

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа теоретической механики

Работа допущена к защите

директор ВШ ТМ, д. ф.-м. н., чл.-корр. РАН

А. М. Кривцов

«___» _____ 2020 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА
РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО МОДУЛИ УПРУГОСТИ
КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ**

По направлению 01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

по образовательной программе

01.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред с микроструктурой

Выполнил

студент гр. 3630103/60101

<подпись>

И.Ж. Куаге Нжики

Руководитель

профессор Высшей школы
«Теоретическая механика»
Д.Ф.-.М.Н

<подпись>

Е.А. Иванова

Санкт-Петербург

2020

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА
ВЕЛИКОГО

Институт прикладной математики и механики

Высшая школа теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШ ТМ



А.М.
Кривцов

« » 2020 г.

Задание

по выполнению выпускной квалификационной работы

студенту _____ Куаге Нжики Жильдас Иван, группы
3630103/60101 _____ фамилия, имя, отчество (при наличии), номер группы

1. Тема работы: Разработка методики численного эксперимента для определения дополнительного модуля упругости криволинейного стержня

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 15 июня 2020 год

3. Исходные данные по работе: Определяющие уравнения статики в теории стержней, форма стержня и граничные условия.

4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):

- Решение задачи теорией стержней
- Построение трехмерной модели в пакете ANSYS и решение задачи теорией упругости.
- Сравнение двух теорий и определение Модуль упругости
- Анализ результатов.

5. Дата выдачи задания 3 февраля 2020 год

Руководители ВКР _____

(подпись)

Е.А.Иванова

инициалы, фамилия

Задание принял к исполнению _____

3 февраля 2020 год

(дата)

Студент _____



Ж.И.Куаге Нжики

инициалы, фамилия

РЕФЕРАТ

На 31 с., 11 рисунков, 9 таблицы.

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО МОДУЛИ УПРУГОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ.

В данной работе рассматривается криволинейный плоский стержень, который имеет форму $\frac{3}{4}$ кругового кольца с прямоугольным поперечным сечением, для которого определяется модуль упругости B_{32} который является компонентой тензора жесткости \mathbf{B} . Мы исследовали три метода для определения упругого модуля, при этом было необходимо связать перемещение и поворот теорией стержней, и перемещение и поворот трехмерной задачи.

THE ABSTRACT

31 pages, 11 pictures, 9 tables.

DEVELOPMENT OF THE METHODOLOGY FOR THE NUMERICAL EXPERIMENT FOR DETERMINING THE ADDITIONAL MODEL OF THE CURVILINEAR ROD.

In this work, a curvilinear flat rod is considered, which has the shape of a $\frac{3}{4}$ of a circular ring with a rectangular cross section, for which the elastic modulus B_{23} is determined, which is a component of the stiffness tensor \mathbf{B} . We investigated three methods for determining the elastic modulus, and it was necessary to relate the displacement and rotation by the theory of rods to the displacement and rotation of the three-dimensional problem.

Содержание

Введение	5
Глава 1 Определения модули упругости	7
1. Уравнение статики стержней	7
2. Цель работы.....	8
3. Постановка задачи теории стержней	9
4. Решение задачи теории стержней	9
5. Связь между теорией стержней и трехмерной теорией.....	11
6. Методы определения Φt и ϵb	13
6.1 Определение Φt	13
6.2 Определение ϵb	13
7. Методы определение модуль упругости B_{23}	14
Глава 2 Постановка трехмерной задачи	16
1. Построение трехмерной модели	16
2. Расчет на сходимость.....	20
Глава 3 Анализ полученных результатов	21
1. Определение деформации кручения Φt	22
2. Определение деформации ϵb	23
3. Определение упругий модуль B_{23}	26
Заключение	29
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	30

Введение

Теория стержней имеет достаточно большое значение в нашей жизни. В нашем современном мире стержни часто используются в различных строительных конструкциях. В природе и технике деформируемые тела часто имеют вид стержней. В связи с настолько частым применением они требуют детального изучения. Теория стержней является одной из областей механики деформируемого твердого тела [13].

В механике сплошных сред определяющими уравнениями являются уравнения в частных производных с независимыми переменными: три координаты и время. В теории упругих стержней используется всего две независимые переменные: пространственная координата и время.

Все характеристики внутренней структуры стержня содержатся в тензорах жесткости, поэтому очень важно заниматься их определением. Некоторые упругие модули хорошо известны и их можно найти в различных литературах и учебных пособиях [5], [6], [20], [4], [10], [14], [3], [13], [16]. В известной литературе другие модули не определены и именно этим они интересны для изучения.

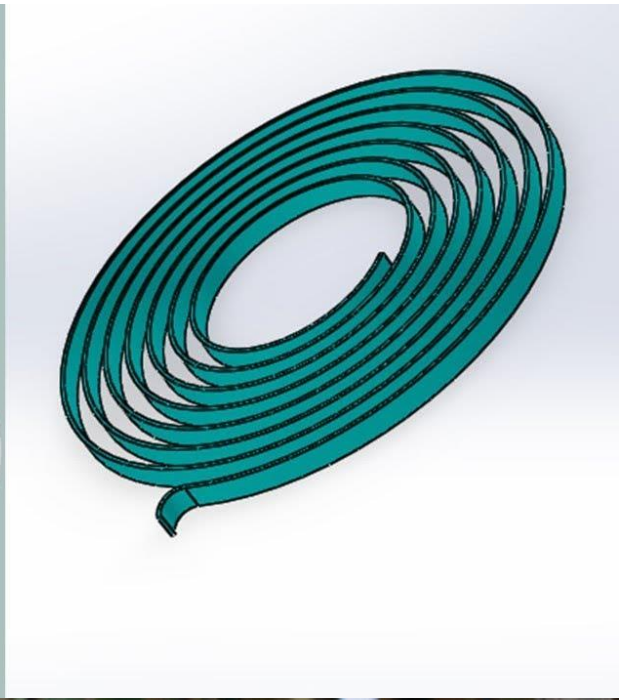


Рис.1. Виды стержни.

Глава 1 Определения модули упругости

Стержень – это трехмерное тело, у которого один размер на много больше остальных. В теории упругих стержней используется один пространственный координат, называемый криволинейный координат, он обозначается S и один координат для времени.

Дальше будем использовать статический метод для поиска упругих модулей, поэтому важно хорошо выбрать формулы, связывающие между собой состояние модели стержня и характеристики состояния трехмерного тела.

