УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ВОЛНОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Антонов И.Д.
научный руководитель: Порубов А.В.

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого
Кафедра теоретической механики

2017

О работе

Данная работа посвящена изучению и разработке современных методов управления локализованными нелинейными волнами в механических системах.

Основные направления работы:

- *Механика:* постановка задачи, в которой реализуется механизм управления с обратной связью
- *Математическое моделирование:* исследование работы алгоритма управления

Основные результаты:

- Написано и опубликовано две статьи в журналах IOPScience и Elsevier
- Доклад на конференции APM-2016 «Generation of desired nonlinear wave by feedback control»

Работа выполнялась в рамках проекта Российского Научного Фонда 14-29-00142.

Тема работы

Локализованные волны в механических структурах переносят энергию, при этом они могут:

- разрушать структуру материала при больших амплитудах волн
- являться переносчиками информации

Поэтому важно понимать механизм движения таких волн, а также знать, каким способом можно добиваться их локализации и поддерживать их распространение.

Один из путей достижения такой цели — *разработка методов управления* для нелинейных уравнений, описывающих их движение.

Исследуемые уравнения

В данной работе исследованы следующие нелинейные уравнения:

- Уравнение синус-Гордона (модель Ф-К):

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin(W) = 0$$

- Двойное уравнение синус-Гордона:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin(W) + q\ \sin(2W) = 0$$

- Дисперсионное уравнение синус-Гордона:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin(W) + b\ W_{xxxx} = 0$$

- Связанные уравнения (двухатомные кристаллы):

$$v_{tt} - c_L^2 v_{xx} = \frac{S}{\rho}(\cos u)_{xx}$$

$$u_{tt} - c_l^2 u_{xx} = \frac{1}{\mu}(Sv - P)\sin u$$

Уравнение синус-Гордона с управлением

Применение *метода скоростного градиента* — один из способов управления процессами, описываемыми нелинейными дифференциальными уравнениями. Применим его для уравнения синус-Гордона:

$$W_{tt} - W_{xx} + \sin(W) + w(x,t) = 0$$

$$w(x,t) = \alpha_1(W - W^*) + \alpha_2(W_t - W_t^*),$$

где W^* — целевая функция, α_1 и α_2 — параметры управления.

Существует ли механическая задача, описываемая уравнением данного вида?

Механическая задача

Рассмотрим нелинейный упругий изотропный слой (x, y), нижняя граница $y = -h$ которого контактирует с морозным грунтом (модель Керра), а на верхнюю границу $y = h$ действуют нормальные и касательные напряжения f_N и f_τ.

$$y = -h: \quad \begin{cases} \sigma_y = \alpha_1 w + \alpha_2 w_t, \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases},$$

где w — поперечная компонента вектора смещений.

$$y = h: \quad \begin{cases} \sigma_y = f_N, \\ \tau_{xy} = f_\tau \end{cases}.$$

Механическая задача

Для получения уравнений движения воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-h}^{h} dy \int_{-\infty}^{\infty} L\, dx + \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt = 0,$$

где $L = K - \Pi$ — объемная плотность Лагранжиана, A — элементарная работа внешних сил на границах слоя, $\Pi = \Pi_l + \Pi_{nl}$ — плотность потенциальной энергии, K — кинетической.

Объемная плотность кинетической энергии выражается через компоненты $u(x, y, t), w(x, y, t)$ вектора смещения:

$$K = \frac{\rho}{2}(u_t^2 + w_t^2).$$

Механическая задача

Π_l — есть выражение потенциальной энергии по модели Мурнагана, в котором учтены только линейные члены разложения по инвариантам I_1, I_2 тензора деформаций Коши-Грина:

$$\Pi_l = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_1^2 - 2\mu I_2^2$$

Пусть слой описывается моделью Френкеля-Конторовой, тогда нелинейная поправка потенциальной энергии:

$$\Pi_{nl} = F \sin^2\left(\frac{\sqrt{u^2 + w^2}}{h}\right).$$

Механическая задача

δA_1 и δA_2 — элементарные работы внешних сил на верхней $y = h$ и нижней $y = -h$ границах соответственно:

$$\delta A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_N \delta w \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_\tau \delta u \, dx$$

$$\delta A_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 w + \alpha_2 w_t) \delta w \, dx$$

