Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Физико-механический факультет
Кафедра “Теоретическая механика”

Диссертация допущена к защите
Зав. кафедрой
А.М. Кривцов
“ ” 2012

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание академической степени
МАГИСТРА

Тема: Моделирования аппарата с кипящим слоем и обвала карстовой полости методом динамики частиц

Направление 010900 – Механика

Выполнил студент группы 60510/11 М.А. Семин
Научные руководители: к.ф.-м.н. асс., В.А. Кузькин, Dr.-Ing. habil., S. Antonyuk
Консультант по вопросам охраны труда: к.т.н. доц. В.В. Монашков

Санкт-Петербург 2012

Содержание

Введение…….. 4

Часть1. Моделирование течения в аппарате с кипящим слоем посредством сопряжения SPH&DEM

1. Метод сглаженных частиц…….. 7
   1.1. Введение……. 7
   1.2. Базовые гипотезы…….. 8
   1.3. Вывод уравнений…….. 11
   1.4. Граничные условия…… 13
      1.4.1. Стенка……..... 13
      1.4.2. Вход……..... 14
      1.4.3. Выход (свободная поверхность)…… 15
2. Верификация построенного алгоритма метода сглаженных частиц и метода дискретных частиц…….. 17
   2.1. Течение в цилиндрической трубе с круговым профилем……. 17
      2.1.1. Ламинарный случай……. 17
      2.1.2. Турбулентный случай…….. 23
   2.2. Задача об обтекании шара……. 26
      2.2.1. Ламинарный случай……. 26
      2.2.2. Турбулентный случай…….. 30
3. Моделирование кипящего слоя……. 32
   3.1. Понятие кипящего слоя……. 32
   3.2. Постановка задачи……. 36
   3.3. Численное моделирование…… 38
   3.4. Эффект «закупорки» при моделировании течений методом сглаженных частиц……. 42

3.5. Эффект фрагментации…… 43
4. Экспериментальное моделирование кипящего слоя…… 46
4.1. Описание установки…….. 46
4.2. Результаты эксперимента…….. 49

Часть 2. Дискретно-элементное моделирование обрушения грунта в карстовую полость

5. Теоретические аспекты дискретно-элементного моделирование деформации горного массива…… 54
5.1. Постановка задачи…….. 54
5.2. Граничные условия……. 57
5.3. Прочность горных пород…… 57
5.4. Модификация метода дискретных элементов…….. 59
5.5. Модель взаимодействия Герца-Миндлина……... 61
5.6. Модификация Bonded-Particle Model…… 64
5.7. Обезразмеривание как способ уменьшения вычислительной ошибки в молекулярно-динамическом моделировании…… 68
6. Верификация алгоритма расчета деформирования грунта…... 72
6.1. Одноосное сжатие прямоугольного образца (2D случай)…….. 72
6.2. Простой сдвиг…….. 78
7. Задача об обрушении грунта в карстовую полость…… 80
7.1. Постановка задачи……... 80
7.2. Численный эксперимент……. 81
Заключение…….. 86
Приложения……. 87
Список литературы…… 98

Введение

Данная работа посвящена исследованию и разработке модели сопряжения различных методов динамики частиц при моделировании динамических процессов в многофазных средах.

В рамках проводимого исследования решались следующие две задачи:

1) Моделирования течения в аппарате с кипящим слоем посредством сопряжения метода сглаженных частиц и метода динамики частиц
2) Моделирование обрушения грунта в карстовую полость посредством сопряжения моделей Герца-Миндлина [14] и Bonded Particle Model [23]

Актуальность первой задачи обусловлена тем, что в фармацевтической промышленности широко используются аппараты с кипящим слоем. При оптимизации работы таких аппаратов ключевую роль играет понимание происходящих в них процессов взаимодействия твердых частиц с потоком жидкости или газа. В такой ситуации незаменимую роль играет компьютерное моделирование. На практике для моделирования динамики частиц в потоке газа, как правило, используются совместно метод дискретных элементов (DEM) [15] и вычислительная гидродинамика (CFD). Алгоритмы, позволяющие совместно решать задачу методами DEM и CFD реализованы, например, в пакетах EDEM и FLUENT. Однако решение связанных задач, как правило, требует огромных вычислительных мощностей. Проблемы с быстродействием возникают в связи с тем, что для моделирования методами DEM и CFD используются принципиально различные решатели. Использование одного решателя в рамках DEM/CFD подходов практически невозможно.

Цель настоящего исследования – использовать альтернативный подход, использованный, например, в работе [16]. Предлагается для моделирования газа использовать метод гидродинамики сглаженных частиц, предложенный Lucy [21], Gringold and Monaghan [18]. При таком подходе удается

использовать один решатель для методов SPH и DEM, что существенно ускоряет процесс моделирования.

