

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
А.М. Кривцов
«___»_____2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА
Анализ влияния граничных условий в решении задачи гиперболической
термоупругости Лорда-Шульмана

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

Направленность

01.03.03_03 Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи

Выполнил

студент гр. 5030103/90301

Д.С. Волков

Руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

Е.Ю. Витохин

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Волкову Денису Сергеевичу гр. 5030103/90103

1. Тема работы: Анализ влияния граничных условий в решении задачи гиперболической термоупругости Лорда-Шульмана
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: Актуальные научные публикации по теме работы, справочная и учебная литература по модели термоупругости Лорда-Шульмана, граничные и начальные условия, данные о внешнем воздействии, физико-механические характеристики материалов.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
Постановка задачи термоупругости Лорда-Шульмана для плоско-напряженного состояния, численное решение методом конечных разностей при различных граничных условиях, сравнение и анализ полученных результатов.
Постановка и численное решение методом конечных разностей задачи классической термоупругости для плоско-напряженного состояния, сравнение с результатами, полученными в термоупругости Лорда-Шульмана.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): распределения температур, деформаций, напряжений на поверхности пластины и в центральном сечении.
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР: _____ Витохин Е.Ю. – доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению: 27.02.2023

Студент: _____ Д. С. Волков

РЕФЕРАТ

На 37 с., 16 рисунков, 5 таблиц

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТЕРМОУПРУГОСТЬ ЛОРДА-ШУЛЬМАНА, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, ПЛОСКО-НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

В данной работе рассматривается применение модели гиперболической термоупругости Лорда-Шульмана к задаче об импульсном тепловом воздействии на тонкую пластинку. Сформулирована система уравнений в перемещениях для постановки плоского напряжения, произведены расчеты для граничных условий I и II рода. С помощью метода конечных разностей получены распределения температур, деформаций, напряжений.

THE ABSTRACT

On 38 pages, 16 figure, 5 tables

LORD-SHULMAN HYPERBOLIC THERMOELASTICITY, PLANE STRESS CONDITION, FINITE DIFFERENCE METHOD

The problem of short-impulse heating in a thin plate is considered applying the Lord-Shulman hyperbolic model of thermoelasticity. The governing equations are derived using the displacement formulation, supposing the plane stress condition. The calculations are conducted for the boundary conditions. The finite difference method is used to get the temperature, strain, stress fields.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. МОДЕЛЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ	7
1.1. Теплопроводность Каттанео-Вернотте	7
1.2. Термоупругость Лорда-Шульмана	8
1.3. Термоупругие волны	9
ГЛАВА 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕНИИ	11
2.1. Система уравнений гиперболической термоупругости в перемещениях	11
2.2. Осесимметричная деформация круглой пластины	15
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ	17
ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ	22
4.1. Импульсное воздействие в центре	22
4.2. Жесткая заделка, постоянная температура на границах	25
4.3. Жесткая заделка, теплоизолированные стенки	29
4.4. Свободные границы, постоянная температура на стенках	32
4.5. Теплоизолированные стенки, свободные границы	35
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	38
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	39

ВВЕДЕНИЕ

Для математического описания распространения тепла в средах, как правило, используется классическое параболическое уравнение теплопроводности, основанное на известном с начала XIX века законе Фурье. Область применимости закона Фурье достаточна для использования в большинстве инженерных задач. Однако в некоторых случаях, в частности, предполагающих моделирование распределения тепла на крайне малых интервалах времени, малых (наномасштабных) областях пространства, закон Фурье вступает в противоречие с экспериментальными фактами. Классическим примером здесь выступает краткосрочное импульсное лазерное воздействие. Процесс теплопроводности на таких масштабах является квантовым по своей природе, осуществляется посредством электрон-фононного взаимодействия в металлах и фононного рассеяния в диэлектриках и полупроводниках, что качественно отличается от используемого в законе Фурье представления о диффузии тепла [11]. Это приводит к необходимости модифицировать закон Фурье. Для моделирования на малых масштабах времени вводится предположение о волновом характере распространения тепла.

Теория гиперболической термоупругости Лорда-Шульмана, в основу которой положен альтернативный закону Фурье закон Каттанео-Вернотте, позволяет рассматривать распространения тепла на малых временных масштабах с учетом деформируемости среды.

Целью данной работы является математическое моделирование импульсного распространения тепла в тонкой пластине при различных граничных условиях, а также сопоставление полученного решения со случаем параболической теплопроводности Фурье.

В ходе работы будут решены следующие задачи:

1. Постановка задачи об импульсном тепловом воздействии на тонкую пластину
2. Численное решение задачи классической термоупругости методом конечных разностей при различных граничных условиях
3. Численное решение задачи термоупругости Лорда-Шульмана методом конечных разностей при различных граничных условиях и значениях времени релаксации
4. Анализ влияния гиперболических эффектов в распределении тепла для каждого вида граничных условий

ГЛАВА 1 . МОДЕЛЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

1.1. Теплопроводность Каттанео-Вернотте

Классическая теория теплопроводности основана на законе Фурье:

$$\underline{h}(\underline{r}, t) = -\lambda \nabla T(\underline{r}, t), \quad (1.1)$$

где \underline{h} – вектор теплового потока, ∇ – оператор Гамильтона, λ – определяемый эмпирически коэффициент, называемый коэффициентом теплопроводности, вектор \underline{r} – радиус-вектор в пространстве.

После подстановки в закон баланса энергии получаем параболическое уравнение теплопроводности:

$$\lambda \Delta T - \rho c_v \dot{T} = \rho q \quad (1.2)$$

Предположим, что изменение вектора теплового потока под воздействием температурного градиента происходит не мгновенно, а с некоторой задержкой во времени (временем релаксации) τ :

$$\underline{h}(\underline{r}, t + \tau) = -\lambda \nabla T(\underline{r}, t)$$

Раскладывая левую часть в ряд Тейлора до линейного слагаемого, получим модель теплопроводности Каттанео-Вернотте. Каттанео [12] (1948) предложил модифицировать закон Фурье:

$$\underline{h} + \tau \dot{\underline{h}} = -\lambda \nabla T \quad (1.3)$$

Время релаксации τ – время запаздывания изменения теплового потока после мгновенного изменения температурного градиента. Когда τ мало, уравнения (1.3) сводится к закону Фурье (1.1).

Подставив в уравнение баланса энергии, получим гиперболическое уравнение телеграфного типа [6]:

$$\lambda\Delta T - \rho c_v(\dot{T} + \tau\ddot{T}) = \rho(q + \tau\dot{q}), \quad (1.4)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Уравнение (1.4) допускает решение в виде плоской волны:

$$T = T_0 \exp(i(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{r}))$$

После подстановки в уравнение (1.4) (считая задачу однородной), получим дисперсионные соотношения:

$$\lambda k^2 - i\omega\rho c_v + \tau\rho c_v\omega^2 = 0 \quad (1.5)$$

Фазовая скорость:

$$v_p = \frac{\omega}{\text{Re}k} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c_v} \frac{\omega}{\sqrt{i\omega - \tau\omega^2}}} \quad (1.6)$$

Для случая распространения теплового импульса примем $\omega \rightarrow +\infty$:

$$v_{p\infty} = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho c_v \tau}}$$

В случае $\tau = 0$, который соответствует классическому уравнению Фурье, скорость распространения $v_{p\infty} \rightarrow \infty$.

1.2. Термоупругость Лорда-Шульмана

Классическая линейная теория термоупругости описывает поля перемещений и температур в упругой среде следующим образом:

$$\lambda\Delta T - \rho c_v\dot{T} - \alpha KT\dot{\epsilon} = -\rho q \quad (1.7)$$

$$\left(K + \frac{1}{3}G\right) \nabla\nabla \cdot \underline{u} + G\Delta\underline{u} - \alpha K\nabla T = \rho\ddot{\underline{u}} \quad (1.8)$$

где K – модуль объемного сжатия, G – модуль сдвига, α – объемный коэффициент теплового расширения, \underline{u} – вектор перемещений, $\varepsilon = tr \underline{\underline{\varepsilon}}$ – объемная деформация, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \underline{u} \nabla)$ – линейный тензор деформаций.

Поле перемещений \underline{u} определяется уравнением (1.8), которое является гиперболическим (волновым) уравнением. Поле температур T определяется уравнением (1.7), которое представляет собой параболическое уравнение теплопроводности. Это приводит к парадоксальному результату. Любое механическое или температурное воздействие произведет эффект, проявляющийся мгновенно на бесконечно удаленном из источника воздействия расстоянии как в поле температур, так и в поле перемещений в силу связности системы.

