

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

РАСЧЁТНОЕ ЗАДАНИЕ

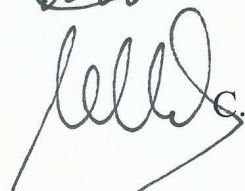
по дисциплине «Вычислительная механика»

**Исследование метода конечных элементов
на примере задачи Кирша**

Выполнил
студент гр.53604/2

Проверил
Ассистент каф «Теоретическая механика»

 Г.А. Мирошник

 С.А. Ле-Захаров

«21» декабря 2015 г.

Санкт-Петербург

2015

Содержание

Постановка задачи	3
Аналитическое решение задачи	4
Численное решение в программном пакете Abaqus.....	4
Результаты	5
Выводы.....	8
ЛИТЕРАТУРА.....	9

Постановка задачи

Сравнить аналитическое решение задачи Кирша с численным решением, полученным при помощи программного пакета abaqus и оценить влияние построенной модели на полученный результат.

Задача Кирша – задача о растяжении бесконечной пластины с круглым отверстием. Так как задача симметрична, можно создать модель в виде четверти пластины. Бесконечность пластины на модели отражена соотношением $\frac{L}{r}$. Расчётная схема представлена на рис.1 и рис.2.

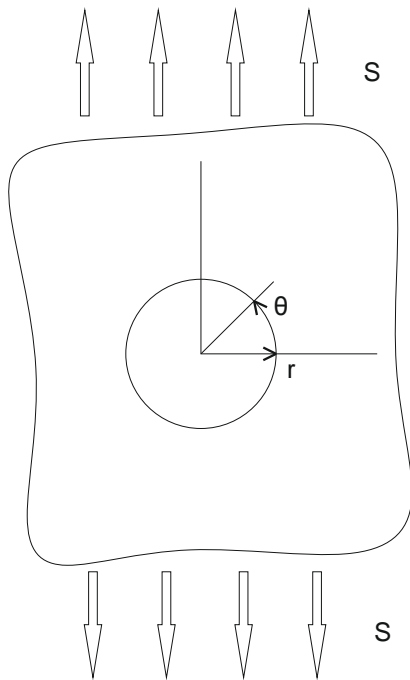


Рисунок 1. Условие задачи Кирша

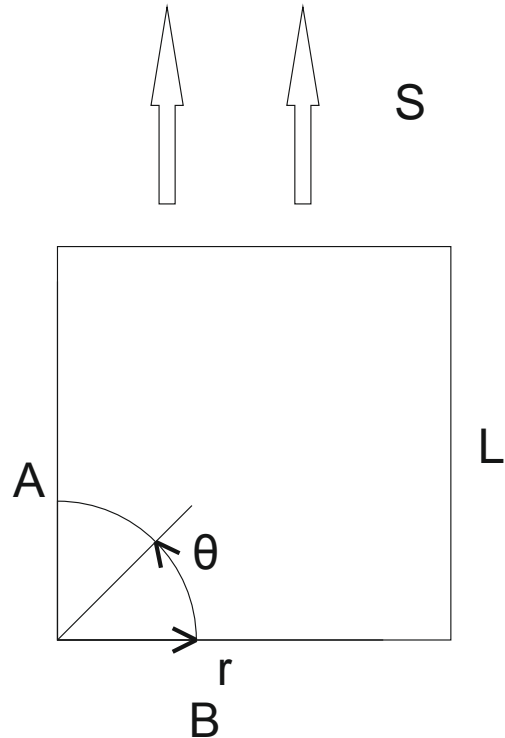


Рисунок 2. Расчётная схема

Исходные данные:

$$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$$

$$\nu = 0.3$$

$$S = 10^7 \text{ Па}$$

$$r = 1 \text{ м}$$

$$L = 10 \text{ м}$$

Где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, S – нагрузка, R – длина пластины, r – радиус окружности.

Аналитическое решение задачи

Аналитическое решение задачи Кирша изложено в книге С.П. Тимошенко и Дж. Гудьера «Теория упругости» [1]. Результаты аналитического решения:

$$\sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 - \frac{4R^2}{r^2} + \frac{3R^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$
$$\sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3R^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

Максимальное значение напряжения достигается в точке на краю отверстия ($R=r$), радиус-вектор которой перпендикулярен направлению растяжения: в этой точке $\sigma_\theta = 3S$. Напряжение в точке на отверстии, радиус-вектор которой сонаправлен растяжению минимально, и составляет $-S$, т.е. в этой точке действует направление сжатия.

