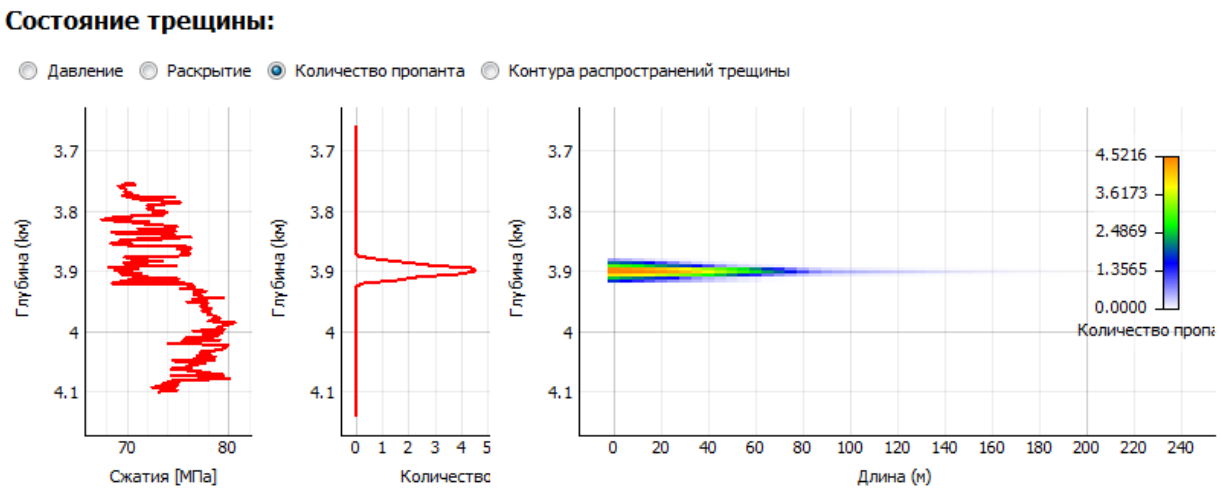

Рис.3.11. Профиль трещины ГРП. Исходная функция напряжений.

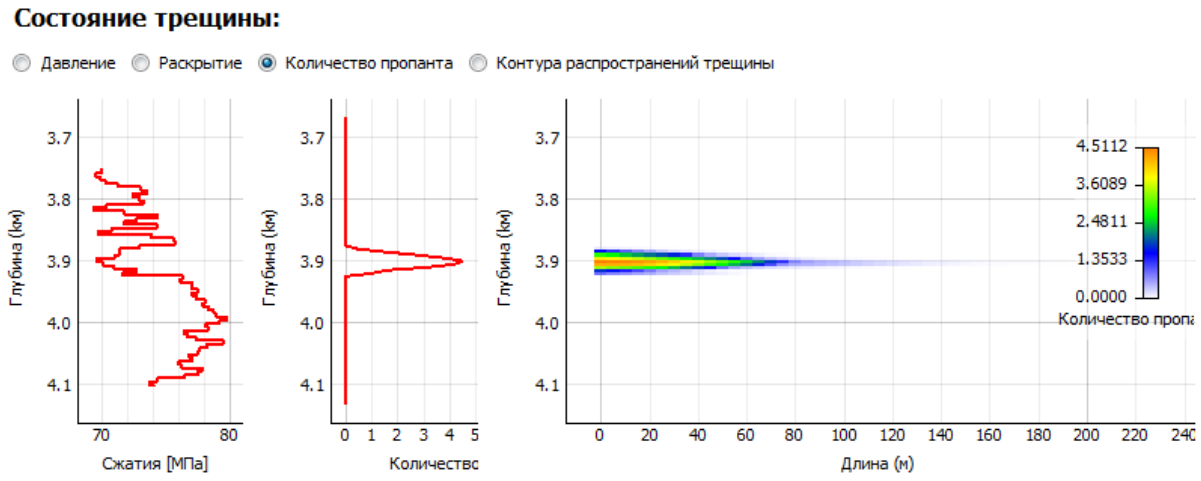

Рис.3.12. Профиль трещины ГРП. Преобразованная функция напряжений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы был создан и проверен метод спектрального преобразования входных данных. Построены несколько профилей трещины ГРП в пакете программ CyberGRP. Для удобства, были написаны программы на языке программирования Python. В данной работе решены следующие задачи:

1. Создана и откалибрована 1-D геомеханическая модель. Для этого были получены полевые и лабораторные данные с реальных скважин. Так же, был изучен пакет программ TechLog, с которым очень часто приходится работать инженерам геомеханикам. Для удобства, был написан код на языке программирования Python, что существенно ускорил процесс построения модели.