1. Уравнение статики стержней

➤ Закон статики нам дает следующие уравнения:

$$T' = 0 \quad (1.1)$$

$$M' + t \times T = 0 \quad (1.2)$$

Где T , M - векторы силы и момента в сечении стержня.

➤ Определявшие уравнения

$$T = A \cdot \varepsilon + B \cdot \Phi \quad (1.2)$$

$$M = \varepsilon \cdot B + C \cdot \Phi \quad (1.3)$$

$$\varepsilon = u' + t \times \psi; \Phi = \psi' \quad (1.4)$$

ε – вектор деформации растяжения-сдвига, Φ – вектор деформации-изгиба кручения .

A , B и C называются тензорами упругости, а их компоненты- модулями упругости. В случае плоского стержня они имеют следующие виды:

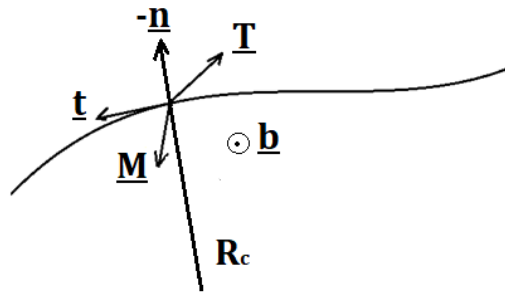


Рис.2. криволинейный стержень

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3 \quad (1.5)$$

$$\mathbf{C} = C_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + C_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_c} (B_{23} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 + B_{32} \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_2) \quad (1.7)$$

Здесь R_c – радиус кривизны, $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ – ортонормированные вектора.

2. Цель работы

В нашей работе нам потребуется рассмотреть особенную постановку задачи, в которой будут использованы упругие модули C_3, A_2 и B_{23} . Далее, решая статическую задачу по теории стержней и сравнивая с результатом решения по трехмерной теории, с помощью численного эксперимента можно выразить модуль упругости B_{23} разными формулами. Основная цель работы: выбрать наиболее подходящий метод для определения модули упругости B_{23} .

3. Постановка задачи теории стержней

Наша модель представляется собой как $\frac{3}{4}$ окружности радиусом R . Один конец ($S = 0$) жестко закреплен, а другой ($S = l$) под действием сила и крутящий момент.

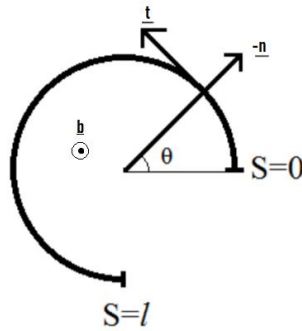


Рис.3. Вид стержней.

➤ Силовые граничные условия

$$\mathbf{T}|_{s=l} = T \mathbf{b} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{M}|_{s=l} = R T \mathbf{t}|_{s=l} \quad (3.2)$$

➤ Кинематические граничные условия

$$u|_{s=0} = 0 \quad (3.3)$$

$$\psi|_{s=0} = 0 \quad (3.4)$$

4. Решение задачи теории стержней

Решаем уравнение равновесие с учетом граничные условия

$$T' = 0 \Rightarrow T = \text{const} \Rightarrow$$

$$\mathbf{T} = T \mathbf{b} \quad (3.5)$$

Поставим (3.5) в (1.2) получаем, что:

$$\mathbf{M} = R T \mathbf{n} \times \mathbf{b} + \mathbf{M}_0 \quad (3.6)$$

с учетом (3.2),

$$\mathbf{M}_0 = 0 \quad (3.7)$$

Получаем тогда выражение вектора момента в любом сечении:

$$\mathbf{M} = R T \mathbf{t}(s) \quad (3.8)$$

Решение задачи теорией стержней поставлена выше мы получаем следующие решения:

$$\Phi = \Phi_t \mathbf{t} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_b \mathbf{b} \quad (4.2)$$

$$\Phi_t = R T \left(C_3 - \frac{B_{23}^2}{A_2 R^2} \right)^{-1} * \left(1 + \frac{B_{23}}{A_2 R^2} \right) \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_b = T \left(A_2 - \frac{B_{23}^2}{C_3 R^2} \right)^{-1} * \left(1 + \frac{B_{23}}{C_3} \right) \quad (4.4)$$

Получили уравнения, откуда можно выразить модули упругости C_3 , A_2 и B_{23} .

Дальше вставляем (4.1) –(4.2) в (1.4) получаем, что вектор перемещения и вектор углов поворота имеют следующие виды:

$$\mathbf{u} = u_b \mathbf{b} \quad (4.5)$$

$$\Psi = \Psi_n \mathbf{n} + \Psi_t \mathbf{t} \quad (4.6)$$

С помощью выражений, полученных выше, решаем уравнение (1.4) и получаем компоненты вектора перемещения в теории стержней:

$$u_b = (\varepsilon_b + R \Phi_t) S - R^2 \Phi_t \sin \left(\frac{S}{R} \right) \quad (4.7)$$

$$\Psi_n = R \Phi_t \left(\cos \left(\frac{S}{R} \right) - 1 \right) \quad (4.8)$$

$$\Psi_t = R \Phi_t \sin \left(\frac{S}{R} \right) \quad (4.9)$$

5. Связь между теорией стержней и трехмерной теорией

Далее необходимо сделать связь между теорией стержней и трехмерной теорией, при этом надо связать компоненты векторов перемещения и поворота теорией стержней и компоненты векторов перемещении трехмерной теории.