Для устранения этого противоречия необходимо использовать для описания теплопроводности уравнения, предполагающие конечную скорость распространения тепла. Лорд (1967) [14] предложил использовать теорию теплопроводности Каттанео для описания термоупругого состояния. Уравнения термоупругости Лорда-Шульмана имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda \Delta T - \rho c_v (\dot{T} - \tau \ddot{T}) - \alpha K T_0 (\dot{\varepsilon} + \tau \ddot{\varepsilon}) = \rho (q + \tau \dot{q}) \\ (K - \frac{2}{3}G) \nabla \varepsilon + 2G \nabla \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} - \alpha K \nabla T = \rho \ddot{\underline{u}} \end{cases} \quad (1.9)$$

1.3. Термоупругие волны

Закон движения в перемещениях:

$$\frac{9KG}{3K + 4G} \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \cdot \underline{u} + G \tilde{\Delta} \underline{u} - \frac{6\alpha KG}{3K + 4G} \tilde{\nabla} \tilde{T} = \rho \ddot{\underline{u}}$$

Воспользуемся векторным равенством:

$$\Delta \underline{u} = \nabla \nabla \cdot \underline{u} - \nabla \times \nabla \times \underline{u}$$

$$4G \frac{3K + G}{3K + 4G} \nabla \nabla \cdot \underline{u} - G (\nabla \times \nabla \times \underline{u}) - \frac{6\alpha KG}{3K + 4G} \nabla T = \rho \ddot{\underline{u}}$$

Разложим тензор деформаций на шаровую часть (характеризующую объемную деформацию), и девиаторную (характеризующую сдвиговую деформацию):

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \underbrace{\nabla \cdot \underline{u} \underline{E}}_{tr \underline{\underline{\varepsilon}}} + dev \underline{\underline{\varepsilon}}$$

При $\nabla \cdot \underline{u} = 0$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = dev \underline{\underline{\varepsilon}},$$

т.е. присутствует только сдвиговая компонента деформаций.

$$\lambda \Delta \tilde{T} - \rho c_v \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t^2} \right) = \rho \left(q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} \right),$$

т.е. T не зависит от сдвиговых деформаций.

$$G \Delta \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} + \frac{6\alpha KG}{3K + 4G} \nabla T$$

При $\nabla \times \underline{u} = 0$:

$$4G \frac{3K + G}{3K + 4G} \Delta \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} + \frac{6\alpha KG}{3K + 4G} \nabla T$$

Аналитические выражения для квазиакустической и квазитепловой составляющей теплового фронта и дисперсионные соотношения для системы уравнений термоупругости Лорда-Шульмана рассматриваются в работе [9].

Для случая классической термоупругости скорости, соответствующие постановке плоского напряжения, приведены в [5].

ГЛАВА 2 . ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕНИИ

2.1. Система уравнений гиперболической термоупругости в перемещениях

Система уравнений термоупругости состоит из уравнения теплопроводности, уравнения динамики и определяющих соотношений для данного материала.

Определяющие соотношения, устанавливающие связь между напряжениями, деформациями и температурой, даются законом Дюамеля-Неймана:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon \underline{\underline{E}} + 2G\underline{\underline{e}} - \alpha K \tilde{T} \underline{\underline{E}} \quad (2.1)$$

Запишем (2.1) в скалярном виде для нормальных напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{xx} - \alpha K \tilde{T} \\ \sigma_{yy} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{yy} - \alpha K \tilde{T} \\ \sigma_{zz} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{zz} - \alpha K \tilde{T} \end{cases} \quad (2.2)$$

Выразим из системы (2.2) нормальные деформации:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{2\sigma_{xx}(3K + G) - (3K - 2G)(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})}{18KG} + \frac{1}{3}\alpha\tilde{T} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{2\sigma_{yy}(3K + G) - (3K - 2G)(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})}{18KG} + \frac{1}{3}\alpha\tilde{T} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{2\sigma_{zz}(3K + G) - (3K - 2G)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{18KG} + \frac{1}{3}\alpha\tilde{T} \end{cases} \quad (2.3)$$

Рассмотрим плоское напряженное состояние, т.е. такое, в котором тензор напряжений имеет вид:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (2.4)$$

Заметим, что в отличие от случая плоской деформации, функции перемещений $\underline{u} = u_x(x, y, z, t)\underline{i} + u_y(x, y, z, t)\underline{j} + u_z(x, y, z, t)\underline{k}$ и температура $\tilde{T} = \tilde{T}(x, y, z, t)$ будут, строго говоря, зависеть от всех трех пространственных координат. Для того, чтобы сохранять возможность решить задачу в двумерной постановке, примем в качестве дополнительного предположения, что температура \tilde{T} не меняется по толщине пластинки, т.е:

$$T = T(x, y, t), \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} = 0$$

Подставим выражения для тензора напряжений (2.4) в уравнения (2.3):

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{2\sigma_{xx}(3K + G) - (3K - 2G)\sigma_{yy}}{18KG} + \frac{1}{3}\alpha\tilde{T} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{2\sigma_{yy}(3K + G) - (3K - 2G)\sigma_{xx}}{18KG} + \frac{1}{3}\alpha\tilde{T} \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{(3K - 2G)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{18KG} + \frac{1}{3}\alpha\tilde{T} \end{cases} \quad (2.5)$$

Получили, что деформации вдоль нормали z определяются через компоненты напряжений, лежащих в плоскости. Подставив полученные уравнения в (2.2), получим:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{4G(3K + G)\varepsilon_{xx} + 2G(3K - 2G)\varepsilon_{yy} - 6\alpha KG\tilde{T}}{4G + 3K} \\ \sigma_{yy} = \frac{4G(3K + G)\varepsilon_{yy} + 2G(3K - 2G)\varepsilon_{xx} - 6\alpha KG\tilde{T}}{4G + 3K} \end{cases} \quad (2.6)$$

Перейдем от деформаций к перемещениям:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 4G \frac{3K + G}{3K + 4G} \frac{\partial u_x}{\partial x} + 2G \frac{3K - 2G}{3K + 4G} \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{6\alpha KG \tilde{T}}{4G + 3K} \\ \sigma_{yy} = 4G \frac{3K + G}{3K + 4G} \frac{\partial u_y}{\partial y} + 2G \frac{3K - 2G}{3K + 4G} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{6\alpha KG \tilde{T}}{4G + 3K} \\ \sigma_{xy} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (2.7)$$

Уравнение динамики (при отсутствии объемных сил):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \rho \underline{\underline{\ddot{u}}} \quad (2.8)$$

В скалярном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \ddot{u}_x \\ \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = \rho \ddot{u}_y \end{cases} \quad (2.9)$$

После подстановки выражений для напряжений (2.7):

$$\begin{cases} 4G \frac{3K + G}{3K + 4G} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{9KG}{3K + 4G} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{6\alpha KG}{4G + 3K} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ 4G \frac{3K + G}{3K + 4G} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{9KG}{3K + 4G} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} - \frac{6\alpha KG}{4G + 3K} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + G \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.10)$$

В векторном виде это уравнение записывается так:

$$\frac{9KG}{3K + 4G} \tilde{\nabla} \tilde{\nabla} \cdot \underline{\underline{u}} + G \tilde{\Delta} \underline{\underline{u}} - \frac{6\alpha KG}{3K + 4G} \tilde{\nabla} \tilde{T} = \rho \underline{\underline{\ddot{u}}},$$

где

$$\tilde{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{\underline{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{\underline{j}}, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Так как тензор напряжений $\underline{\underline{\sigma}}$ является плоским, в уравнении динамики отсутствуют производные по координате z . Эта система уравнений в координатах x, y допускает любую зависимость функций $u_x(x, y, z, t)$ и $u_y(x, y, z, t)$ от координаты z . Рассмотрим уравнения, представляющие кинематические условия на

возможность плоского напряженного состояния (равенство нулю касательных напряжений вдоль оси z):

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0$$

После дифференцирования по z :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Так как, как было установлено ранее, деформации вдоль оси z ε_{zz} могут быть определены через компоненты u_x и u_y , лежащие в плоскости, эта система уравнений позволяет определить зависимость u_x и u_y от координаты z . Зависимость u_z от z задается соотношением:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Поле температур характеризует связанное уравнение теплопроводности (Максвелла - Каттанео):

$$\lambda \Delta \tilde{T} - \rho c_v \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t^2} \right) - \alpha K T_0 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \right) = \rho \left(q + \tau \frac{\partial q}{\partial t} \right), \quad (2.11)$$

где $\varepsilon = tr \underline{\underline{\varepsilon}}$ – объемная деформация. Подставив полученные ранее выражения (2.3), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{3K - 2G}{3K + 4G} \left(3 \frac{\partial u_x}{\partial x} + 3 \frac{\partial u_y}{\partial y} - 2\alpha \tilde{T} \right) + \frac{1}{3} \alpha \tilde{T} \\ \lambda \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \right) - \left(\rho c_v + \frac{3\alpha^2 K^2 T_0}{3K + 4G} \right) \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t^2} \right) - \\ - \frac{6\alpha K T_0 G}{3K + 4G} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial t} + \tau \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2} + \tau \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial t^2} \right) = \rho (q + \tau \dot{q}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Совместное решение скалярных уравнений (2.12) и (2.10) в пространстве позволяет определить 3 неизвестных функции $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $T(x, y, z, t)$. После чего могут быть найдены перемещения вдоль нормали к плоскости пластины $u_z = u_z(x, y, z, t)$.