2. Определен физический критерий для фильтрации спектра. На языке программирования Python был написан код, который преобразует исходную функцию напряжений (Фурье проеобразование), высчитывает критерий, фильтрует и делает обратное преобразование. Были проделаны расчеты на большом количестве скважин и месторождений, чтобы была уверенность в правильности метода. Так же, был изучен пакет программ CyberGRP-симулятор ГРП. Проведены сравнения исходной функции напряжений с преобразованной, выявлен оптимальный размер критерия. Для проверки, были построены профили трещин ГРП. Было получено, что 10-20 членов гармоник следует оставить, чтобы получить оптимальный профиль трещины ГРП. Сравнивались полученные результаты. Так же была построена гистограмма P10, P50, P90. Проводились расчеты на разных закачиваемых жидкостях, такие как: обычная вода, сшитый гель, линейный гель. Для каждой жидкости был определен свой критерий.

3. Определена оптимальная размерность сетки. На языке программирования Python был написан код, который преобразует исходную

функцию напряжений (вейвлет преобразование), высчитывает критерий, определяет оптимальный уровень глубины преобразования и строит новую функцию, уже с большим шагом. Были построены профили трещин ГРП для исходной и новой функции напряжений в пакете программ CyberGRP. Проведен анализ полученных данных. В ходе работы получалось увеличивать шаг дискретизации функции напряжений в десятки и сотни раз, что существенно ускоряло процесс симуляции. При этом точность вычислений оставалась в пределах нормы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Хасанов М. М., Жуков В. В., Овчаренко Ю. В., Тимофеева Т. Н., Лукин С.В. Геомеханическое моделирование для решения задачи ограничения пескопрояления. Нефтяное хозяйство. 2017 г. № 12. С.48-51.
2. Хасанов М.М., Падерин Г. В., Шель Е. В., Яковлев А. А., Пустовских А.А. Подходы к моделированию гидроразрыва пласта и направления их развития. Нефтяное хозяйство. 2017 г. № 6. С. 37-41.
3. Шель Е. В., Падерин Г. В., Кабанова П. К. Методика тестирования моделей симулятора гидроразрыва пласта. Нефтяное хозяйство. 2018 г. № 12. С. 42-45
4. Шель Е. В., Шаповаленко Н. А. Конечномерная параметризация уравнений и внешних условий в модели гидроразрыва Planar3d в безразмерной постановке. XII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2019 г.
5. Adachi, J. I., Detournay, E., & Peirce, A. P. (2010). Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, *47*(4), 625-639.
6. Barree, R. D. (1983, January). A practical numerical simulator for three-dimensional fracture propagation in heterogeneous media. In *SPE reservoir simulation symposium*. Society of Petroleum Engineers.
7. Cameron, J. R., & Prud'homme, R. K. (1989). Fracturing-fluid flow behavior. In *Recent Advances in Hydraulic Fracturing* (pp. 177-209).
8. Clifton, R. J., & Abou-Sayed, A. S. (1979, January). On the computation of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures. In *Symposium on Low Permeability Gas Reservoirs*. Society of Petroleum Engineers.
9. Clifton, R. J., & Abou-Sayed, A. S. (1981, January). A variational approach to the prediction of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures. In *SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symposium*. Society of Petroleum Engineers.
10. Clifton, R. J., & Wang, J. J. (1988, January). Multiple fluids, proppant transport, and thermal effects in three-dimensional simulation of hydraulic fracturing. In *SPE annual technical conference and exhibition*. Society of Petroleum Engineers.

11. Eaton B.A. Fracture gradient prediction and its application in oilfield operations: Journal of petroleum technology, 1969, no. 21 (10):1353–1360.
12. Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Functionsysteme, Dissertation (Gottingen, 1909); Math. Ann., 69 (1910), 331 - 371, 71 (1912) , 33-53
13. Irwin, G. R. (1968). Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control. *Engineering fracture mechanics*, *1*(2), 241-257.
14. Linkov, A. M. (2016). Solution of axisymmetric hydraulic fracture problem for thinning fluids. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, *80*(2), 149-155.
15. Perkins, T. K., & Kern, L. R. (1961). Widths of hydraulic fractures. *Journal of Petroleum Technology*, *13*(09), 937-949.
16. Savitski, A. A., & Detournay, E. (2002). Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions. *International journal of solids and structures*, *39*(26), 6311-6337.
17. Zheltov, Y. P., & Khristianovich, S. A. (1955). On hydraulic fracturing of an oil-bearing stratum. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Otdel Tekhn. Nuk*, *5*(3), 41.
18. Zoback, M.D. Reservoir Geomechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 505 p.