трехмерный вектор перемещении имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}^{(3)} = u^{(3)}_r \mathbf{e}_r + u^{(3)}_\theta \mathbf{e}_\theta + u^{(3)}_z \mathbf{k} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{t} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{e}_r = -\mathbf{n} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{b} \quad (5.4)$$

Приравниваем количество движения и кинетический момент трехмерного тела, и стержень [4] после интегрирования этих уравнения по времени получаем:

$$\rho_0 (\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta}_1^0 \cdot \boldsymbol{\psi}) = \int_s \rho \mathbf{u}^{(3)} \mu \, dx \, dy \quad (5.5)$$

$$\rho_0 (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\theta}_2^0 \cdot \boldsymbol{\psi}) = \int_s \rho \mathbf{a} \times \mathbf{u}^{(3)} \mu \, dx \, dy \quad (5.6)$$

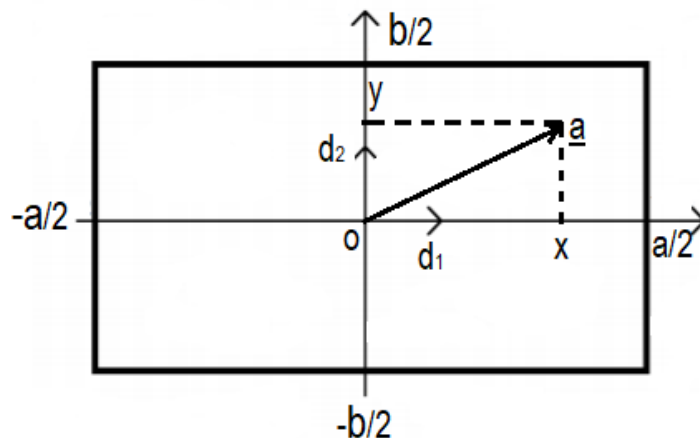


Рис.4. Вид сечения стержня.

Θ_1^1, Θ_1^0 - тензора инерции.

\mathbf{a} – вектор положения точки в поперечном сечении,

ρ – объемная плотность массы материала стержня среды,

$\rho_0 = \rho a b$ — удельная плотность стержня,

$\mu = 1 - \frac{x}{R}$ – параметр кривизны

$$\rho_0 \Theta_1^0 = \frac{a^3 b}{12 R} \rho^{(3)} \mathbf{E} \times \mathbf{n} \quad (5.7)$$

$$\rho_0 \Theta_2^0 = \rho^{(3)} \left(\frac{b^3 a}{12} \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + \frac{a^3 b}{12} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + \frac{ab(a^2 + a^2)}{12} \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3 \right) \quad (5.8)$$

Дальше вставляем выражения перемещения, поворота и тензора инерции в (5.5) -(5.6), и наконец, получаем формулы, связывающие трехмерной теорией с теорией стержней:

$$u_b - \frac{a^2}{12 R} \psi_t = \frac{1}{a b} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_z \left(1 - \frac{x}{R} \right) dx dy \quad (5.9)$$

$$\frac{b^2}{12} \psi_n = \frac{1}{a b} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y u_\theta \left(1 - \frac{x}{R} \right) dx dy \quad (5.10)$$

$$\frac{a^2 + b^2}{12 R} u_b + \frac{a^2}{12 R} \psi_t = \frac{1}{a b} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (x u_z + y u_r) \left(1 - \frac{x}{R} \right) dx dy \quad (5.11)$$

Поскольку численные расчеты нам дадут приближенное решение, необходимо преобразовать интегралы в дискретных суммах:

$$\frac{1}{a b} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_z \left(1 - \frac{x}{R} \right) dx dy \approx \frac{1}{a b} \sum_{i=0}^{N1} \sum_{j=0}^{N2} u_z^{ij} \left(1 - \frac{x_i}{R} \right) \Delta_i \Delta_j \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{a b} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y u_\theta \left(1 - \frac{x}{R} \right) dx dy \approx \frac{1}{a b} \sum_{i=0}^{N1} \sum_{j=0}^{N2} u_\theta^{ij} \left(1 - \frac{x_i}{R} \right) \Delta_i \Delta_j \quad (5.13)$$

$$\frac{1}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (xu_z + yu_r) \left(1 - \frac{x}{R}\right) dx dy \approx \frac{1}{ab} \sum_{i=0}^{N1} \sum_{j=0}^{N2} (x_i u_z^{ij} + y_j u_r^{ij}) \left(1 - \frac{x_i}{R}\right) \Delta_i \Delta_j \quad (5.14)$$

Здесь Δ_i и Δ_j являются шагами по пространству и зависят от размера сетки.

Мы получили две формулы ((4.3) –(4.4)) с помощью которых можно определить модуль упругости B_{23} при условии, что мы знаем C_3 и A_2 .

Из уравнения (4.7) –(4.9) можно разными способами определить компоненты векторов деформации. В дальнейшем будем рассматривать все методы.

6. Методы определения Φ_t и ε_b

6.1 Определение Φ_t

- Можно выразить Φ_t из (4.8) при этом ψ_n получается из (5.10):

$$\Phi_t = \frac{\psi_n}{R (\cos(\frac{S}{R}) - 1)} \quad (6.1)$$

- Так же можно выразить Φ_t из (4.9) при этом ψ_t получается из (5.8) –(5.9)

$$\Phi_t = \frac{\psi_t}{R \sin(\frac{S}{R})} \quad (6.2)$$

6.2 Определение ε_b

С помощью уравнения (4.7) –(4.9) создаем Комбинации $u_b - \frac{a^2}{12R} \psi_t$ и $u_b + R \psi_t$:

$$u_b - \frac{a^2}{12R} \psi_t = (\varepsilon_b + R \Phi_t)S - \Phi_t \sin\left(\frac{S}{R}\right) \left(R^2 + \frac{a^2}{12}\right) \quad (6.3)$$

$$u_b + R \psi_t = (\varepsilon_b + R \Phi_t)S \quad (6.4)$$

- Выражаем ε_b из (6.3) где Φ_t по (6.1) или (6.2) получаем, что:

$$\varepsilon_b = \frac{\left[u_b - \frac{a^2}{12R} \psi_t - \Phi_t \left(R S - \sin\left(\frac{S}{R}\right) * \left(R^2 + \frac{a^2}{12} \right) \right) \right]}{S} \quad (6.5)$$

➤ Выражаем ε_b из (6.4) где Φ_t по (6.1) или (6.2) получаем, что:

$$\varepsilon_b = \frac{u_b + R \psi_t}{S} - R \Phi_t \quad (6.6)$$

➤ Выражаем ε_b напрямую из (4.7) где Φ_t есть среднее значение полученных из (6.1) из (6.2)

$$\varepsilon_b = \frac{u_b + R^2 \Phi_t \sin\left(\frac{S}{R}\right)}{S} - R \Phi_t \quad (6.7)$$

$$\Phi_t = \left(\frac{\psi_n}{R (\cos\left(\frac{S}{R}\right) - 1)} + \frac{\psi_t}{R \sin\left(\frac{S}{R}\right)} \right) \quad (6.8)$$

7. Методы определение модуль упругости B_{23}

Получили, что можно определить B_{23} из уравнении (3.3) и (4.4) в которых входят параметры T , R , A_2 и C_3 .

