Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Институт Прикладной математики и механики
Кафедра Теоретической механики

П.Ю. Булдаков

ДИНАМИКА БИЛЬЯРДА

Курсовой проект

Направление подготовки бакалавров: 010800 Механика и математическое моделирование

Группа 23604/1

Руководитель проекта: Панченко А.Ю.

Допущен к защите:

«\_\_» 20\_\_ г.

 Санкт-Петербург

2015

#

# **Оглавление**

[**Оглавление** 2](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226015)

[**Введение** 3](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226016)

[**Глава 1. Общие сведения** 4](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226017)

[1.1 История возникновения бильярда 4](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226018)

[1.2 Виды бильярда 4](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226019)

 [1.3 [Потенциал Леннарда-Джонса](http://tm.spbstu.ru/%D0%9F%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB_%D0%9B%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4-%D0%94%D0%B6%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%B0) 5](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226019)

[**Глава 2.**  6](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226021)

[2.1 Задачи, поставленные перед программой 6](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226022)

[2.2 Написание кода 7](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226023)

[**Итоги работы**  11](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226021)

[**Литература**](file:///C%3A%5CUsers%5C%D0%A1%D0%B5%5CDownloads%5CProgramming_project1.docx#_Toc388226027) 12

**Введение**

Проект направлен на изучение динамики взаимодействия шаров при игре в [бильярд](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D1%8F%D1%80%D0%B4). В процессе выполнения курсовой работы необходимо решить следующие задачи:

* Написать программу, моделирующую динамику взаимодействия шаров при игре в Бильярд. Взаимодействие между шарами описывается с помощью [потенциала Леннарда-Джонса](http://tm.spbstu.ru/%D0%9F%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB_%D0%9B%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4-%D0%94%D0%B6%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%B0).
* Рассмотреть классическое центрально разбиение в русском бильярде, проследить траекторию разлета.

В первой главе приведены общие сведения по теме: история возникновения бильярда как такового, а также его виды, [потенциала Леннарда-Джонса](http://tm.spbstu.ru/%D0%9F%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB_%D0%9B%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4-%D0%94%D0%B6%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%B0). Во второй главе описывается то, как создавалась программа с примерами кодов.

**Глава 1. Общие сведения**

* 1. **История возникновения бильярда**

Первый [бильярдный стол](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D1%8F%D1%80%D0%B4%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%BB) (согласно сохранившимся документам) был изготовлен мастером Анри де Винемом в [1469 году](https://ru.wikipedia.org/wiki/1469_%D0%B3%D0%BE%D0%B4) для короля Франции Людовика XI. Этот стол был похож на современный бильярдный: у него было каменное основание, ограждение, он был покрыт сукном. Документально подтверждены утверждения об игре в бильярд королевы Шотландии Марии Стюарт накануне ее казни и о ее просьбе архиепископу Глазго подыскать столу подходящее помещение после ее смерти. В Россию бильярд был завезен из Голландии Петром I. Новинка быстро завоевала популярность. После смерти Петра I обучение игре на бильярде было включено Верховным тайным советом в курс наук Петра II, его внука и наследника. Екатерина II указом от 7 декабря 1770 года приказала в трактирах и на постоялых дворах «для увеселения приходящих дозволить иметь биллиарды». На рубеже XVIII и XIX веков бильярд являлся частью «обязательной» программы воспитания дворян в Европе и в России.

Впервые о математическом базисе бильярдной игры заговорил [Гаспар Густав Кориолис](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D1%81%2C_%D0%93%D1%8E%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%B2_%D0%93%D0%B0%D1%81%D0%BF%D0%B0%D1%80%22%20%5Co%20%22%D0%9A%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D1%81%2C%20%D0%93%D1%8E%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%B2%20%D0%93%D0%B0%D1%81%D0%BF%D0%B0%D1%80) в своей книге «Théorie mathématique du jeu de billard» (Русск. перевод: «Математическая теория явлений бильярдной игры») в [1835 году](https://ru.wikipedia.org/wiki/1835_%D0%B3%D0%BE%D0%B4). Он использовал в своей работе элементы [теории вероятностей](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D0%BE%D1%8F%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%B9), [теории пределов](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%B2) и общего анализа. Однако особого интереса у современников (по мнению [Лемана](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D0%BD%2C_%D0%90%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D0%B9_%D0%98%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87%22%20%5Co%20%22%D0%9B%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D0%BD%2C%20%D0%90%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D0%B9%20%D0%98%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87)) книга не вызвала: ни у математиков, ни у игроков в бильярд.