Также скажем пару слов о второй задачи данного исследования, касающейся моделирования карстовых процессов. Карст представляет собой совокупность процессов и явлений, связанных с деятельностью воды и выражающихся в растворении горных породи образовании в них пустот (карстовых полостей) (см. рис.1).

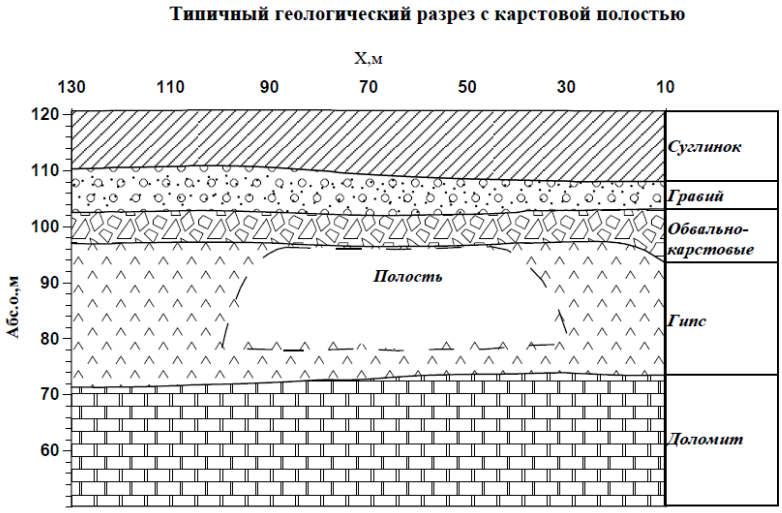


Рис.0.1. Карстовая полость в геологическом разрезе

Исследование процессов карстогенеза является **актуальным**, поскольку строительство гражданских и промышленных объектов на закарстованных территориях сопряжено с опасностью их разрушения под воздействием карстовых процессов. На этих территориях строительными нормами и правилами [9] предусматривается проектирование сооружений с учетом возможности реализации карстовых деформаций. Однако, данные нормативные документы не располагают строгими критериями оценки опасности воздействия карстовых процессов на здания и сооружения. В них ограничиваются вероятностно-статистическими подходами[10,11].

Целью данного исследования является определение размеров провала на земной поверхности при «выпуске» вышележащих пород в полость в зависимости от ее характерных размеров и глубины заложения.

ЧАСТЬ 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В АППАРАТЕ С КИПЯЩИМ СЛОЕМ ПОСРЕДСТВОМ СОПРЯЖЕНИЯ SPH&DEM

1. Метод сглаженных частиц

1.1. Введение

Бессеточный метод сглаженных частиц представляет собой мощный и достаточно универсальный подход для решения множества задач механики сплошных сред с сильными деформациями [19]. Данный метод является полностью Лагранжевым; в отличие от других известных методов частиц, например PIC-метода [18], SPH-метод не использует какой-либо пространственной сетки для аппроксимации, что снимает значительное число теоретических и алгоритмических трудностей.

Выбор этого метода был связан с тремя основными обстоятельствами. Во-первых, это вычислительные достоинства метода. Естественная лагранжева природа SPH-метода позволяет проводить моделирование в очень широком динамическом диапазоне плотностей во времени и пространстве, от массивных скоплений газа до глубокого вакуума с нулевой плотностью. Метод отличается полной пространственной изотропией, а сама схема сконструирована на основе физической сущности решаемой задачи – движении частиц, эволюция которых во времени и пространстве непосредственно (не через систему дифференциальных уравнений) отражает законы сохранения массы, импульса и момента импульса [19]. Этого нельзя сказать о большинстве алгоритмов, формально аппроксимирующих непрерывные дифференциальные уравнения их дискретными аналогами безотносительно к физической сущности задачи.

Во-вторых, этот метод допускает расширение круга решаемых задач (физико-химические процессы, излучение) без кардинальной перестройки всего алгоритма, а также прозрачный и естественный интерфейс с другими сегментами программного комплекса математического моделирования. Кроме того, он легко распараллеливается.

1.2. Базовые гипотезы

Пусть у нас есть некоторая произвольная функция $A(\boldsymbol{r})$ векторного аргумента $\boldsymbol{r}$. Функция определена на некотором непрерывном множестве Ω и представляет собой некоторое физическое свойство исследуемой нами среды, – например, плотность, скорость, энергию и пр. Тогда, как известно из теории обобщённых функций, значение функции A при некотором фиксированном $\boldsymbol{r}$ может быть получено из интеграла, взятого по всему множеству Ω значений аргумента $\boldsymbol{r}$.

$$A(\boldsymbol{r}) = \int_{\Omega} A(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{1.1}$$

где δ – дельта-функция Дирака.