➤ Считая A_2 и C_3 известными, можно решать уравнение (4.4) с не известным коэффициентом B_{23} получаем следующие решения:

$$B_{23_1} = \frac{-R^2 T + R \sqrt{4 A_2 C_3 \varepsilon_b^2 - 4 C_3 \varepsilon_b T + (R T)^2}}{2 \varepsilon_b} \quad (7.1)$$

$$B_{23_2} = \frac{-R^2 T - R \sqrt{4 A_2 C_3 \varepsilon_b^2 - 4 C_3 \varepsilon_b T + (R T)^2}}{2 \varepsilon_b} \quad (7.2)$$

C_3 - Жесткость на кручение известный коэффициент, который можно найти в литературах [1].

$$C_3 = G a b^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{64 b}{\pi^5 a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\text{th}\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2b}\right)}{(2k+1)^5} \right] \quad (7.3)$$

$$A_2 = \kappa_1 G a b \quad (7.4)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (7.5)$$

$$k_1 = \frac{5}{6} \text{ из [15],}$$

A_2 –модуль поперечного сдвига.

G - модуль сдвига [19], E - модуль Юнга [22], ν - коэффициент Пуассона [17].

- Теперь считаем A_2 неизвестным выражаем его из (4.3), затем вставляем его в (4.4) получаем:

$$A_2 = \frac{\Phi_t}{R \varepsilon_b} (C_3 + B_{23}) - \frac{B_{23}}{R^2} \quad (7.6)$$

$$B_{23}^2 + \left(C_3 + \frac{R(RT - C_3\Phi_t)}{\varepsilon_b} \right) B_{23} + C_3 \frac{R(RT - C_3\Phi_t)}{\varepsilon_b} = 0 \quad (7.6)$$

Решая это, уравнение получаем следующие решения:

$$B_{23_3} = \frac{R(C_3\Phi_t - RT)}{\varepsilon_b} \quad (7.7)$$

$$B_{23_4} = -C_3 \Rightarrow \varepsilon_b = 0$$

Далее подробно рассмотрим особые случаи, когда $B_{23} = 0$ и $B_{23} = -C_3$.

Оба случая дают нам одно и тоже выражение для компонента вектора деформации:

$$\Phi_t = \frac{RT}{C_3} \quad (7.8)$$

но отличающийся результат для компоненты вектора деформации ε_b .

- В случае, когда $B_{23} = -C_3$, компонента вектора деформации:
 $\varepsilon_b = 0$.
 Тогда компонента вектора перемещений u_b принимает вид:

$$u_b = R \Phi_t S - R^2 \Phi_t \sin\left(\frac{S}{R}\right) \quad (7.9)$$

где S – криволинейный координата сечения.

- При $V_{23} = 0$ компонента вектора деформации равно:

$$\varepsilon_b = \frac{T}{A_2} \quad (7.10)$$

компонента вектора перемещений u_b останется такого же вида.

Разложим в ряд синус, чтобы оценить, как влияет компонента вектора деформаций ε_b , то получим:

$$u_b \approx \varepsilon_b S + \frac{S^3 \Phi_t}{6 R} \quad (7.11)$$

рассмотрим u_b в случае, когда $\varepsilon_b = 0$, где Φ_t принято по (7.8):

$$u_b|_{\varepsilon_b=0} \approx \frac{S^3 T}{6 C_3} \quad (7.12)$$

Также рассмотрим u_b в случае, когда $\varepsilon_b = \frac{T}{A_2}$, где Φ_t принято по (7.8):

$$u_b|_{\varepsilon_b=\frac{T}{A_2}} \approx \left(\frac{1}{A_2} + \frac{S^2}{6 C_3}\right) T S \quad (7.13)$$

можно сделать вывод, что при малых значениях S компоненты векторов перемещений u_b могут существенно отличаться.

Глава 2 Постановка трехмерной задачи

1. Построение трехмерной модели

Для вычисления двойных интегралов, входящих в формулы (5.12) – (5.14), нам надо решать трехмерную задачу, и получать компоненты вектора перемещении (5.1) узлов сечения трехмерной модели. Задача была решена с помощью численного пакета ANSYS WORKBENCH.

Наша модель представляет собой $\frac{3}{4}$ трехмерного кольца с прямоугольным сечением. Один конец жестко закреплен, а второй под действием силы и крутящего момента. Идея состоит в том, что модули упругости не зависят от сечения, поэтому создали три сечения в углах $\theta = 120$, $\theta_2 = 160$, $\theta_3 = 210$. Согласно с принципом Сен-Венан Эти сечения подбирали так, чтобы они были далеко от торцов стержня.

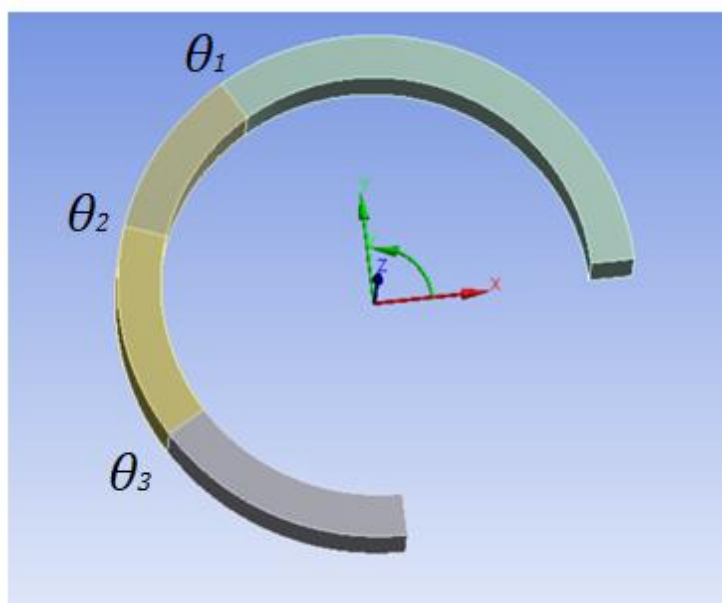


Рис.5. Трехмерная модель.