2.2. Осесимметричная деформация круглой пластины

Рассмотрим тонкую пластину, имеющую сторону l и толщину h , малую в сравнении с радиусом:

$$l \ll R$$

Пластина подвергается лазерному воздействию, падающему перпендикулярно плоскости пластины. Считаем, что интенсивность излучения J описывается распределением Гаусса:

$$J(r) = J_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right), \quad (2.13)$$

где r_g – условный радиус Гауссова пучка. Распределением температуры вдоль нормальной к плоскости пластины оси Z (неравномерностью поглощения) пренебрегаем ввиду малой толщины пластины.

Зависимость интенсивности лазерного воздействия по времени считаем функцией вида:

$$J(r, t) = \begin{cases} J_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right), & 0 \leq t \leq \delta_0 \\ 0, & t > \delta_0 \end{cases}$$

Импульсное воздействие моделируем с помощью дельта-функции Дирака.

$$J(r, t) = E_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right) \delta(t - 0), \quad E_0 = J_0 \delta_0, \quad (2.14)$$

где δ_0 – длительность кратковременного лазерного воздействия. Обращаем внимание, что размерность дельта-функции Дирака обратна размерности её аргумента, т.е. в данном случае, c^{-1} . Благодаря фильтрующему свойству дельта-функции значение энергии, поглощенной за все время излучения, остается в соответствии с экспериментальными данными:

$$E(r) = \int_0^{\infty} J(r, t) dt = \int_0^{\infty} E_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right) \delta(t - 0) dt = E_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right)$$

Запишем баланс энергии на малом участке dr :

$$J(r, t) - \rho q(r, t) dr - J(r + dr, t) = 0$$

Представим $J(r + dr, t)$ через разложение в ряд Тейлора, ограничившись линейным слагаемым:

$$J(r + dr, t) = J(r, t) + \frac{\partial}{\partial r} J(r, t) dr + O(dr^2) = E_0 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_g^2}\right) \left(1 - \frac{4r}{r_g^2} dr - \dots\right) \delta(t - 0)$$

Тогда для баланса энергии получим:

$$E_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{r_g^2}\right) \delta(t - 0) - \rho q(r, t) dr - E_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{r_g^2}\right) \left(1 - \frac{4r}{r_g^2} dr\right) \delta(t - 0) = 0$$

Откуда находим $q(r, t)$:

$$q(r, t) = \frac{4r}{r_g^2} \frac{E_0}{\rho} \exp\left(-2\frac{r^2}{r_g^2}\right) \delta(t - 0)$$

Для решения системы методом конечных разностей на прямоугольной сетке, перейдем к декартовым координатам:

$$q(x, y, t) = \frac{4\sqrt{x^2 + y^2}}{r_g^2} \frac{E_0}{\rho} \exp\left(-2\frac{x^2 + y^2}{r_g^2}\right) \delta(t - 0)$$

ГЛАВА 3 . ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Итоговая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4G \frac{3K + G}{3K + 4G} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{9KG}{3K + 4G} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{6\alpha KG}{4G + 3K} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ 4G \frac{3K + G}{3K + 4G} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{9KG}{3K + 4G} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} - \frac{6\alpha KG}{4G + 3K} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + G \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \lambda \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} \right) - \left(\rho c_v + \frac{3\alpha^2 K^2 T_0}{3K + 4G} \right) \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial t^2} \right) - \\ - \frac{6\alpha K T_0 G}{3K + 4G} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial t} + \tau \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2} + \tau \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial t^2} \right) = \rho(q + \tau \dot{q}) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Введем безразмерные величины:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = k_1 u_x, \psi = k_1 u_y, a = k_1 x, b = k_1 y \\ \Theta = k_2 t \\ \Omega = k_3 \tilde{T} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

где

$$k_1 = \frac{c_p}{\lambda} \sqrt{\rho G}, k_2 = \frac{c_p}{\lambda} G, k_3 = \alpha, d = k_2 \tau$$

В новых величинах система примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial a^2} + \frac{9}{4} A_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial b} - \frac{2}{3} A_2 \frac{\partial \Omega}{\partial a} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial b^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \Theta^2} \\ A_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial b^2} + \frac{9}{4} A_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial a \partial b} - \frac{2}{3} A_2 \frac{\partial \Omega}{\partial b} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial a^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} - A_3 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \Theta} + A_5 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \Theta^2} \right) - \\ - 6A_4 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial a \partial \Theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial b \partial \Theta} + A_5 \frac{\partial^3 \phi}{\partial a \partial \Theta^2} + A_5 \frac{\partial^3 \psi}{\partial b \partial \Theta^2} \right) = q^* + A_5 \frac{\partial q^*}{\partial \Theta} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

где безразмерные константы A_1, A_2, \dots, A_5 равны

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{3K + G}{3K + 4G}, A_2 = \frac{K}{3K + 4G}, \\ A_3 &= \frac{3K + 4G \frac{c_v}{c_p}}{3K + 4G}, A_4 = \frac{c_p - c_v}{c_p} \frac{G}{3K + G}, A_5 = \frac{c_p \tau}{\lambda} G \end{aligned} \quad (3.4)$$

Далее необходимо конкретизировать задание источника q .

Падение лазерного луча перпендикулярно к плоскости пластины

$$q(x, y, t) = \frac{4\sqrt{x^2 + y^2} E_0}{r_g^2} \frac{E_0}{\rho} \exp\left(-2\frac{x^2 + y^2}{r_g^2}\right) \delta(t - 0)$$

Этот случай даст после обезразмеривая следующее выражение для системы (3.3):

$$q^* = 4 \frac{\alpha \lambda}{c_p^2 G} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} E_0}{k_1 r_g^2} \frac{E_0}{\rho} \exp\left(-2\frac{a^2 + b^2}{k_1^2 r_g^2}\right) \frac{1}{k_2} \delta\left(\frac{\Theta}{k_2}\right)$$

Будем решать явной схемой метода конечных разностей. Введем равномерную прямоугольную сетку по пространству:

$$a = ih, b = jh, i, j \in \{0, 1, \dots\}$$

По времени:

$$\Theta = k\Delta t$$

Запишем производные через конечные разности (используем центральные разности):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a} &= \frac{F_{i+1,j}^k - F_{i-1,j}^k}{2h}, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{F_{i,j+1}^k - F_{i,j-1}^k}{2h} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} &= \frac{F_{i-1,j}^k - 2F_{i,j}^k + F_{i+1,j}^k}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = \frac{F_{i,j-1}^k - 2F_{i,j}^k + F_{i,j+1}^k}{h^2} \\ \frac{\partial F}{\partial \Theta} &= \frac{F_{i,j}^{k+1} - F_{i,j}^{k-1}}{2\Delta t}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \Theta^2} = \frac{F_{i,j}^{k-1} - 2F_{i,j}^k + F_{i,j}^{k+1}}{\Delta t^2} \end{aligned}$$

Представим (безразмерную) дельта-функцию Дирака и ее производную в дискретном виде.