Механическая задача

Выполнив процедуру варьирования и объединяя слагаемые при δw и δu, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - (\lambda + 2\mu)u_{xx} - \mu u_{yy} - (\lambda + \mu)w_{xy} + F\frac{u}{\sqrt{u^2+w^2}} \sin\frac{2}{h}\sqrt{u^2+w^2} = 0, \\ \rho w_{tt} - (\lambda + 2\mu)w_{yy} - \mu w_{xx} - (\lambda + \mu)u_{xy} + F\frac{w}{\sqrt{u^2+w^2}} \sin\frac{2}{h}\sqrt{u^2+w^2} = 0 \end{cases}$$

Выражения для напряжений σ_y, τ_{xy} на границах при $y = -h$, $y = h$:

$$\begin{cases} \sigma_y = (\lambda + 2\mu)w_y + \mu u_x, \\ \tau_{xy} = \mu(u_y + w_x) \end{cases}$$

Механическая задача

Основная идея дальнейших преобразований — асимптотически редуцировать двумерную задачу к обезразмеренному модельному одномерному уравнению синус-Гордона с управлением.

Для этого введем новые ограничения, будем рассматривать *длинные слабо-поперечные волны*: $\varepsilon = \frac{h}{L}$, L – масштаб для x, h – масштаб для y.

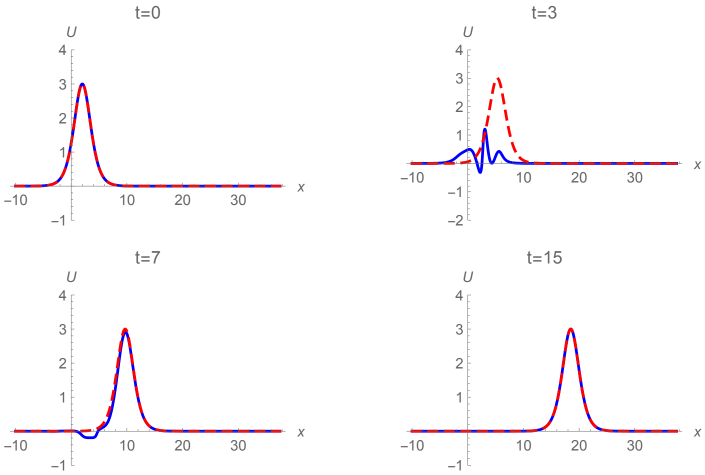
$$w = \bar{w}W, \quad x = \bar{x}L, \quad y = \bar{y}h, \quad u = \bar{u}\varepsilon W, \quad t = \bar{t}\cdot\frac{L\sqrt{\rho}}{\sqrt{\mu}}$$

Тогда в приближении ε^2 уравнение для W принимает вид уравнения синус-Гордона с управлением:

$$W_{\bar{t}\bar{t}} - W_{\bar{x}\bar{x}} + \sin(W) = f_N - (\alpha_1 W + \alpha_2 W_{\bar{t}}),$$

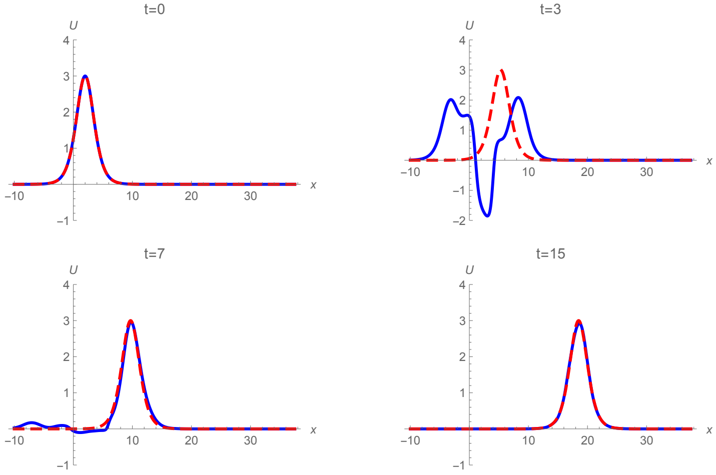
в случае, если принять $f_N = \alpha_1 W^* + \alpha_2 W^*_{\bar{t}}$.