Прошло более полутораста лет, и математический бильярд развился в свою теорию, породив несколько побочных. «Теория бильярдов» сегодня неотъемлемая часть [эргодической теории](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D1%80%D0%B3%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F) и [теории динамических систем](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC), имеет важнейшее применение в физике. Математиком [Гальперином](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%93%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BD,_%D0%93%D1%80%D0%B8%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B9_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87&action=edit&redlink=1" \o "Гальперин, Григорий Александрович (страница отсутствует)) создан способ определения числа  с помощью бильярда. Так же известны результаты исследований математиков [Штейнгауза](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A8%D1%82%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B3%D0%B0%D1%83%D0%B7%22%20%5Co%20%22%D0%A8%D1%82%D0%B5%D0%B9%D0%BD%D0%B3%D0%B0%D1%83%D0%B7), [Альхазена](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D1%8C%D1%85%D0%B0%D0%B7%D0%B5%D0%BD%22%20%5Co%20%22%D0%90%D0%BB%D1%8C%D1%85%D0%B0%D0%B7%D0%B5%D0%BD) и [Гарднера](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D1%80%2C_%D0%9C%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD%22%20%5Co%20%22%D0%93%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D1%80%2C%20%D0%9C%D0%B0%D1%80%D1%82%D0%B8%D0%BD).

**1.2. Виды бильярда**

Бильярд чаще всего подразделяют на четыре основных вида:

1. [Русский бильярд](http://rmic.ru/types/russian)

Столы в Русском бильярде имеют размеры в 12 футов, 16 шаров (диаметр 68 мм). 15-ть шаров, участвующие в игре, пронумерованы, оставшийся 16-й, имеет другой цвет, но не имеет номера.

1. [Американский Пул](http://rmic.ru/types/usa)

Американский пул – одна из самых несложных разновидностей игры в бильярд.

1. [Английский Снукер](http://rmic.ru/types/snuker)

Столы в 12 футов, лузы примерно в 120 мм, 20 цветных шаров размером 52,4 мм каждый.

1. [Французский Карамболь](http://rmic.ru/types/karambol)

Участники играют на 10-ти футовых столах, используя шары по 60 миллиметров. Два шара – белые, один – красный. Название игре дал особый удар, который так и называется – Карамболь.

**1.3.** [**Потенциал Леннарда-Джонса**](http://tm.spbstu.ru/%D0%9F%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B8%D0%B0%D0%BB_%D0%9B%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%80%D0%B4-%D0%94%D0%B6%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%B0)

Парный силовой потенциал взаимодействия. Определяется формулой:

*Π*(*r*) = *D* [$ \left(\frac{a}{r}\right)$12 − 2$ \left(\frac{a}{r}\right)$6 ],

где

* *r*  — расстояние между частицами,
* *D*  — энергия связи,
* *a*  — длина связи

Потенциал является частным случаем потенциала Ми и не имеет безразмерных параметров.

Сила взаимодействия, соответствующая потенциалу Леннард-Джонса, вычисляется по формуле

*F*(*r*) = 12 $\frac{D}{a}$ [$\left(\frac{a}{r}\right)$13 − $\left(\frac{a}{r}\right)$7].

Для потенциала Леннард-Джонса жесткость связи, критическая длина связи и прочность связи, соответственно, равны

*C* = 72 $\frac{D}{a^{2}} ,$ *b* =$\sqrt[ 6]{\frac{13}{7}}a $≈ 1.11 *a* , *P* = $\frac{ 504}{169}$ $\sqrt[6]{\frac{7}{13}} \frac{D}{a}$ ≈ 2.7 $\frac{D}{a}$.

Векторная сила взаимодействия определяется формулой

F(r) = −∇*Π*(*r*) = 12 $\frac{D}{a}$ [$\left(\frac{a}{r}\right)$14 − $\left(\frac{a}{r}\right)$8] **r.**

Данное выражение содержит лишь четные степени межатомного расстояния *r*, что позволяет при численных расчетах методом динамики частиц не использовать операцию извлечения корня.

**Глава 2. Написание программы**

**2.1 Задачи, поставленные перед программой**

Программа должна выполнять следующие функции:

1. Визуализация стола, шаров и луз для игры в бильярд.
2. Взаимодействие между шарами должно описывается с помощью потенциала Леннарда-Джонса.
3. У игрока должна быть возможность выбирать направление и силу удара.
4. Игрок, при выборе угла и силы удара, должен видеть примерную траекторию движения “битка”
5. Кнопки “PLAY” и “AGAIN” для удобства.

**2.2 Написание кода**

Ниже приведены части кода, которые отвечают за:

1. Взаимодействие шаров.
2. Задание пирамиды из шаров.
3. Нажатие кнопок “PLAY” и “AGAIN”.

1) Взаимодействие шаров.