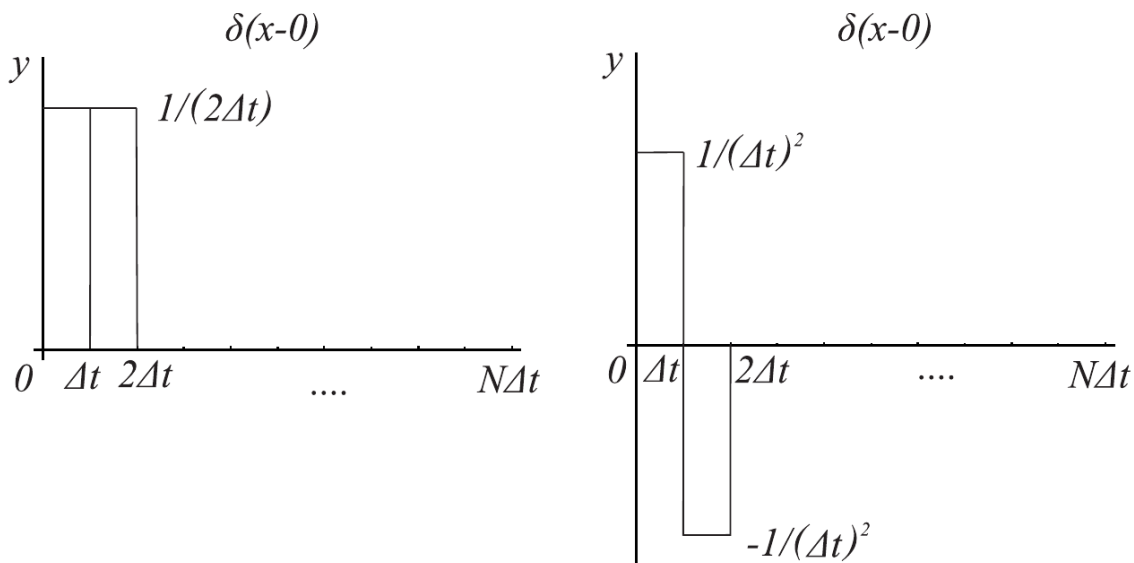


Рис. 3.1. Дискретное представление дельта-функции Дирака

Таким образом, итоговая расчетная схема CSCT (Central Space, Central Time) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\Omega_{i-1,j}^k - 2\Omega_{i,j}^k + \Omega_{i+1,j}^k}{h^2} + \frac{\Omega_{i,j-1}^k - 2\Omega_{i,j}^k + \Omega_{i,j+1}^k}{h^2} - \frac{\Omega_{i,j}^{k+1} - \Omega_{i,j}^{k-1}}{2\Delta t} \\
 + A_4 & \left(\frac{\phi_{i-1,j}^{k-1} + \phi_{i+1,j}^{k+1} - \phi_{i+1,j}^{k-1} - \phi_{i-1,j}^{k+1}}{4h\Delta t} + \frac{\psi_{i,j-1}^{k-1} + \psi_{i,j+1}^{k+1} - \psi_{i,j+1}^{k-1} - \psi_{i,j-1}^{k+1}}{4h\Delta t} \right) \\
 & + A_5 \left(\frac{\phi_{i+1,j}^{k+1} - \phi_{i-1,j}^{k+1} - 2\phi_{i+1,j}^k + 2\phi_{i-1,j}^k + \phi_{i+1,j}^{k-1} - \phi_{i-1,j}^{k-1}}{2h\Delta t^2} \right. \\
 & \left. + \frac{\psi_{i,j+1}^{k+1} - \psi_{i,j-1}^{k+1} - 2\psi_{i,j+1}^k + 2\psi_{i,j-1}^k + \psi_{i,j+1}^{k-1} - \psi_{i,j-1}^{k-1}}{2h\Delta t^2} \right) = q^*
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\phi_{i-1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i+1,j}^k}{h^2} + A_1 \frac{\psi_{i+1,j+1}^k + \psi_{i-1,j-1}^k - \psi_{i-1,j+1}^k - \psi_{i+1,j-1}^k}{4h^2} \\
& + A_2 \frac{\phi_{i,j-1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j+1}^k}{h^2} - A_3 \frac{\Omega_{i+1,j}^k - \Omega_{i-1,j}^k}{2h} \\
& - \frac{\phi_{i,j}^{k-1} - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j}^{k+1}}{\Delta t^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\psi_{i-1,j}^k - 2\psi_{i,j}^k + \psi_{i+1,j}^k}{h^2} + A_1 \frac{\phi_{i+1,j+1}^k + \phi_{i-1,j-1}^k - \phi_{i-1,j+1}^k - \phi_{i+1,j-1}^k}{4h^2} \\
& + A_2 \frac{\psi_{i,j-1}^k - 2\psi_{i,j}^k + \psi_{i,j+1}^k}{h^2} - A_3 \frac{\Omega_{i,j+1}^k - \Omega_{i,j-1}^k}{2h} \\
& - \frac{\psi_{i,j}^{k-1} - 2\psi_{i,j}^k + \psi_{i,j}^{k+1}}{\Delta t^2} = 0
\end{aligned}$$

В качестве условия устойчивости метода конечных разностей применительно к гиперболическому уравнению выступает критерий Куранта [3]:

$$\Delta t \ll \frac{h}{c_{ac}}, \tag{3.6}$$

где c_{ac} – скорость звука в среде. В постановке плоского напряжения скорость звука в среде отличается от скорости, присущей пространственной задаче или постановке плоской деформации. Скорость звука имеет вид [7]:

$$c_{ac} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} \tag{3.7}$$

В классической теории термоупругости, основанной на законе Фурье, уравнение (3.1) превращается в уравнение параболического типа, для которого схема с центральными разностями (схема Ричардсона) является абсолютно неустойчивой, т.е. расходится при любых значениях временного шага [2]. Для расчетов

в данной работе использовалась схема с правыми разностными производными, которая имеет 1-й порядок аппроксимации по временному шагу. Условием устойчивости в этом случае выступает:

$$\Delta t \ll \frac{h^2}{a} \quad (3.8)$$

Для расчетов использовалась равномерная прямоугольная разностная сетка, имеющая 1000 шагов по пространству и 5000 шагов по времени.

ГЛАВА 4 . РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. Импульсное воздействие в центре

Для исследования зависимости процесса распространения тепла в модели Лорда-Шульмана от значения параметра времени релаксации τ была решена задача об импульсном воздействии лазерного луча в центр медной пластины, в точку, удаленную от границ пластины, чтобы исключить влияние краевых эффектов.

Моделируемое тело представляет собой квадрат со стороной $l = 2,0$ мкм.

Используемые термомеханические параметры: модуль Юнга $E = 127$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,33$, плотность $\rho = 8960$ кг/м³, коэффициент теплопроводности $\lambda = 401$ Вт/(м*К), объемный коэффициент теплового расширения $\alpha = 49,5 \cdot 10^{-6}$ 1/К, теплоемкость при постоянном давлении $c_p = 390$ Дж/К.

Энергия облучения $E_0 = 0,15$ Дж/м².

Для исследования зависимости от времени релаксации расчеты производились при значениях $\tau = 0,01$ нс, $\tau = 0,1$ нс, $\tau = 1,0$ нс.

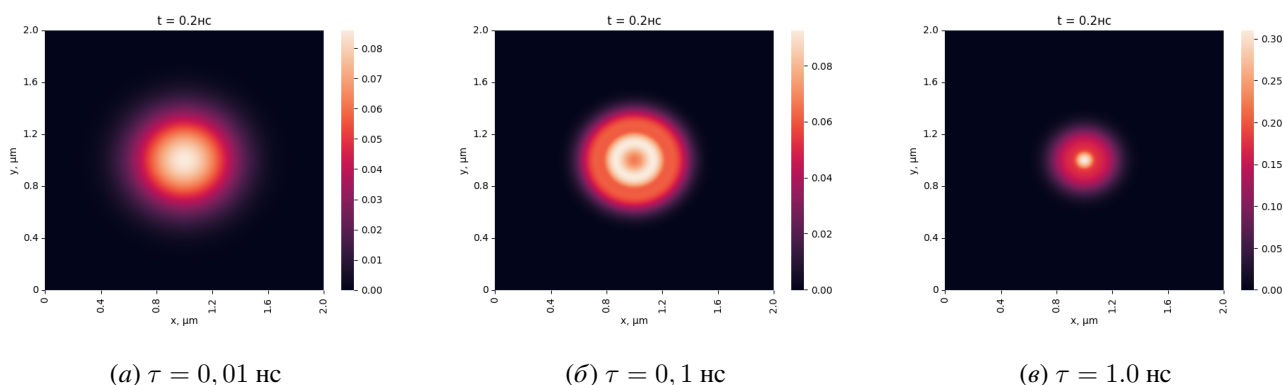
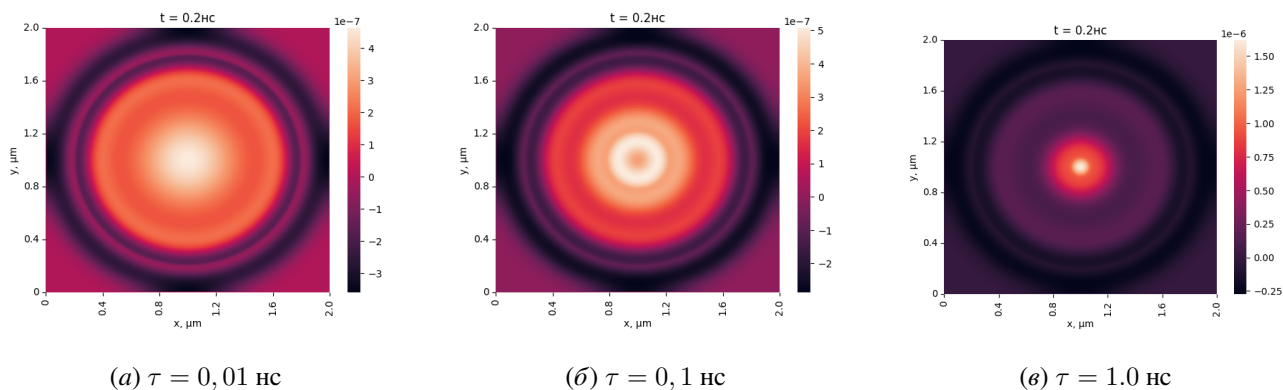
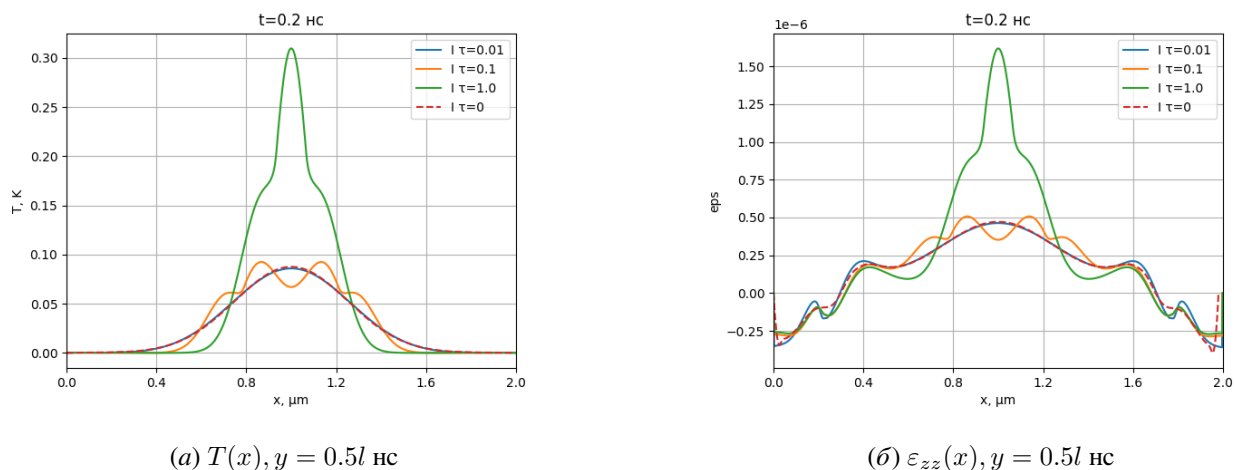
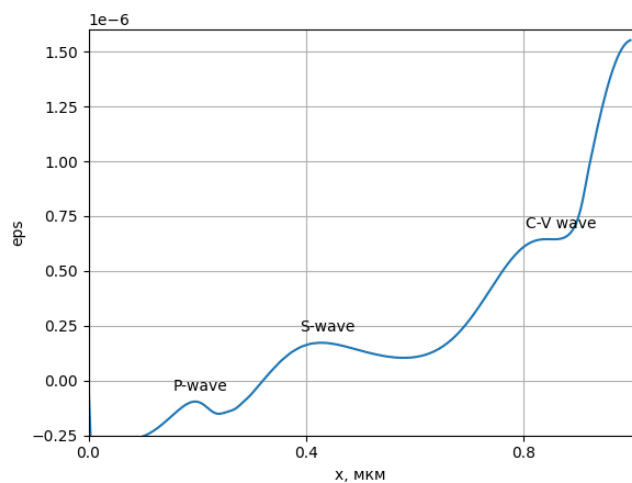