Первая базовая аппроксимация метода сглаженных частиц заключается в аппроксимации дельта-функции Дирака некоторой непрерывной функцией-ядром W_h

$$\lim_{h \to 0} W_h(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{1.2}$$

При этом степень близости функции-ядра W_h к функции Дирака δ будет определяться величиной h, которая в методе сглаженных частиц называется радиусом сглаживания.

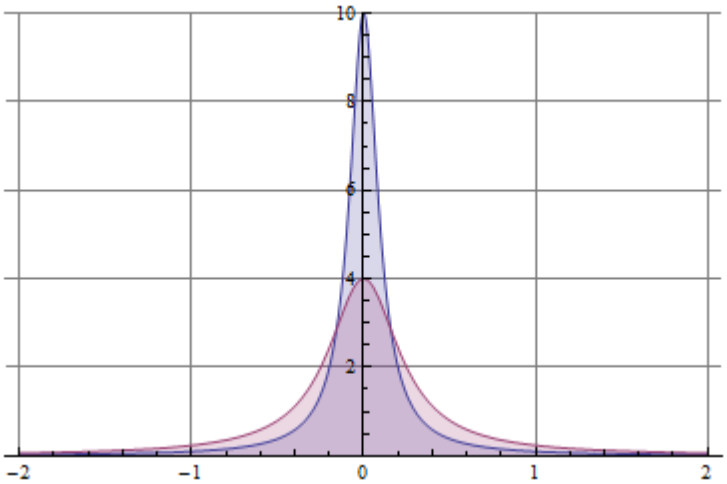


Рис.1.1. Аппроксимация функции Дирака (h=0,1 и h=0.5) – по формуле 1.5

Интеграл (1.1) с учетом (1.2) может быть записан в виде:

$$A_I(\boldsymbol{r}) = \int_{\Omega} A(\boldsymbol{r}')W_h(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \tag{1.3}$$

Здесь справа мы пишем не первоначальную функцию $A(\boldsymbol{r})$, а $A_I(\boldsymbol{r})$, подразумевая, что это интерполированная функция.

Вторая базовая аппроксимация метода сглаженных частиц – замена в (1.3) интеграла суммой

$$A_I(\boldsymbol{r}) = \sum_{\mathrm{j}} A(\boldsymbol{r_j})\frac{m_j}{\rho_j}W_h(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_j}) \tag{1.4}$$

где суммирование производится по соседним N частицам. Таким образом, сам переход от интеграла к сумме «знаменует» собой переход от континуального представления среды к ее представлению в виде набора дискретных элементов, в данном случае шариков. Радиус сглаживания h в (1.4) – своего рода аналог шага пространственной сетки в эйлеровых численных методах, $\boldsymbol{r}_j$ – координата соседней частицы, $\rho(\boldsymbol{r}_j)$ – плотность вещества в точке с радиус-вектором $\boldsymbol{r}_j$, m_j – масса частицы и W_h – сглаживающее (интерполяционное ядро вида) [20]

$$W_h(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j) = \frac{C}{h^D}\cdot\begin{cases}\left(1-\frac{3}{2}k^2+\frac{3}{4}k^3\right), & k<1\\ \frac{1}{4}(2-k)^3, & 1<k<2\\ 0, & k>2\end{cases} \tag{1.5}$$

$$k = \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j|}{h}$$

$$C = \begin{cases}\frac{2}{3}, & D=1\\ \frac{10}{7\pi}, & D=2\\ \frac{1}{\pi}, & D=3\end{cases}$$

где D– размерность пространства моделирования ($D = 1,2,3$).

Таким образом, формула (1.4) представляет собой метод, согласно которому любая континуальная физическая величина может быть интерполирована некоторой суммой по конечному набору частиц (элементов).

Плотность вещества в точке $\boldsymbol{r}$определяется как

$$\langle \rho(\boldsymbol{r}) \rangle = \sum_{j=1}^{N} m_j W_h(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j), \tag{1.6}$$

Скорость движения среды в точке $\boldsymbol{r}$определяется как

$$\langle \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \rangle = \frac{1}{\langle \rho \rangle} \sum_{j=1}^{N} m_j \boldsymbol{V}_j W_h(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j), \tag{1.7}$$

Аналогично для других физических свойств среды.