1. **var** balls = [];                             *// массив шаров*
2. **var** addNewBall =  **function**(x, y) {
3. *// проверка - не пересекается ли новый шар со стенами или уже существующими шарами*
4. **if** (x - r < 0 || x + r > w || y - r < 0 || y + r > h) **return** **null**;
5. **for** (**var** i = 0; i < balls.length; i++) {
6. **var** rx = balls[i].x - x;
7. **var** ry = balls[i].y - y;
8. **var** rLen2 = rx \* rx + ry \* ry;
9. **if** (rLen2 < 4 \* r2) **return** **null**;
10. }
11. **var** b = [];
12.
13. b.x = x;                b.y = y;        *// расчетные координаты шара*
14. b.fx = 0;               b.fy = 0;      *// сила, действующая на шар*
15. b.vx = 0;               b.vy = 0;       *// скорость*
16.
17. balls[balls.length] = b;                *// добавить элемент в конец массива*
18. **return** b;
19. };
20.
21. *// Основной цикл программы*
22.
23. **function** control() {
24. physics();
25. draw();
26. }
27.
28. *// Расчетная часть программы*
29.
30. **function** physics() {                        *// то, что происходит каждый шаг времени*
31. **for** (**var** s = 1; s <= spf; s++) {
32.
33. *// пересчет сил идет отдельным массивом, т.к. далее будут добавляться силы взаимодействия между шарами*
34. **for** (**var** i0 = 0; i0 < balls.length; i0++) {
35. balls[i0].fx = - B \* balls[i0].vx;
36. balls[i0].fy = - B \* balls[i0].vy;
37. }
38.
39. **for** (**var** i = 0; i < balls.length; i++) {  *// пеерсчет взаимодействия между шарами*
40. *// расчет взаимодействия производится со всеми следующими шарами в массиве,*
41. *// чтобы не считать каждое взаимодействие дважды*
42. **var** b = balls[i];
43. **for** (**var** j = i + 1; j < balls.length; j++) {
44. **var** b2 = balls[j];
45. **var** rx = b.x - b2.x;   **var** ry = b.y - b2.y;         *// вектор смотрит на первый шар (b)*
46. **var** r2 = rx \* rx + ry \* ry;                         *// квадрат расстояния между шарами*
47. **if** (r2 > aCut2) **continue**;                           *// проверка на радиус обрезания*
48. **var** rLen = (Math.sqrt(r2));
49.
50.
51. *// если расстояние между частицами мало, силы будут посчитаны для K \* a*
52. **if** (r2 < K2a2) {
53. **if** (rLen > 0.00001) {                           *// проверка, чтобы избежать деления на 0*
54. rx = rx / rLen \* Ka;
55. ry = ry / rLen \* Ka;
56. }
57. r2 = K2a2;
58. rLen = Ka;                                      *// корень K2a2*
59. }
60.
61. *// сила взаимодействия*
62. **var** s2 = a2 / r2;         **var** s4 = s2 \* s2;         *// \_\_\_в целях оптимизации\_\_\_*
63. **var** F = LJCoeff \* s4 \* s4 \* (s4 \* s2 - 1);          *// сила взаимодействия Леннарда-Джонса*
64.
65. **var** Fx = F \* rx;        **var** Fy = F \* ry;
66. b.fx += Fx;             b.fy += Fy;
67. b2.fx -= Fx;            b2.fy -= Fy;
68. }
69.
70. **if** (b.y + r > h) { b.fy += -Cwall \* (b.y + r - h) - Bwall \* b.vy; }    *// рассчет взаимодействия со стенками : когда координаты шара совпадают с координатами в условии цикла, шару придается скорость и направление*
71. **if** (b.y - r < 0) { b.fy += -Cwall \* (b.y - r) - Bwall \* b.vy;}
72. **if** (b.x + r > w) { b.fx += -Cwall \* (b.x + r - w) - Bwall \* b.vx; }
73. **if** (b.x - r < 0) { b.fx += -Cwall \* (b.x - r) - Bwall \* b.vx; }
74.
75. b.vx += b.fx / m \* dt;        b.vy += b.fy / m \* dt;
76. b.x += b.vx \* dt;             b.y += b.vy \* dt;
77. }
78. }
79. }

2) Задание пирамиды из шаров.

1. addNewBall(16\*w/32, 16\*h/32 );
2. addNewBall(16\*w/32, 8\*h/32 );
3. addNewBall(16\*w/32 - r,   8\*h/32 - 1.7321\*r);
4. addNewBall(16\*w/32 + r,   8\*h/32 - 1.7321\*r );
5. addNewBall(16\*w/32,     8\*h/32 - 2\*1.7321\*r );
6. addNewBall(16\*w/32 - 2\*r,   8\*h/32 - 2\*1.7321\*r );
7. addNewBall(16\*w/32 + 2\*r,   8\*h/32 - 2\*1.7321\*r );
8. addNewBall(16\*w/32 + r,   8\*h/32 - 3\*1.7321\*r );
9. addNewBall(16\*w/32 - r,   8\*h/32 - 3\*1.7321\*r );
10. addNewBall(16\*w/32 + 3\*r,   8\*h/32 - 3\*1.7321\*r );
11. addNewBall(16\*w/32 - 3\*r,   8\*h/32 - 3\*1.7321\*r );
12. addNewBall(16\*w/32,     8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
13. addNewBall(16\*w/32 - 2\*r,   8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
14. addNewBall(16\*w/32 + 2\*r,   8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
15. addNewBall(16\*w/32 - 4\*r,   8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
16. addNewBall(16\*w/32 + 4\*r,   8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
17. addNewBall(16\*w/32, 16\*h/32 );

3) Нажатие кнопок “PLAY” и “AGAIN”.