Рис. 4.1. Поля температур, $t = 0.2$ нс

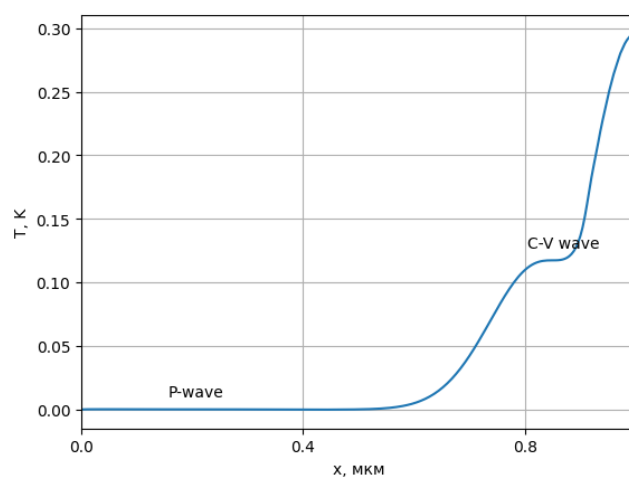
Рис. 4.2. Поля деформаций, $t = 0.2$ нс

С ростом параметра τ максимумы напряжений и деформаций растут, однако температуры и деформации в области вокруг квазиакустического фронта меняются незначительно (4.3).

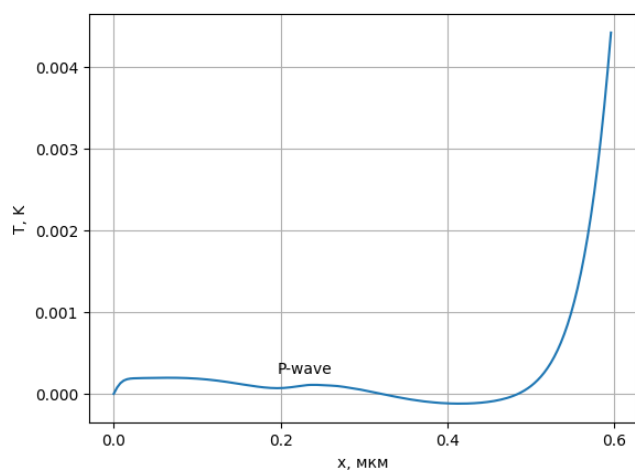
Рис. 4.3. Распределение температур и деформаций при $t = 0.2$ нс



(a) Распределение деформаций



(б) Распределение температур



(в) Распределение температур (квазиакустический фронт)

Рис. 4.4. Термоупругие волны в пластине, $t = 0.2$ нс, $\tau = 0.5$ нс

τ , нс	V_P , м/с	V_S , м/с	V_{C-V} , м/с
0,1	4019	2259	1420
0,5	4019	2259	780
1,0	4019	2259	460

Таблица 4.1. Скорости волн при значениях времени релаксации τ

В таблице 4.1 приведены скорости волновых фронтов, определенные из численного решения в момент времени $t = 0.2$ нс. Как видно из таблицы, скорости акустических составляющих практически не изменяются при варьировании времени релаксации τ .

Как видно из (4.4), сдвиговая компонента квазиакустического фронта (обозначенная на рисунке как *S-wave*), не имеет эквивалента на графике распределения температур. Это подтверждает сделанный в главе 1 вывод, согласно которому только объемные деформации вносят вклад в распределение температур.

Скорость квазиакустического фронта близка к скорости звука в среде. Для меди скорость, вычисленная в модели плоского напряжения, составляет:

$$V_p^a = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} = 3988 \text{ м/с}$$

Отклонение, вызванное влиянием температурных составляющих, составило:

$$\epsilon = \frac{V_p^a - V_p}{V_p^a} = 0.77\%,$$

Скорости распространения квазитеплого фронта растут с уменьшением параметра τ , что согласуется с теоретическим выводом в главе 1.

4.2. Жесткая заделка, постоянная температура на границах

Граничные условия имеют вид:

$$T|_{\gamma} = 0, \underline{u}|_{\gamma} = 0,$$

где γ – контур расчетной области.

Были построены поля температур, деформаций и напряжений, соответствующие моменту времени $t = 2\tau = 0.2$ нс.

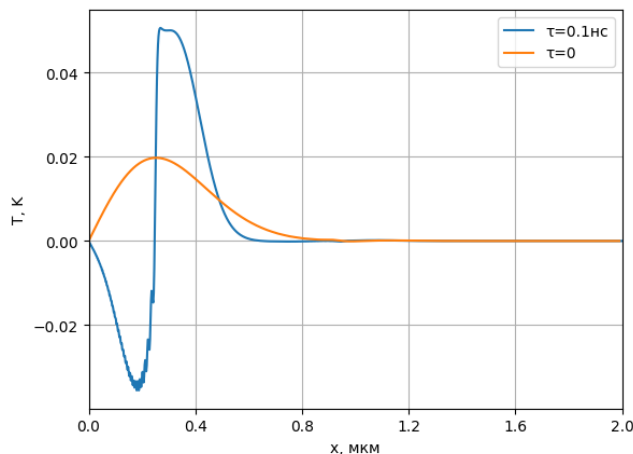


Рис. 4.5. Распределение температуры вдоль осевой линии при $t = 2\tau = 0.2$ нс

Вблизи квазитеплового фронта в решении для гиперболической теории наблюдаются осцилляции температуры. Аналитическое решение, приведенное в работе [10], не содержит осцилляций. Это позволяет сделать вывод, что осцилляции представляют собой артефакт явной схемы МКР, возникающий при интегрировании уравнений с условиями I рода.

В случае гиперболической термоупругости, в отличие от классической теории, наблюдается зона охлаждения у стенки, расположенная слева от квазитеплового фронта. Это связано с волновой природой распространения тепла. Термоупругая волна, возникающая вблизи левой стенки, для которой установлены граничные условия первого рода, меняет знак после отражения [10].

Как можно видеть из построенных полей температур, при значении $\tau = 0,01$ нс количественные отличия от случая классической термоупругости становятся крайне малыми в виду малости как квазиакустического (в силу малой величины коэффициента теплового расширения), так и квазитеплового (зависящего от величины τ) фронтов.