Влияние отверстия на напряжение в пластине носит локальный характер и по мере удаления от отверстия напряжение стремится к S . Данное явление известно как принцип Сен-Венана.

Численное решение в программном пакете Abaqus

Была построена двухмерная модель четверти пластины (рис.3); граничные условия: сторона $Y=0$ закреплена относительно оси X , сторона $X=0$ закреплена относительно оси Y ; нагружение: распределённая нагрузка вдоль верхней стороны пластины.

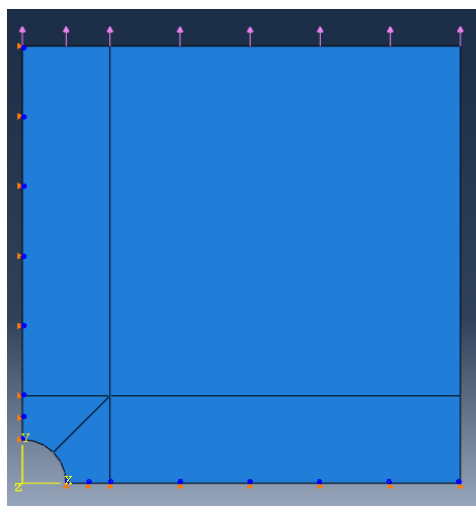


Рисунок 3. Схема нагрузок и закреплений модели

На модель была нанесена сетка со сгущением узлов в районе концентратора напряжений - отверстия.

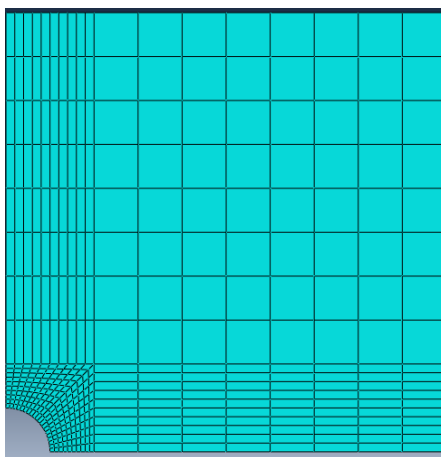


Рисунок 4. Сетка, нанесённая на модель для первого расчёта

Число узлов сетки – 424; отношение $L/r = 10$. Также был проведён расчёт для сеток с 1696 и 6784 узлами, а также для сеток с отношением $L/r = 20$ и 40.

Процедурный тип расчёта Static, General.

Результаты

Результаты численного вычисления представлены на рисунках 5-9 и в таблице 1.