В методе сглаженных частиц производная$\frac{\partial A_I(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}$функции A_Iможет быть построена путём дифференцирования сглаживающего ядра, а потому производные интерполированных функций плотность $\langle \rho(\boldsymbol{r}) \rangle$, скорости $\langle \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \rangle$ и пр. могут быть получены аналитическим дифференцированием.

Ниже приведена процедура определения градиента, дивергенции и лапласиана в предположении, что сглаживающее ядро W_h непрерывно по $\boldsymbol{r}$ вместе со своими производными до второго порядка включительно.

$$\nabla A_I(\boldsymbol{r}) = \sum_{\mathrm{j}} A(\boldsymbol{r_j}) \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W_h(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_j}) \tag{1.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r}) = \sum_{\mathrm{j}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r_j}) \cdot \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W_h(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_j}) \tag{1.9}$$

$$\Delta A_I(\boldsymbol{r}) = \sum_{\mathrm{j}} A(\boldsymbol{r_j}) \frac{m_j}{\rho_j} \Delta W_h(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_j}) \tag{1.10}$$

Для интерполяции градиента более высокого порядка точности применяется тождество

$$\nabla \boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\rho} (\nabla[\rho \boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r})] - \boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r}) \nabla \rho) \tag{1.11}$$

Частично-симметризованная форма градиента $\nabla \boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r})$ (1.11) может быть получена из тождества

$$\frac{\nabla \boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r})}{\rho} = \nabla\left(\frac{\boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r})}{\rho}\right) - \frac{\boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r})}{\rho^2}\nabla\rho \tag{1.12}$$

Тогда сам градиент будет вычисляться так:

$$\nabla \boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r}) = \rho \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\boldsymbol{A}_I(\boldsymbol{r})}{\rho^2} - \frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r_j})}{{\rho_j}^2}\right) m_j \nabla W_h(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_j}) \tag{1.13}$$

1.3. Вывод уравнений

Рассматриваемая в настоящей работе задача кипящего слоя описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для моделирования газовой динамики (форма Лагранжа) и системой обыкновенных дифференциальных уравнений метода динамики частиц для моделирования движения отдельных твердых гранул.

Прежде всего, рассмотрим газодинамические уравнения

$$\frac{d\rho_f}{dt} + \rho_f \nabla \cdot \left(\boldsymbol{V}_f\right) = 0 \tag{1.13}$$

$$\frac{d\boldsymbol{V}_f}{dt} = \boldsymbol{g} - \frac{1}{\rho_f}\nabla p + \frac{\mu}{\rho_f}\Delta \boldsymbol{V}_f \tag{1.14}$$

Здесь ρ_f – плотность жидкой фазы, $\boldsymbol{V}_f$ – вектор скорости, p – давление, $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения.

Система уравнений газовой динамики (1.13) – (1.14) замыкается уравнением состояния, которое связывает давление с другими модельными термодинамическими параметрами: $p = p(S, T)$. Для модели совершенного идеального газа пишем адиабатическое уравнение состояния

$$p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma \tag{1.15}$$

где γ – показатель адиабаты газа.

Запишем приведенные выше уравнения в терминах бессеточного метода сглаженных частиц. Для этого в пространство моделирования помещается N «сферических» частиц (см. рис.1.2), наделенных массой, скоростью, давлением и координатами. В дальнейшем производных для аппроксимации

газодинамических уравнений вычисляются посредством сплайн-интерполяции.