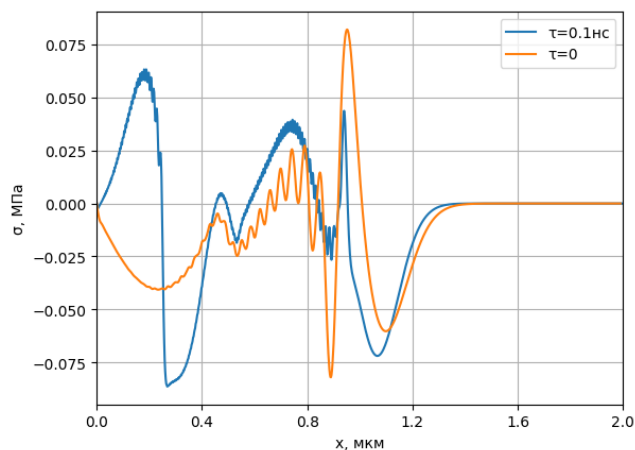
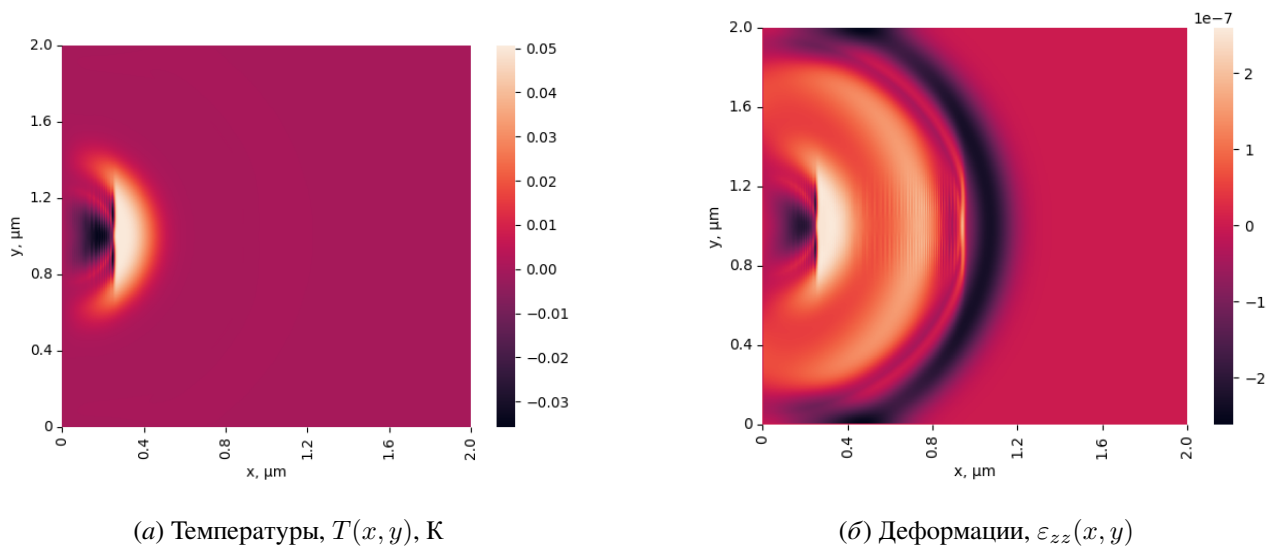


Рис. 4.6. Распределение напряжений σ_{xx} вдоль осевой линии при $t = 2\tau = 0.2$ нс

На квазитепловом фронте при условиях постоянной температуры на границе наблюдается скачок напряжений. Слева от фронта наблюдается зона сжатия, справа – зона растяжения, что находит свое отражение на графике поля деформаций (4.7, б).



(а) Температуры, $T(x, y)$, К

(б) Деформации, $\varepsilon_{zz}(x, y)$

Рис. 4.7. Поля температур и деформаций, $t = 2\tau = 0.2$ нс

τ , нс	t , нс	V_a , м/с	V_s , м/с	V_{cv} м/с	\tilde{T} , К	ε_{zz} , 10^{-6}
0	0,04				0,17423	0,64375
	0,08				0,11922	1,05388
	0,12				0,08748	0,85763
	0,16				0,06766	0,68142
	0,20				0,05421	0,56354
0,01	0,04				0,14601	1,84984
	0,08				0,06499	1,77142
	0,12				0,04238	1,68892
	0,16				0,03081	1,61757
	0,20	4040	2140	3270	0,02365	1,52858
0,1	0,04				0,22385	1,07238
	0,08				0,16627	1,19650
	0,12				0,10235	0,72003
	0,16				0,07605	0,47882
	0,20	4060	2200	980	0,06131	0,34145
1,0	0,04				0,25733	1,01383
	0,08				0,24358	1,42186
	0,12				0,22336	1,16915
	0,16				0,20527	0,98418
	0,20	3960	2200	340	0,19000	0,90769

Таблица 4.2. Численное решение задачи с заделкой и постоянной температурой на границе

Как видно из данных таблицы (4.2), при уменьшении времени релаксации τ максимумы температур, вычисленные по гиперболической теории, уменьшаются

ся, приближаясь к классическому случаю. Максимумы температур, вычисленные по гиперболической теории, превышают таковые для случая классической термоупругости. С течением времени два максимума сближаются.

4.3. Жесткая заделка, теплоизолированные стенки

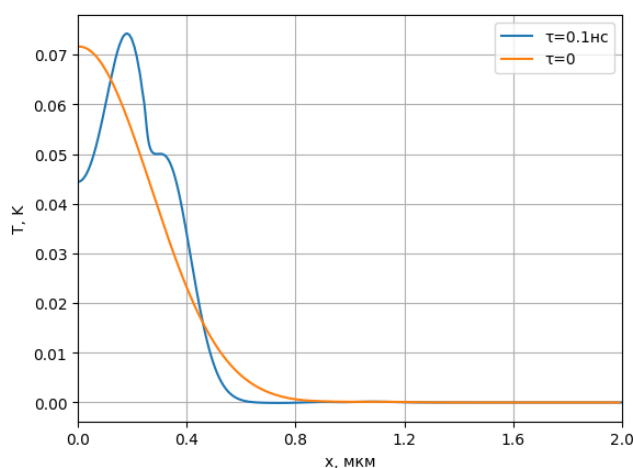


Рис. 4.8. Распределение температуры вдоль осевой линии при $t = 2\tau = 0.2$ нс

При рассмотрении граничных условий II рода по температуре зоны охлаждения вблизи левой границы, рассмотренной в предыдущем варианте, не наблюдается. Максимум температуры, наблюдаемый на пике квазитеплого фронта, превосходит максимум, рассчитанный для условий I рода, более чем в 2 раза как для гиперболической, так и для классической теории.

Квазitemпературный фронт создает область теплового расширения (внутреннее полукольцо), наблюдаемую на рисунке (4.10 (a)).

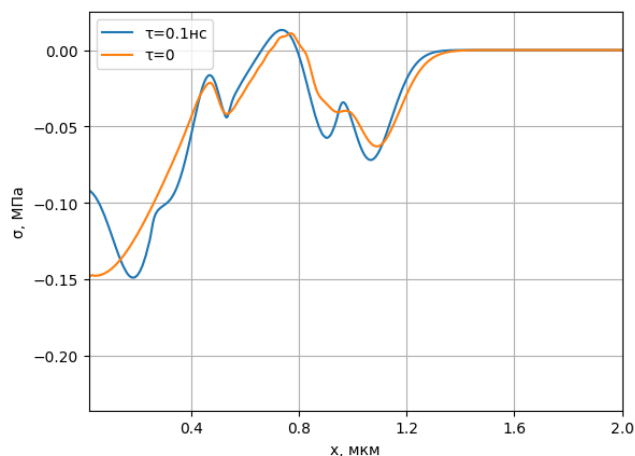


Рис. 4.9. Распределение напряжений σ_{xx} вдоль осевой линии при $t = 2\tau = 0.2$ нс

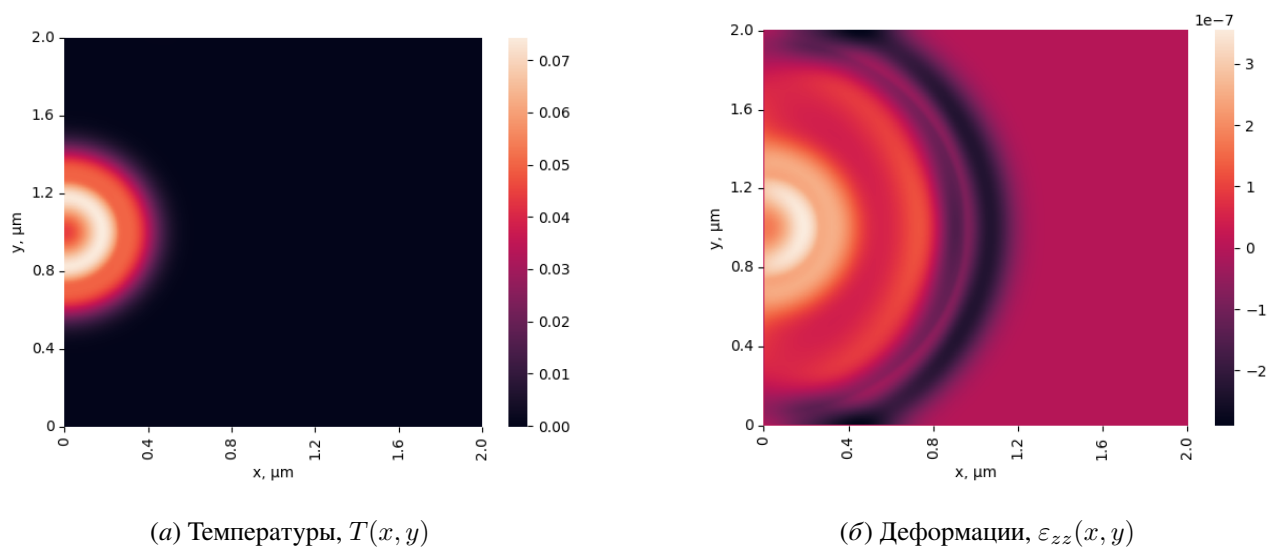


Рис. 4.10. Поля температур и деформаций, $t = 2\tau = 0.2$ нс

При граничных условиях с теплоизолированными стенками на квазитепловом фронте присутствует излом кривой на графике напряжений (4.9). В окрестности фронта наблюдается зона растяжения.