Пример результата расчетов



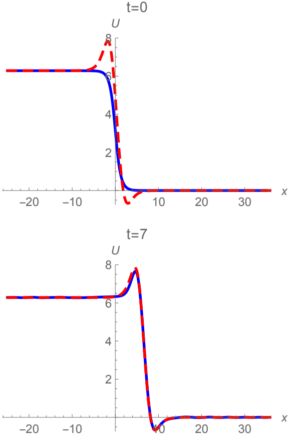
Генерация *солитона* для двойного уравнения синус-Гордона при $q = -2$

Пример результата расчетов



Генерация *солитона* для двойного уравнения синус-Гордона при $q = 2$

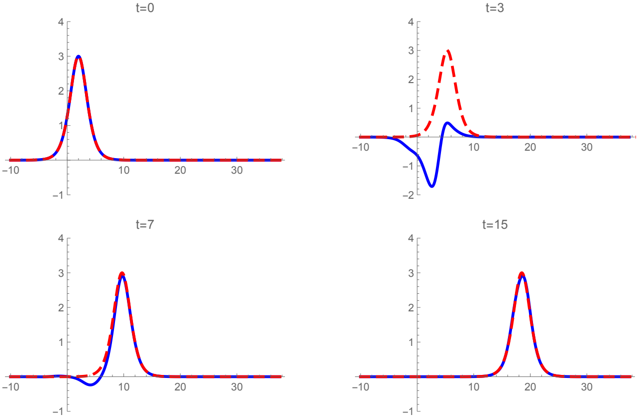
Пример результата расчетов



Генерация *кинка* для дисперсионного уравнения синус-Гордона при $b = 3$

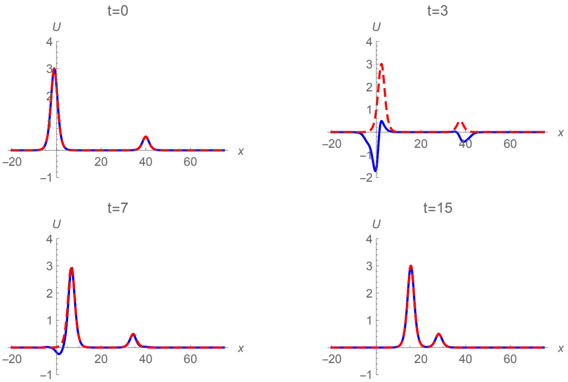
Пример результата расчетов

Out[18]=



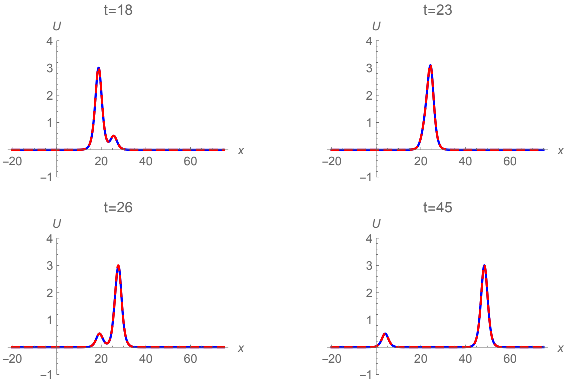
Генерация *солитона* для уравнения синус-Гордона