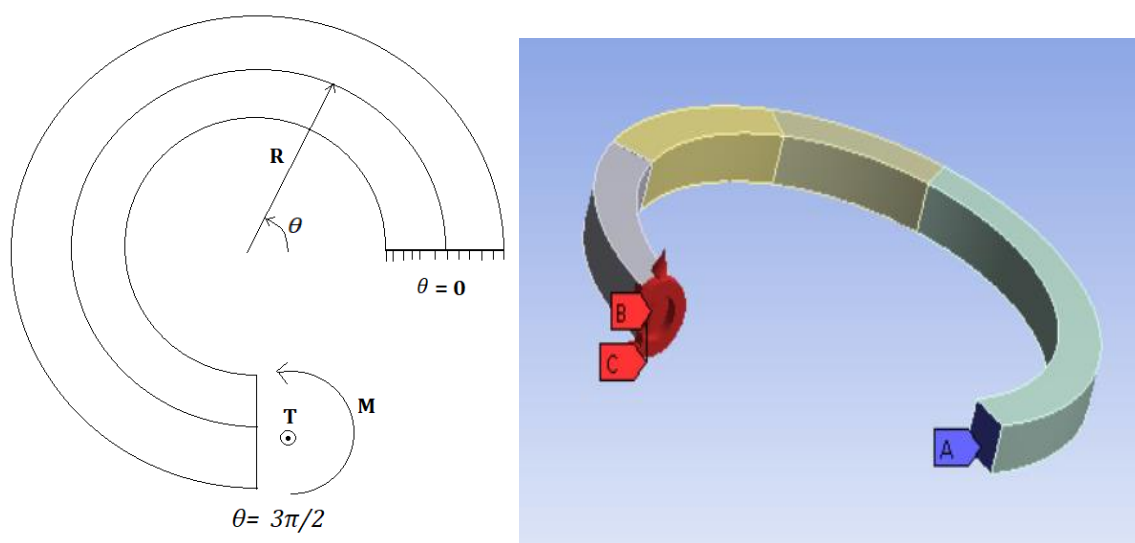


Рис.6. граничные условия

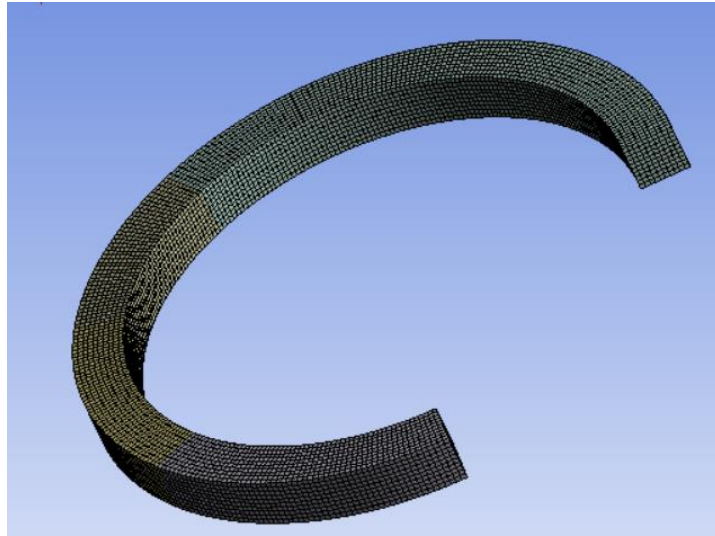


Рис.7. Сетка

Поперечное сечение стержня, изображено на рис. 4, имеет следующие характеристики: $a = 0.2$ м, $b = 0.2$ м. $R = 1,1$ м, $T = 10000$ Н, $M = RT = 11000$ Н.м. Необходимо ввести цилиндрическую систему координат. Локальная система координат расположена так, чтобы начало оси z должно совпадать с началом z в декартовой системе координат и быть расположено так, чтобы по z получалась локальная координата сечения. Также необходимо выполнять условие для положения глобальной декартовой оси x относительно стержня. Глобальная декартова ось x должна быть направлена с сечением, где угол $\theta = 0$.

Стержень сделан из стали [16] с характеристиками: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$.

Outline of Schematic A2: Données techniques					
	A	B	C	D	E
1	Contents of Données techniques			Source	Description
2	Material				
3	Acier standard				Fatigue Data at zero mean stress comes from 1998 ASME BPV Code, Section 8, Div 2, Table 5 -110.1
*	Click here to add a new material				

Properties of Outline Row 3: Acier standard					
	A	B	C	D	E
1	Property	Value	Unit		
2	Material Field Variables	Table			
3	Density	7850	kg m...		
4	Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion				
6	Isotropic Elasticity				
7	Derive from	Youn...			
8	Young's Modulus	2E+11	Pa		
9	Poisson's Ratio	0,3			
10	Bulk Modulus	1,6667E+11	Pa		
11	Shear Modulus	7,6923E+10	Pa		
12	Strain-Life Parameters				
20	S-N Curve	Tabular			
24	Tensile Yield Strength	2,5E+08	Pa		
25	Compressive Yield Strength	2,5E+08	Pa		

Рис.8. Свойства материала.

В результате решения были определены координаты вектора перемещении в цилиндрической системе координат, а также координаты узлов. Вычисление интеграла проводилось в Пакете MATLAB

В данных полученные из ANSYS, координаты узлов выводились в глобальной декартовой системе координат. Нам надо получить локальные координаты как показано на рис.4. Для того, чтобы получить нужные нам координаты произведем переход от декартовых координат (x, y, z) к цилиндрическим координатам (r, Θ , z). Для этого используем следующую формулу:

$$r = X \text{ Cos}(\Theta) + Y \text{ Sin}(\Theta)$$

Дальше пишем формулу для локального координата x в сечении стержня (см. рис.4.). Для этого выполним еще одно преобразование: $x = R - r$

2. Расчет на сходимость.

Проводили несколько анализов при разных числах элементов в секте данной трехмерной модели и с помощью преобразования интегралов в суммы, мы получили приближенные значения для интегралов.