τ , нс	t , нс	V_a , м/с	V_s , м/с	V_{cv} м/с	\tilde{T} , К	ε_{zz} , 10^{-6}
0,00	0,04				0,21827	0,38855
	0,08				0,19494	0,79216
	0,12				0,16924	1,05484
	0,16				0,14829	0,85945
	0,20				0,13125	0,67692
0,01	0,04	4070	2240		0,22390	0,96244
	0,08				0,15465	0,88119
	0,12				0,12123	0,56715
	0,16				0,10021	0,44075
	0,20	4040	2340	3300	0,08527	0,36433
0,10	0,04				0,23485	0,78930
	0,08				0,28874	1,58018
	0,12				0,21519	1,01358
	0,16				0,12537	0,58906
	0,20	3960	2200	940	0,09160	0,43767
1,00	0,04				0,25739	0,92723
	0,08				0,24362	1,36228
	0,12				0,24018	1,10738
	0,16				0,28533	1,19451
	0,20	3960	2200	300	0,30981	1,27216

Таблица 4.3. Численное решение задачи с жесткой заделкой и теплоизолированными стенками

4.4. Свободные границы, постоянная температура на стенках

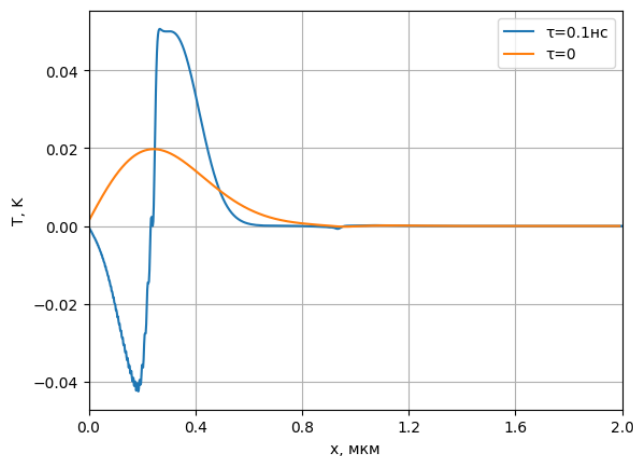


Рис. 4.11. Распределение температуры вдоль осевой линии при $t = 2\tau = 0.2$ нс

Распределение температур, полученное для условий II рода по напряжению на стенках, не имеет качественных отличий по сравнению с распределением, полученным для условий I рода. Это связано с малостью принятого в применяемой (связанной) постановке задачи термоупругости коэффициента теплового расширения.

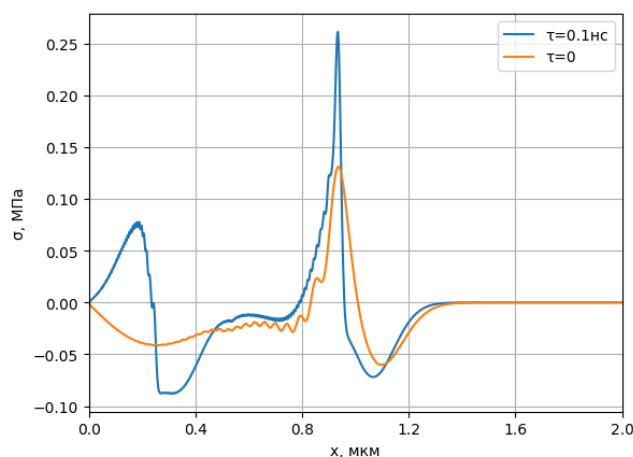


Рис. 4.12. Распределение напряжений σ_{xx} вдоль осевой линии при $t = 2\tau = 0.2$ нс

При задании граничных условий с свободными границами на квазиаку-

стическом фронте возникает скачок напряжений. Слева от скачка наблюдается зона растяжения, справа – зона сжатия. Второй скачок напряжений, возникающий из-за граничных условий первого рода по температуре, наблюдается на квазитепловом фронте.

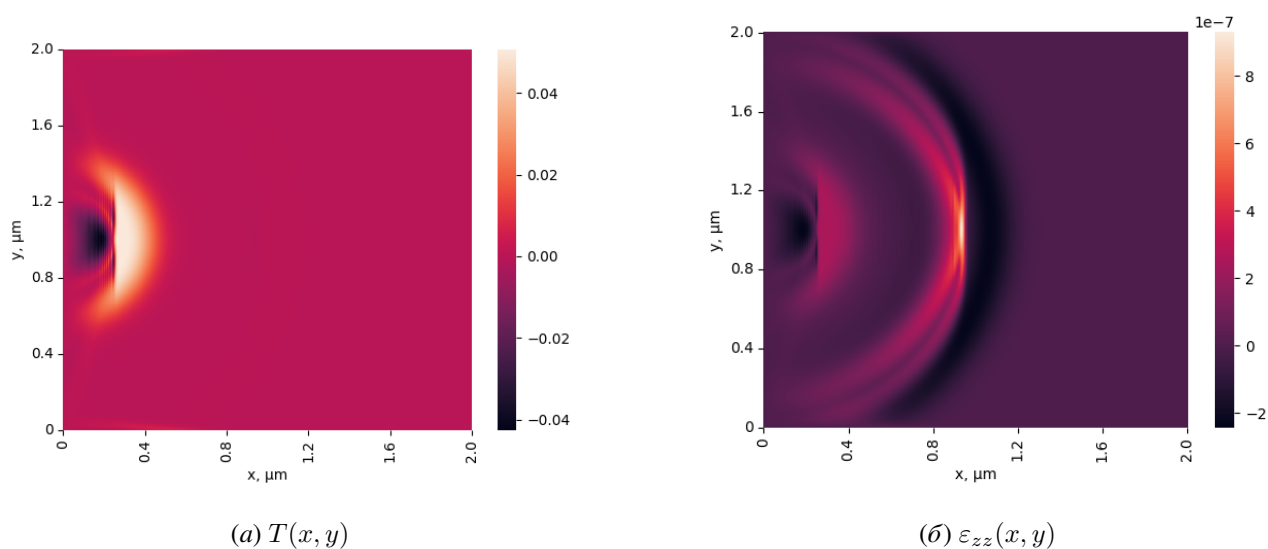


Рис. 4.13. Поля температур и деформаций, $t = 2\tau = 0.2$ нс

Как видно из таблицы (4.4), при свободных граничных условиях на краях пластинки максимальные значения поперечных (направленных перпендикулярно плоскости пластины) деформаций уменьшаются в сравнении с классической теорией.

τ , нс	t , нс	V_a , м/с	V_s , м/с	V_{cv} м/с	\tilde{T} , К	ε_{zz} , 10^{-6}
0,00	0,04				0,14518	2,28278
	0,08				0,06552	2,30546
	0,12				0,04257	2,25108
	0,16				0,03088	2,17152
	0,20	3080	2100		0,02369	2,05320
0,01	0,04				0,14518	2,28278
	0,08				0,06552	2,30546
	0,12				0,04257	2,25108
	0,16				0,03088	2,17152
	0,20	4040	2140	3300	0,02369	2,05320
0,10	0,04				0,22309	2,03330
	0,08				0,16699	1,19675
	0,12				0,10276	0,96625
	0,16				0,07612	0,95811
	0,20	4060	2200	960	0,06133	0,94877
1,00	0,04				0,25700	1,48789
	0,08				0,29288	1,95234
	0,12				0,33071	1,90346
	0,16				0,32884	1,84834
	0,20	3980	2250	320	0,31130	1,71055

Таблица 4.4. Численное решение задачи со свободными краями и постоянной температурой на границах

4.5. Теплоизолированные стенки, свободные границы

Граничные условия имеют вид:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\gamma} = 0, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} \Big|_{\gamma} = 0,$$

где γ – контур расчетной области, $\underline{\underline{n}}$ – нормаль.