1. **this**.setSlider\_01 = **function**(c) { q=-c ;}; *// функция для слайдера угла*
2. **this**.setSlider\_02 = **function**(c) { v0=c ;}; *// функция для слайдера угла*
3.
4. *// настройка интерфейса*
5.
6. slider\_01.min = 0;               slider\_01.max =360;
7. slider\_01.step = 0.5;
8. slider\_01.value = q;          *// начальное значение ползунка должно задаваться после min и max*
9. text\_01.value = Math.abs(q);
10. slider\_02.min = 0;               slider\_02.max = 10;
11. slider\_02.step = 0.5;
12. slider\_02.value = v0;                *// начальное значение ползунка должно задаваться после min и max*
13. text\_02.value = v0;
14.
15. **this**.setSlider\_01(q);
16. **this**.setSlider\_02(v0);
17. *// кнопка “PLAY”*
18. **this**.newSystem = **function**() {
19. balls[0].vx = v0\* Math.cos(q\*Pi/180);
20. balls[0].vy = v0\* Math.sin(q\*Pi/180);
21. }
22. *// кнопка “AGAIN”*
23. **this**.newSystem1 = **function**() {
24. **for** (**var** i = 20; i >= 0; i--)
25. {balls.splice(i, 1)};
26. addNewBall(16\*w/32, 16\*h/32 );
27. addNewBall(16\*w/32, 8\*h/32 );
28. addNewBall(16\*w/32 - r,   8\*h/32 - 1.7321\*r);
29. addNewBall(16\*w/32 + r,   8\*h/32 - 1.7321\*r );
30. addNewBall(16\*w/32,     8\*h/32 - 2\*1.7321\*r );
31. addNewBall(16\*w/32 - 2\*r,   8\*h/32 - 2\*1.7321\*r );
32. addNewBall(16\*w/32 + 2\*r,   8\*h/32 - 2\*1.7321\*r );
33. addNewBall(16\*w/32 + r,   8\*h/32 - 3\*1.7321\*r );
34. addNewBall(16\*w/32 - r,   8\*h/32 - 3\*1.7321\*r );
35. addNewBall(16\*w/32 + 3\*r,   8\*h/32 - 3\*1.7321\*r );
36. addNewBall(16\*w/32 - 3\*r,   8\*h/32 - 3\*1.7321\*r );
37. addNewBall(16\*w/32,     8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
38. addNewBall(16\*w/32 - 2\*r,   8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
39. addNewBall(16\*w/32 + 2\*r,   8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
40. addNewBall(16\*w/32 - 4\*r,   8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
41. addNewBall(16\*w/32 + 4\*r,   8\*h/32 - 4\*1.7321\*r );
42. addNewBall(16\*w/32, 16\*h/32 );

**2.4 Итог работы.**

 В ходе работы над проектом была написана программа, моделирующая процесс игры в бильярд. Данная программа показывает, что траектория разлета шаров после центрального удара не зависит от силы удара, но зависит от малейшего изменения угла, так как меняется распространение ударной волны в пирамиде. При силе, достаточной для визуально заметного разлета шаров, при изменении угла на 1 градус - полное отклонение от симметрии, при 0.1 - заметное отклонение от симметрии, при 0.01 - трудно различимое.

[Профессор Джим Белк (Jim Belk)](http://mathoverflow.net/questions/156263/perfectly-centered-break-of-a-perfectly-aligned-pool-ball-rack/156407#156407) рассчитал направление и скорость движения каждого из 15 шаров пирамиды, а также битка , после соударения.Для сравнения, помните, что начальная скорость битка была 10 ед/сек.





**Список литературы**

1. Баррет Д. **JavaScript. Web-профессионалам.** - Киев: БХВ - Киев, 2001.

2. Вайк А. **JavaScript в примерах.** - Киев: ДиаСофт, 2000.

3. [Математическая теория явлений бильярдной игры - **Г. Кориолис**.](http://publ.lib.ru/ARCHIVES/K/KORIOLIS_Gaspar_Gyustav/_Koriolis_G.G..html%2C)

4. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.,** Механика