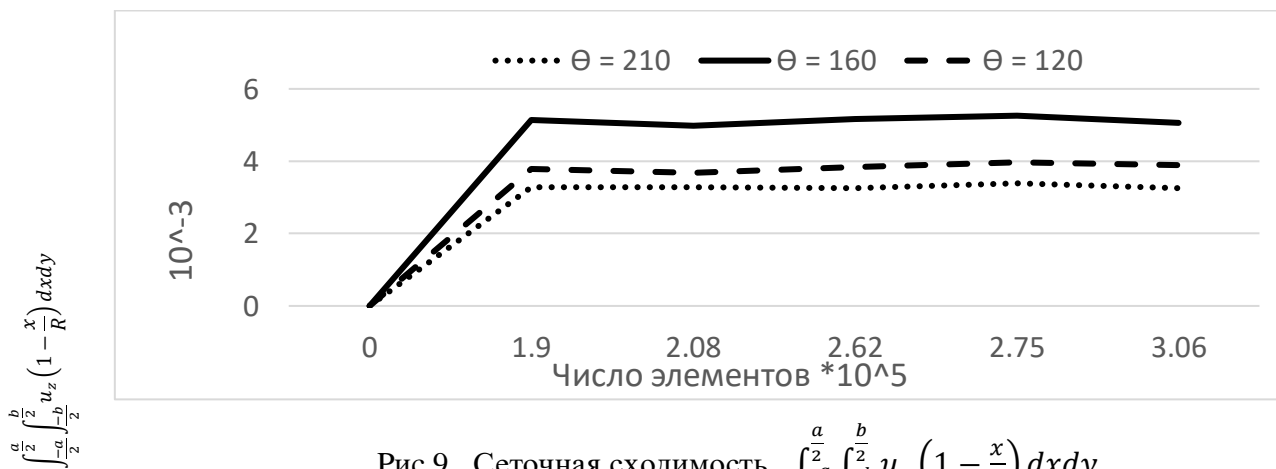


Рис.9. Сеточная сходимость $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_z \left(1 - \frac{x}{R}\right) dx dy$

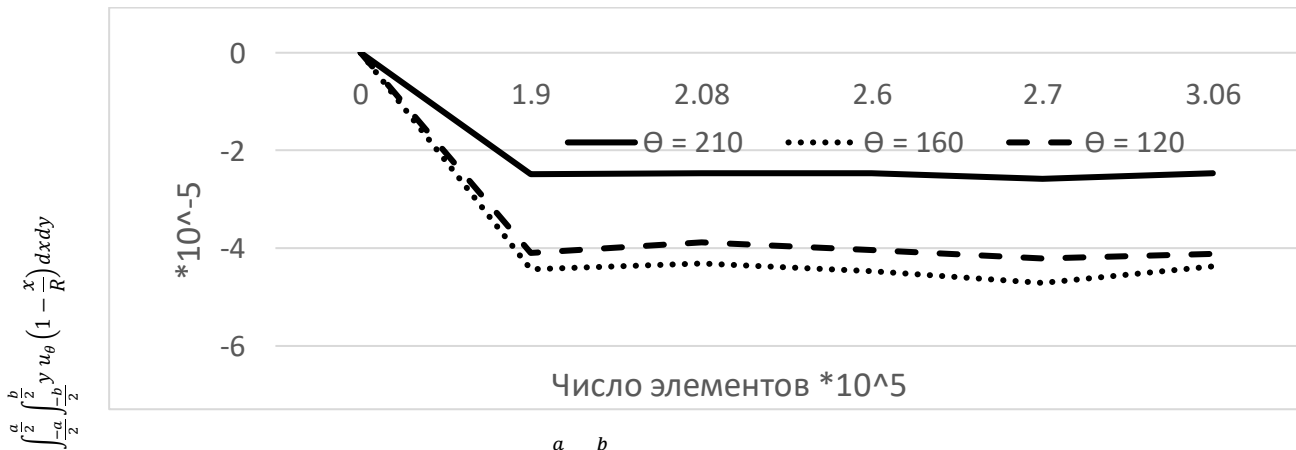


Рис.10. Сеточная сходимость $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y u_\theta \left(1 - \frac{x}{R}\right) dx dy$

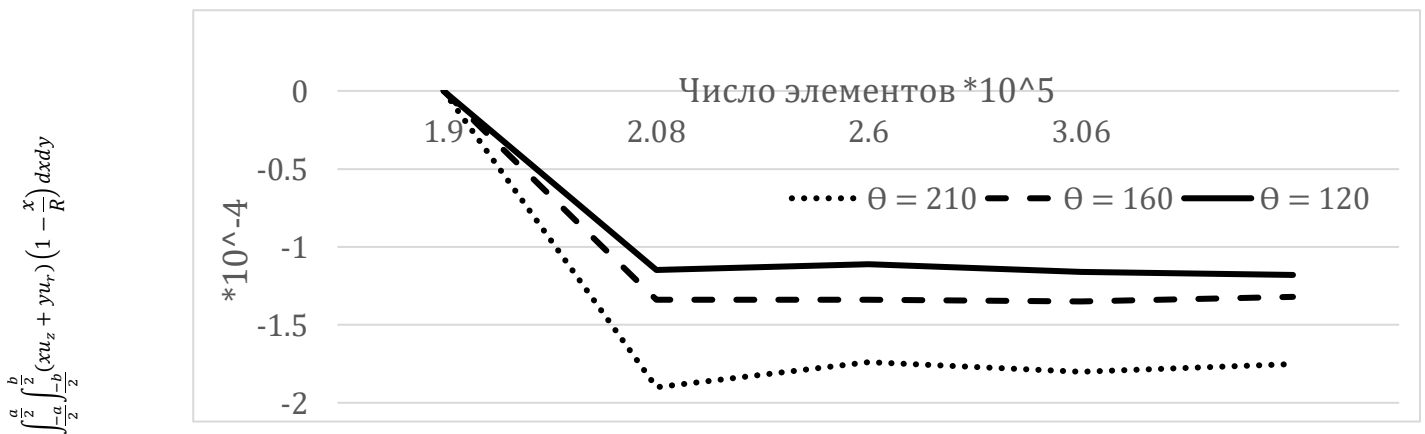


Рис.11. Сеточная сходимость $\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (xu_z + yu_r) \left(1 - \frac{x}{R}\right) dx dy$

Глава 3 Анализ полученных результатов

Проводили 10 экспериментов с разными стержнями и граничными условиями. Для всех экспериментов $T = 10\ 000$ н.

Тип сечения	a (м)	b (м)	M (н.м)	R (м)
1	0.1	0.05	10 500	1.05
2	0.1	0.1	10 500	1.05
3	0.1	0.15	10 500	1.05
4	0.1	0.2	10 500	1.05
5	0.2	0.1	11 000	1.1
6	0.2	0.2	11 000	1.1
7	0.2	0.3	11 000	1.1
8	0.2	0.5	11 000	1.1
9	0.3	0.1	11 500	1.15
10	0.3	0.2	11 500	1.15

Таблица. 1

Дальше относительная погрешность δ оценивалась относительно усредненного по сечениям значения.