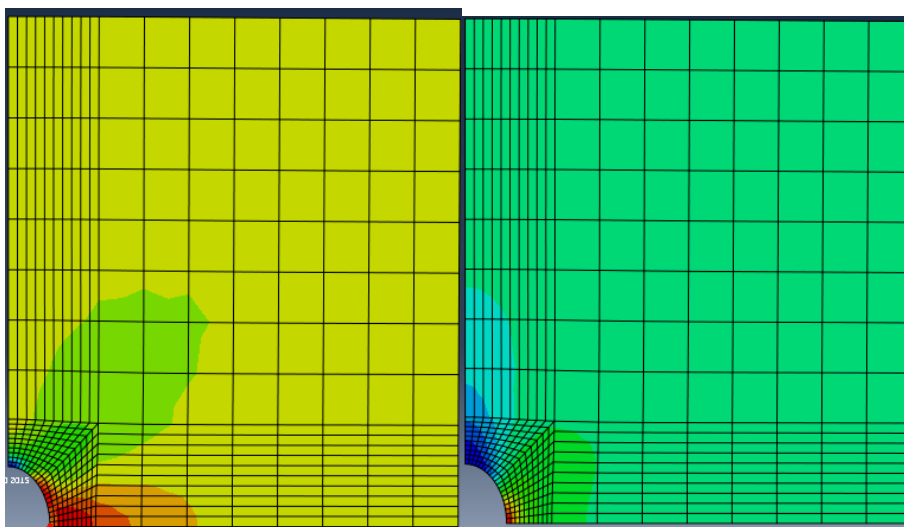


Рисунок 5. Результаты расчёта для сетки с $N=424$, $L/r = 10$

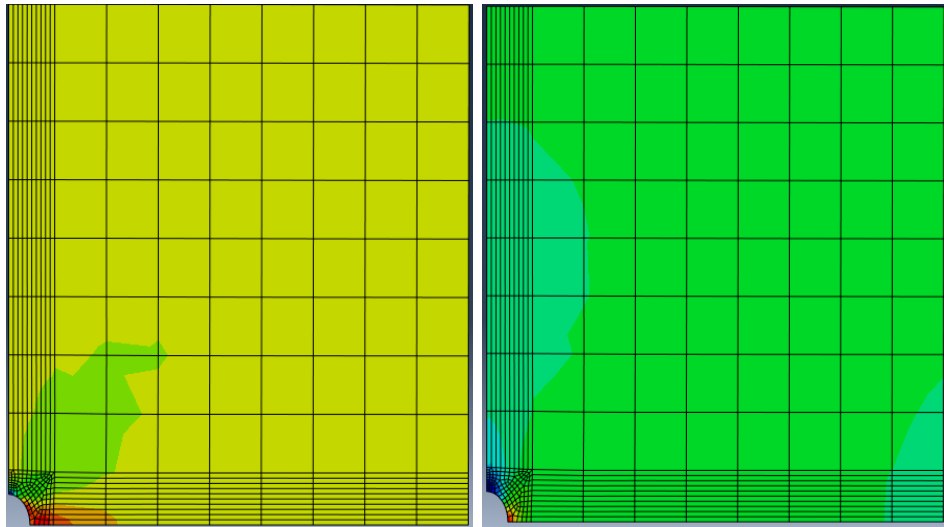


Рисунок 6. Результаты расчёта для сетки с $N=424$, $L/r = 20$

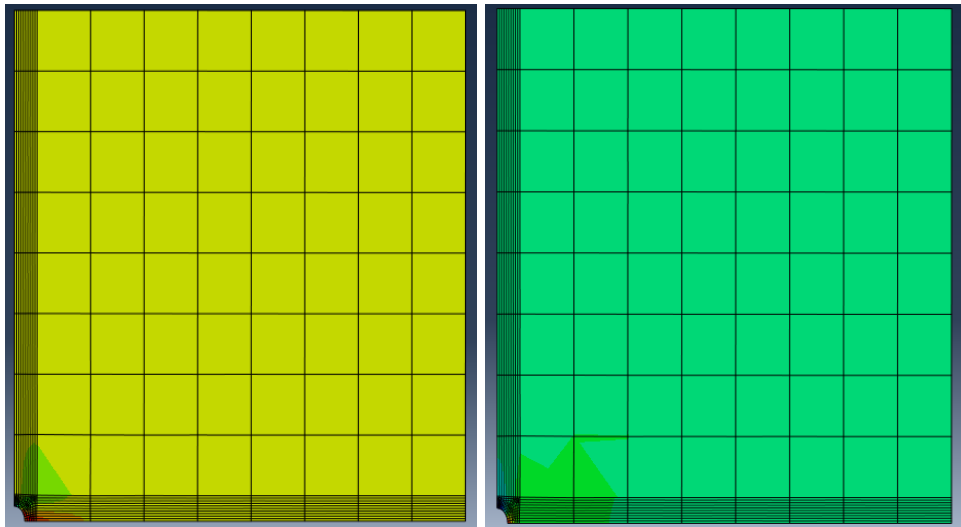


Рисунок 7. Результаты расчёта для сетки с $N=424$, $L/r = 40$

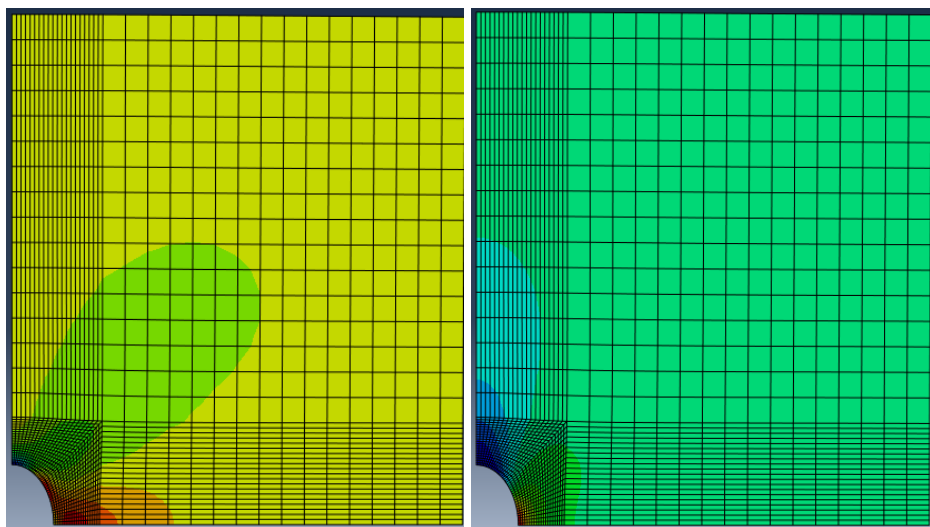


Рисунок 8. Результаты расчёта для сетки с $N=1696$, $L/r = 10$

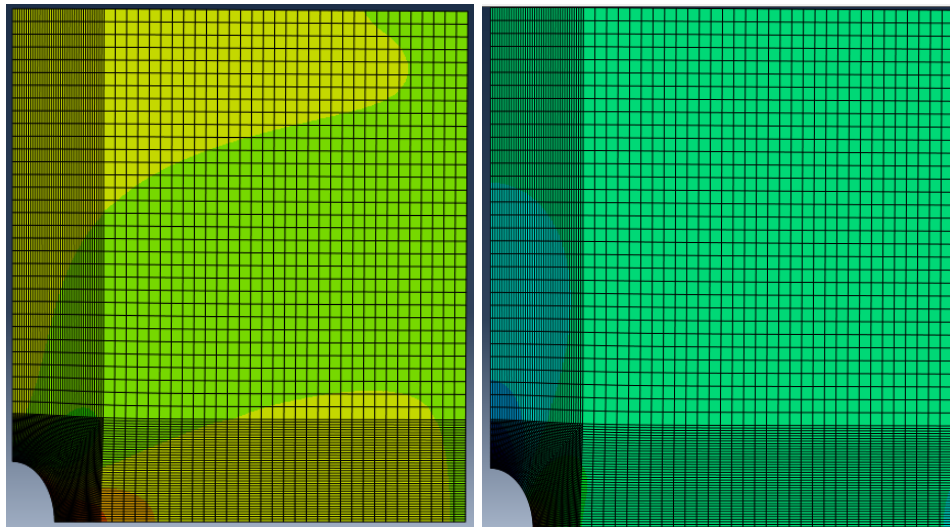


Рисунок 9. Результаты расчёта для сетки с $N=6784$, $L/r = 10$

таблица 1. Результаты расчётного задания

	$\sigma_r (S11)$, Па		$\sigma_\theta (S22)$, Па	
	А	В	А	В
Аналитическое решение	-10^7	10^7	-10^7	$3 \cdot 10^7$
$L/r = 10$, $N = 424$	$-8.46 \cdot 10^6$	$1.20 \cdot 10^6$	$-2.44 \cdot 10^5$	$2.76 \cdot 10^7$
$L/r = 20$, $N = 424$	$-8.00 \cdot 10^6$	$1.18 \cdot 10^6$	$-2.26 \cdot 10^5$	$2.70 \cdot 10^7$
$L/r = 40$, $N = 424$	$-7.71 \cdot 10^6$	$1.88 \cdot 10^6$	$-1.71 \cdot 10^5$	$2.45 \cdot 10^7$
$L/r = 10$, $N = 1696$	$-9.48 \cdot 10^6$	$6.81 \cdot 10^5$	$-1.88 \cdot 10^5$	$2.91 \cdot 10^7$
$L/r = 10$, $N = 6784$	$-1.01 \cdot 10^7$	$3.62 \cdot 10^5$	$-1.13 \cdot 10^5$	$2.99 \cdot 10^7$