Пример результата расчетов



Целевая функция управления — двухсолитонное решение уравнения КдВ

Пример результата расчетов



Целевая функция управления — двухсолитонное решение уравнения КдВ

Связанные уравнения

$$v_{tt} - c_L^2 v_{xx} = \frac{S}{\rho}(\cos u)_{xx}$$

$$u_{tt} - c_l^2 u_{xx} = \frac{1}{\mu}(Sv - P)\sin u$$

Точное решение:

$$v = \frac{A}{Q\cosh(k(x - Vt - x_{11})) + 1}$$

$$u = \cos^{-1}\left(\frac{\rho v\left(V^2 - {c_L}^2\right)}{S} + 1\right),$$

$$Q = -\frac{-{c_0}^2 + {c_L}^2 - V^2}{{c_0}^2 + {c_L}^2 - V^2}, k = 2\sqrt{\frac{P}{{c_l}^2 - V^2}}, A = \frac{4S}{\rho\left({c_0}^2 + {c_L}^2 - V^2\right)}$$

Связанные уравнения

Допустим, что в начальный момент времени $t = 0 : v = v_{02}, u = u_0$, то есть:

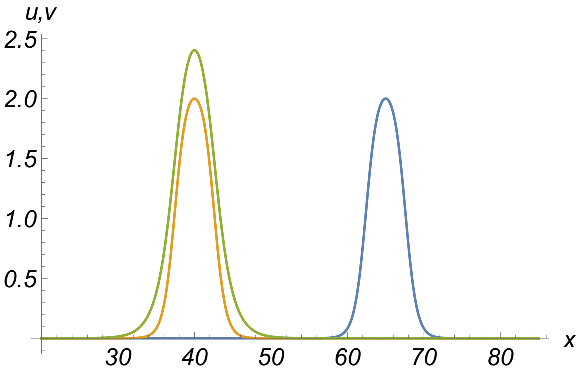
$$v_{01} = \frac{A}{Q\cosh(k(x - x_{11})) + 1}, v_{02} = \frac{A}{Q\cosh(k(x - x_{12})) + 1}$$

$$u_0 = \cos^{-1}\left(\frac{\rho v_{01}\left(V^2 - {c_L}^2\right)}{S} + 1\right)$$

Это в точности означает, что одна из связанных волн сдвинута относительно другой волны, и, соответственно их комбинация не является точным решением.

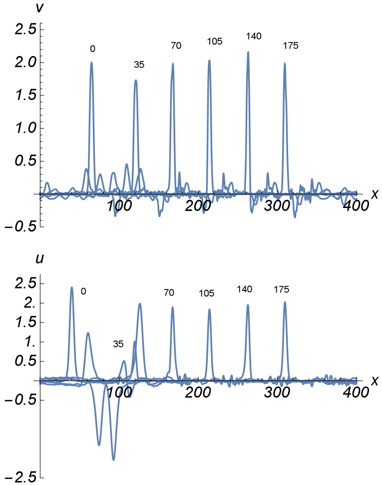
Связанные уравнения

$c_L = 1.6, c_l = 2, c_0 = 1, S = 1, P = 1, \rho = 1; x_{12} = 40, x_{11} = 65, V = 1.3$



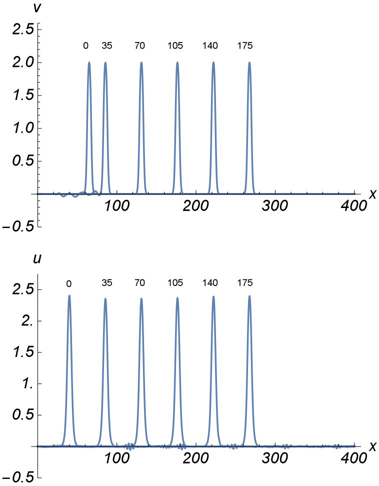
u_0, v_{01}, v_{02}

Пример результата расчетов



Без управления

Пример результата расчетов



С управлением

Основные результаты

- Успешно найдена и поставлена задача, в которой могут быть реализованы методы управления нелинейными локализованными волнами
- Успешно реализован и исследован алгоритм управления в рассмотренных уравнениях. Математическое моделирование выполнялось в пакете Wolfram Mathematica: MethodOfLines с динамическим выбором сетки
- В результате исследований было определено, что целевые функции управления не обязаны быть точными решениями рассматриваемых уравнений: управление также работает для волн отличающейся (желаемой) формы
- Метод был обобщен и исследован для связанных уравнений

Спасибо за внимание!