1. Определение деформации кручения Φ_t

Компонента вектора деформации Φ_t может быть найдена из формулы (6.1)

$$\Phi_t = \frac{\psi_n}{R (\cos(\frac{S}{R}) - 1)}$$

Где ψ_n определяется по интегральным формулам.

Результаты расчетов представлены в следующей таблице.

Тип сечения	$\theta_1, 10^{-4}$	$\theta_1, 10^{-4}$	$\theta_1, 10^{-4}$	$\delta, \%$
1	1,743299	1,366932	1,381501	7.2
2	0,351344	0,234953	0,262806	11.1
3	0,166481	0,135450	0,136836	6.3
4	0,105770	0,084243	0,084062	7
5	0,069417	0,053130	0,055766	8.2
6	0,012989	0,010151	0,010166	8.4
7	0,006260	0,004919	0,004978	7.5
8	0,001821	0,001386	0,001516	7.2
9	0,030787	0,022808	0,024249	9.1
10	0,003724	0,003029	0,003330	5

Таблица. 2

Компонента вектора деформации Φ_t можно тоже вычислить с формулой (6.2).

$$\Phi_t = \frac{\psi_t}{R \sin(\frac{S}{R})}$$

Где ψ_t определяется по интегральным формулам.

Результаты расчетов представлены в следующей таблице.

Тип сечения	θ_1	θ_1	θ_1	$\delta, \%$
1	-0,0698424	-0,0738294	-0,09122989	14.1
2	-0,0079376	-0,0074366	-0,0143367	20
3	-0,0022002	-0,0026391	-0,0039443	15
4	-0,0008818	-0,0009909	-0,0015554	16
5	-0,0048791	-0,0053939	-0,0067102	9
6	-0,0005594	-0,0006174	-0,0007949	10
7	-0,0001553	-0,0002028	-0,0002307	11
8	-0,0000312	-0,0000368	-0,0000380	17
9	-0,0035617	-0,0040930	-0,0046180	12
10	-0,0004238	-0,0005776	-0,0006181	21

Таблица. 3

Мы получили, что самые стабильные значения Φ_t по сечению получили, когда Φ_t выражается по (6.1) при этом ψ_n определяется по интегральным формулам.

2. Определение деформации ε_b

Ранее мы видели, что компонент вектора деформации ε_b можно определить тремя способами, так же будем рассматривать все эти методы и определять какой дает самые стабильные результаты по сечениям.

❖ Первый способ — это когда ε_b выражается через $u_b - \frac{a^2}{12R} \psi_t$ по формуле

(6.5)

$$\varepsilon_b = \frac{\left[u_b - \frac{a^2}{12R} \psi_t - \Phi_t \left(R S - \sin\left(\frac{S}{R}\right) * \left(R^2 + \frac{a^2}{12} \right) \right) \right]}{S}$$

Результаты расчетов представлены в следующей таблице.

Тип сечения	θ_1	θ_1	θ_1	δ , %
1	-0,0257085	-0,0501574	-0,0761435	25,2
2	-0,0059786	-0,0105259	-0,0151543	23,4
3	-0,0030569	-0,0050941	-0,0071361	20
4	-0,0020073	-0,0032818	-0,0045053	19,3
5	-0,0017407	-0,0033582	-0,0051165	24,4
6	-0,0004080	-0,0007172	-0,0010182	22,3
7	-0,0002066	-0,0003586	-0,0004719	20,1
8	-0,0000979	-0,0001600	-0,0002200	19,2
9	-0,0009985	-0,0020263	-0,0031823	25
10	-0,0001930	-0,0003740	-0,0005224	23

Таблица. 4

❖ Второй способ — это когда ε_b выражается через $u_b + R \psi_t$ по формуле (6.6)

$$\varepsilon_b = \frac{u_b + R \psi_t}{S} - R \Phi_t$$

Результаты расчетов представлены в следующей таблице.

Тип сечения	θ_1	θ_1	θ_1	δ , %
1	0,017388	0,017988	0,070790	50
2	-0,001071	-0,004653	0,001986	30
3	-0,001692	-0,002650	-0,002413	24
4	-0,001458	-0,004361	-0,002639	32
5	0,001406	0,001852	0,003281	25
6	-0,000047	-0,000120	-0,000023	26
7	-0,000106	-0,000162	-0,000183	29

8	-0,000078	-0,000124	-0,000272	37
9	0,001398	0,002104	0,002860	34
10	0,000092	0,0000409	0,000286	53

Таблица. 5

❖ Третий способ — это когда ε_b выражается через u_b по формуле (6.7)

$$\varepsilon_b = \frac{u_b + R^2 \Phi_t \sin\left(\frac{S}{R}\right)}{S} - \Phi_t R$$

Где Φ_t усреднённое значение формул (6.1) и (6.2).

$$\Phi_t = \frac{1}{2} \left(\frac{\psi_n}{R \left(\cos\left(\frac{S}{R}\right) - 1\right)} + \frac{\psi_t}{R \sin\left(\frac{S}{R}\right)} \right)$$

Результаты расчетов представлены в следующей таблице.

Тип сечения	θ_1	θ_1	θ_1	$\delta, \%$
1	-4,17E-03	-1,61E-02	-2,67E-03	55
2	-3,53E-03	-7,09E-03	-6,58E-03	38
3	-2,38E-03	-3,87E-03	-4,77E-03	35
4	-1,73E-03	-2,82E-03	-3,57E-03	36
5	-1,70E-04	-7,54E-04	-9,16E-04	45
6	-2,28E-04	-4,19E-04	-5,20E-04	41
7	-1,57E-04	-2,61E-04	-3,27E-04	36
8	-8,78E-05	-1,42E-04	-1,96E-04	38
9	1,95E-04	3,72E-05	-1,60E-04	45
10	-5,10E-05	-8,28E-05	-1,18E-04	39

Таблица. 6

Мы получили, что самые стабильные значения ε_b по сечению получили, когда ε_b выражается по (6.5) при этом Φ_t получили после усреднения формул (6.1) и (6.2).

3. Определение упругий модуль B_{23}

Ранее в нашей работе мы получили три формулы (7.1), (7.2) и (7.7) для определения модуля упругости B_{23} в которые входят компоненты векторов деформации. Из предыдущих расчетов получили самые стабильные методы по сечению для вычисления компоненты векторов деформации и поворота, далее мы будем их использовать для определения модуля упругости B_{23} .