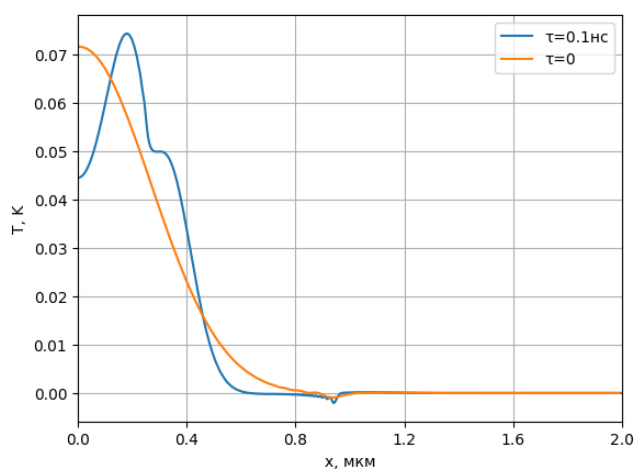


Рис. 4.14. Распределение температуры вдоль осевой линии при $t = 2\tau = 0.2$ нс

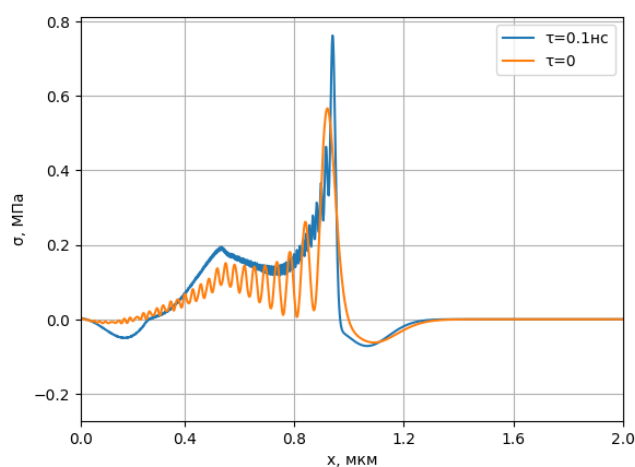


Рис. 4.15. Распределение напряжений σ_{xx} вдоль осевой линии при $t = 2\tau = 0.2$ нс

Как видно из рисунка (4.15), напряжения σ_{xx} обращаются в нуль в начале координат, что говорит о выполнении поставленных граничных условий.

На квазитепловом фронте наблюдается излом кривой напряжений, на квазиакустическом – скачок напряжений. Максимум напряжений на квазиакустическом фронте превосходит полученный для случая граничных условий с закрепленными границами.

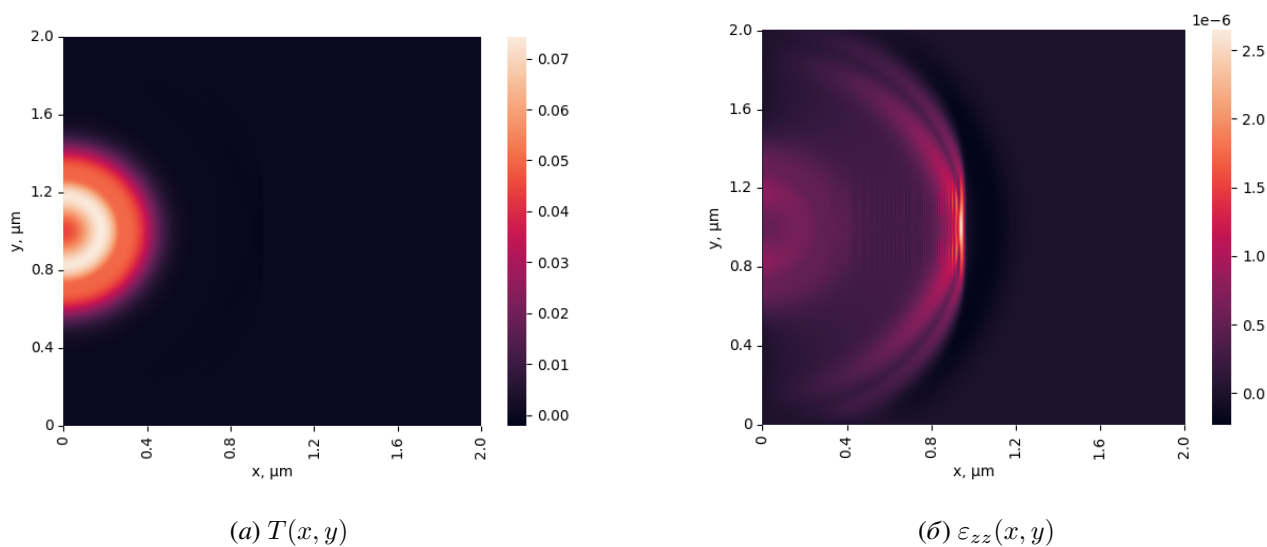


Рис. 4.16. Поля температур и деформаций, $t = 2\tau = 0.2$ нс

В случае граничных условий с теплоизолированными стенками не наблюдается зоны охлаждения вблизи левой границы расчетной области.

τ , нс	t , нс	V_a , м/с	V_s , м/с	V_{cv} м/с	\tilde{T} , К	ε_{zz} , 10^{-6}
0,00	0,04				0,21697	3,01441
	0,08				0,19413	3,58781
	0,12				0,16887	3,48052
	0,16				0,14801	3,21226
	0,20	4040	2250		0,13100	2,96250
0,01	0,04				0,22287	3,60726
	0,08				0,15396	2,76286
	0,12				0,12069	2,54006
	0,16				0,09967	2,51280
	0,20	4040	2140	3290	0,08480	2,42733
0,10	0,04				0,23528	1,11747
	0,08				0,28797	3,24958
	0,12				0,21499	2,66199
	0,16				0,12531	2,73590
	0,20	4030	2300	960	0,09156	2,71599
1,00	0,04				0,25737	1,02831
	0,08				0,30268	2,09040
	0,12				0,34543	1,90420
	0,16				0,34793	1,81972
	0,20	4000	2240	330	0,33409	1,70600

Таблица 4.5. Численное решение задачи с теплоизолированными стенками и свободными краями

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы была создана программа на языке C++ для численного моделирования задачи гиперболической термоупругости Лорда-Шульмана в двумерной постановке с граничными условиями I и II рода. Рассмотрены варианты импульсного воздействия на границе и в центре расчетной области.

Получены распределения температур, напряжений и деформаций.

Установлено, что наибольшее влияние гиперболических эффектов на распространение тепла наблюдается для случая пластины с закрепленными стенками, на которых поддерживается постоянная температура. Наибольшие различия возникают в окрестности квазitemпературного фронта. С уменьшением величины времени релаксации τ вносимые волновой природой распространения тепла эффекты сходят на нет.

Полученные результаты позволяют исследовать процесс распространения тепла в тонкой пластине на малых интервалах времени и малых масштабах по пространству.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Теория упругости М.: Наука, 1970. - 940 с
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. - 553 с
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. - 432 с
4. Hetnarski R.B., Ignaczak J. The Mathematical Theory of Elasticity, CRC Press, 2011
5. Ignaczak J., Thermoelasticity with Finite Wave Speeds, Oxford University Press, 2009
6. Jou D, Extended Irreversible Thermodynamics, Springer, Vienna, 2010
7. Ravi-Chandar K. Dynamic Fracture, Elsevier Science, 2004
8. Tzou D.Y. Macro- to Microscale Heat Transfer, Second Edition, Wiley, 2015
9. Бабенков М.Б. Анализ дисперсионных соотношений связанной задачи термоупругости с учетом релаксации теплового потока // Прикладная механика и техническая физика, 2011. Т. 52, №6, с. 112-121
10. Витохин Е.Ю. Исследование колебательных и волновых процессов в термоупругой среде с учетом времени релаксации теплового потока // дис. канд. ф-м. наук, Санкт-Петербург, 2017.– 114 с.
11. Вовненко Н.В., Зимин Б.А., Судьенков Ю.В. Неравновесность процесса движения облучаемой поверхности металлов при воздействии лазерных импульсов субмикросекундной длительности // Журнал технической физики, 2010, том 80, вып. 7, с. 41-45
12. Cattaneo C., Atti Seminario Univ. Modena 3, 1948. P. 33.
13. Čiegis R. Numerical Solution of Hyperbolic Heat Conduction Equation // Mathematical Modelling and Analysis, Vol. 14 Number 1, 2009, p. 11–24

14. Lord H.W., Shulman Y. A Generalized Dynamical Theory Of Thermoelasticity, J. Mech. Phys. Solids, 1967, Vol. 15, p. 299-309
15. Qiu T.Q., Tien C.L. Heat Transfer Mechanisms During Short-Pulse Laser Heating of Metals // J. Heat Transfer. Nov 1993, 115(4): p. 835-841