На основе полученных данных построены графики сходимости численного решения к аналитическому (см. рисунки 10 и 11)

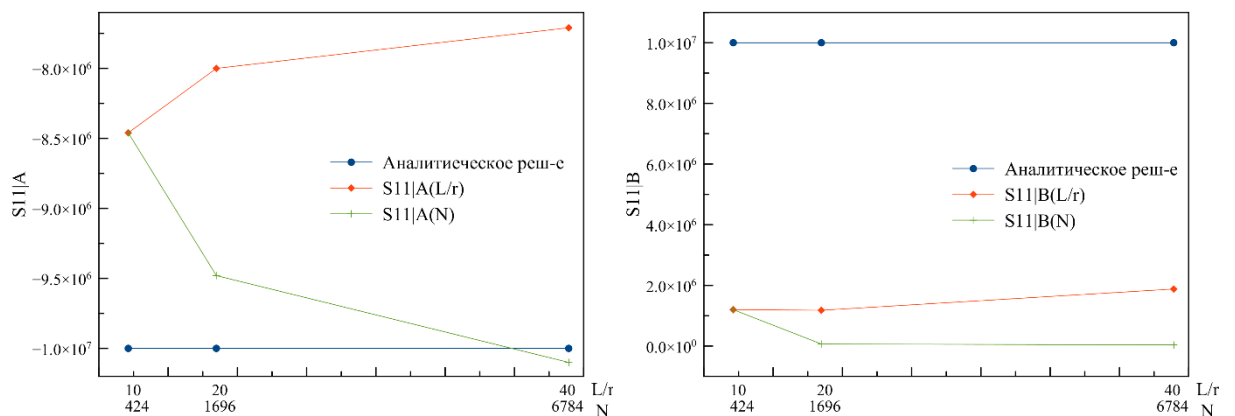


Рисунок 10. Графики сходимости для σ_r в точках А и В

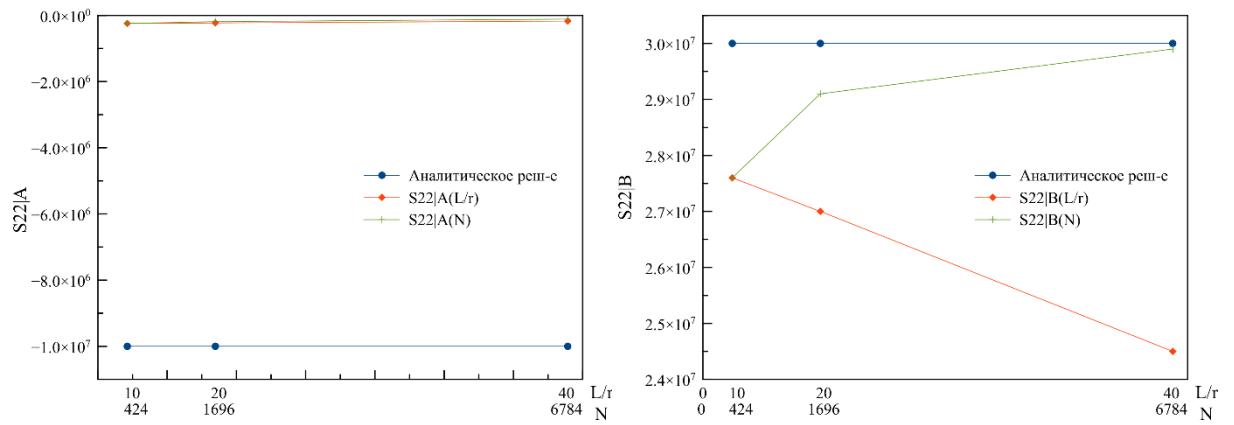


Рисунок 11. Графики сходимости для σ_θ в точках А и В

Выводы

Ни в одном из случаев численное решение не совпало с аналитическим решением задачи, следовательно, нельзя полагаться исключительно на результаты вычислений, необходимо также примерно представлять желаемый результат.

Сравнение численного решения для разных моделей показали, что увеличение как числа узлов сетки, так и отношения L/r (модель больше соответствует заданной в условии бесконечной пластины) может как повышать, так и понижать точность численного решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер «Теория упругости», 1970