❖ В качестве первого метода будем рассматривать случай, когда B_{23} выражается по формуле (7.1)

$$B_{23_1} = \frac{-R^2 T + R \sqrt{4 A_2 C_3 \varepsilon_b^2 - 4 C_3 \varepsilon_b T + (R T)^2}}{2 \varepsilon_b}$$

где ε_b по таблице 4, C_3 по формуле (7.3) и A_2 по (7.4).

Результаты расчетов представлены в следующей таблице.

Тип сечения	$\theta_1, 10^8$	$\theta_1, 10^8$	$\theta_1, 10^8$	$\delta, \%$
1	-0,0860789511	-0,0870788720	-0,0874407189	0.604
2	-0,2677406931	-0,2714644213	-0,2729757677	0.735
3	-0,4724691994	-0,4791361060	-0,4820312762	0.755
4	-0,6796228928	-0,6894228406	-0,6936634434	0.77
5	-0,7064733146	-0,7218221036	-0,7275936077	0.981
6	-2,1843592463	-2,2403568597	-2,2626685308	1.84
7	-3,8444300889	-3,9506943261	-3,9861919951	1.4

8	-7,1821789958	-7,3831553570	-7,4716874334	1.48
9	-1,1820341301	-1,2126554474	-1,2236763284	1.33
10	-3,9873220316	-4,1292275880	-4,1734718897	1.77

Таблица. 7

❖ Второй метод определения B_{23} это с формулой (7.2)

$$B_{23_1} = \frac{-R^2 T - R \sqrt{4 A_2 C_3 \varepsilon_b^2 - 4 C_3 \varepsilon_b T + (R T)^2}}{2 \varepsilon_b}$$

где ε_b по таблице 4, C_3 по формуле (7.3) и A_2 по (7.4).

Результаты расчетов представлены в следующей таблице.

Тип сечения	$\theta_1, 10^8$	$\theta_1, 10^8$	$\theta_1, 10^8$	$\delta, \%$
1	0,0903674143	0,0892769511	0,0888886432	0,637
2	0,2861815654	0,2819386121	0,2802509162	0,8
3	0,5085348262	0,5007789220	0,4974809412	0,83
4	0,7345470037	0,7230171489	0,7181343681	0,856
5	0,7759853600	0,7578529693	0,7512427380	1,25
6	2,4809618458	2,4090739998	2,3815044199	1,57
7	4,4299966030	4,2881427869	4,2426096210	1,69
8	8,4183275763	8,1392880893	8,0216763271	1,832
9	1,3144806023	1,2779210424	1,2652341134	1,48
10	4,6724496203	4,4828622412	4,4266378551	2,13

Таблица. 8

❖ Третий метод определения B_{23} получилось с формулой (7.7)

$$B_{23_3} = \frac{R (C_3 \Phi_t - R T)}{\varepsilon_b}$$

где ε_b по таблице 4, C_3 по формуле (7.3) и A_2 по (7.4).

Результаты расчетов представлены в следующей таблице.

Тип сечения	$\theta_1, 10^8$	$\theta_1, 10^8$	$\theta_1, 10^8$	$\delta, \%$
1	0,0042728086	0,0021917876	0,0014437357	41
2	0,0183741464	0,0104488464	0,0072554579	35
3	0,0359364623	0,0215797527	0,0154041867	31,8
4	0,0547294613	0,0334994819	0,0244019992	30,5
5	0,0693577165	0,0359696399	0,0236069501	40,9
6	0,2959966308	0,1684477705	0,1186458755	34,86
7	0,5843621943	0,3369030862	0,2559982797	32,6
8	1,2345786579	0,7554014983	0,5494073650	30,5
9	0,1322309707	0,0651869234	0,0415045280	44,02
10	0,6843256870	0,3532980617	0,2529010474	39,38

Таблица. 9

Заключение

В ходе нашей работы, мы решили задачу теорией стержней, получили компоненты векторов перемещения и поворота, с помощью численного пакета ANSYS мы решили трехмерную задачу и получили компоненты вектора перемещения. Далее мы сравнили перемещение и поворот трехмерной задачи и теорией стержней, и исследовали разные способы вычисления модуля упругости B_{23} и получили, что самые стабильные результаты по сечениям получили, когда B_{23} выражается через формулы (7.1) и (7.2), при этом Φ_t по формуле (6.1) и ϵ_b по (6.5), но значения B_{23} полученные с этими методами не реалистичные. Формула (7.7) давала большие погрешности, но значения B_{23} полученные с ней вполне разумные, потому что они дают малую поправку в решение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Владиславлев В.С, Малов А.Н., Поздняков С.Н. и др., Справочник металлиста Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва, 1958. – 452 с.
2. Гаврилова Т.Ф., Котова И.В., Тимофеев С.А. Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии: Методическое пособие. Тольятти: ТГУ, 2005. – 41 с.
3. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Том 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М. ВИНТИ, 1973. – 272 с.
4. Жилин П.А., Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней, учеб.пособие, СПб: Издательство Политехнического университета, 2007. – 101 с.
5. Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. Издательство Политехнического университета, 2006. – 167с.
6. Каплун, А. Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера. Практическое руководство. – М.: Либроком, 2013. – 272 с.
7. Мн 9. Кац А. М. Теория упругости. 2-е изд., стер., – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 208 с.
8. Лойцянский Л.Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики, Дрофа, 2006. – 719 с.
9. Лукьянов А.М., Лукьянов М.А. Расчет стержней на изгиб и кручение.:Методические указания. - М.: МИИТ, 2005. – 36 с.
10. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. — 940 с.
11. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М.: Физматгиз, 1962. – 456 с. 47
12. Самогин Ю.Н., Хроматов В.Е., Чирков В.П. Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов, ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 200 с.
13. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. для втузов. В 2-х ч. Ч.1. Статика. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.
14. Уманский А.А., Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений, Сройиздат, 1972. – 600 с.
15. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.

16. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. СССР – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.
17. Bansal R. K. A text book of strength of materials. Laxmi Publications, 2010. – 1106 pages.
18. Mindlin R.D. influence of rotatory inertia and shear on flexural vibrations of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. 18. P. 31–38.
19. M. Spittel, T. Spittel. Young's modulus of steel. Springer Berlin Heidelberg 2009. – 88 pages.
20. Roylance David. Mechanical properties of materials. MIT 2008. – 128 pages.
21. Wolfram S. The mathematica book. Cambridge university press, 1996. – 1496 pages.