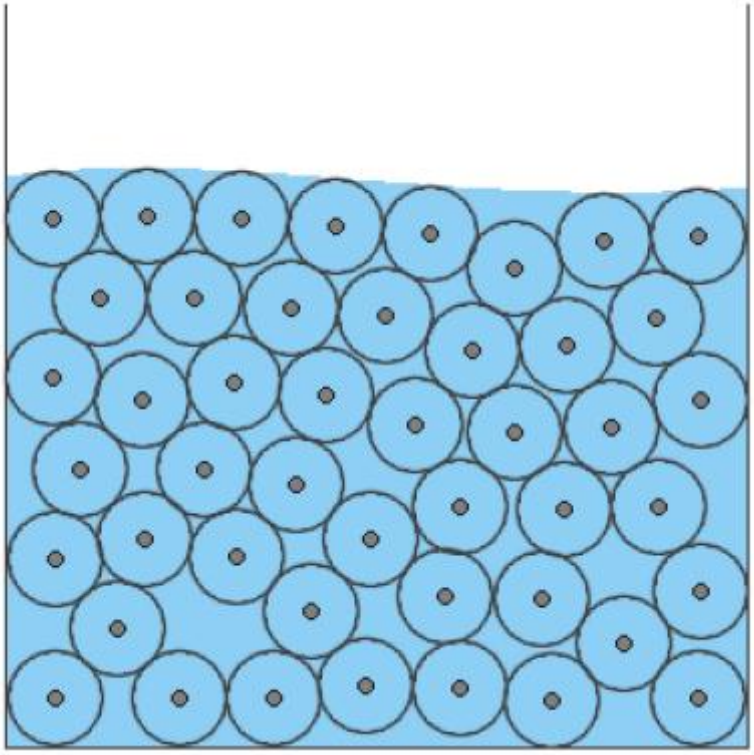


Рис.1.2. Структура жидкой среды в лагранжевом дискретном подходе SPH

В рамках данного формализма уравнение неразрывности (1.13) вырождается. Нам достаточно лишь констатировать факт постоянства числа частиц N и искать плотность в виде:

$$\rho(\boldsymbol{r_j}) = \sum_{i=1}^{N} m_i W_h(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r}_j), \tag{1.16}$$

Уравнение движения (1.14) в SPH-формализме аппроксимируется следующим образом:

$$\frac{d\boldsymbol{V}_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_i^2}\right) \nabla W_h\left(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r}_j\right) + F_\mu, \tag{1.17}$$

Здесь $\boldsymbol{V}_i$ – вектор скорости i-й частицы, а $\boldsymbol{r_i}$и $\boldsymbol{r}_j$ – радиус-векторы i-й и j-й частиц соответственно, F_μ–сила вследствие вязкости среды, которая определяется по следующей [22] формуле

$$\boldsymbol{F}_{\mu_i} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha\mu_{ij}\bar{c}_{ij} + \beta\mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} \nabla W_h(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r}_j), \tag{1.18}$$

где

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \bar{h}_{ij} \dfrac{(\boldsymbol{V_j} - \boldsymbol{V}_i)\cdot(\boldsymbol{r_j} - \boldsymbol{r}_i)}{\left[(\boldsymbol{r_j} - \boldsymbol{r}_i)^2 + 0.01\bar{h}_{ij}{}^2\right]}, & if\ (\boldsymbol{V_j} - \boldsymbol{V}_i)\cdot(\boldsymbol{r_j} - \boldsymbol{r}_i) < 0 \\ 0, & if\ (\boldsymbol{V_j} - \boldsymbol{V}_i)\cdot(\boldsymbol{r_j} - \boldsymbol{r}_i) \geq 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\bar{f}_{ij} = \frac{f_i + f_j}{2}$$

А α и β – числовые константы, которые для воздуха можно принять равными 1 и 2 соответственно. Отметим одну интересную особенность выражения (1.19) для μ_{ij}. В случае, когда жидкие частицы разлетаются друг от друга $(\boldsymbol{V_j} - \boldsymbol{V}_i)\cdot(\boldsymbol{r_j} - \boldsymbol{r}_i) \geq 0$ (разрежение потока) величина μ_{ij} обращается в ноль. Это означает, что среда отчасти лишена объемной вязкости.

Вторая вязкость, или объёмная вязкость [3] — внутреннее трение при переносе импульса в направлении движения. Объёмная вязкость влияет только при учёте сжимаемости. Если динамическая (первая) вязкость характеризует деформацию чистого сдвига, то вторая вязкость характеризует деформацию объёмного сжатия. Объёмная вязкость играет большую роль в затухании звука и ударных волн. В нашем случае звуковые процессы не являются существенными, а предположение о нулевой объёмной вязкости на растяжение жидкости делается для того, чтобы избежать неустойчивостей численной схемы.

Уравнения состояния (1.16) остаётся без изменений.

Моделирование движения твердых частиц осуществляется с помощью следующей системы дифференциальных уравнений

$$m_s \frac{d\boldsymbol{V}_{s_i}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_{ij}, \boldsymbol{V}_{ij}) + \boldsymbol{F}_D, \tag{1.20}$$

Здесь $\boldsymbol{V}_{s_i}$ – вектор скорости i-й твердой частицы, а $\boldsymbol{r_{ij}} = \boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r}_j$и $\boldsymbol{V_{ij}} = \boldsymbol{V_i} - \boldsymbol{V}_j$ – относительные радиус-вектор и скоростьi-й и j-й

частиц,$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_{ij}, \boldsymbol{V}_{ij})$ – сила взаимодействия между твердыми частицами (закон Герца-Миндлина, см. пункт 5.5), $\boldsymbol{F}_D$–межфазная сила сопротивления, которая вводится в формализме SPH и определяется так

$$\boldsymbol{F}_D = -\sum_{j=1}^{N}\left(\left(\frac{\langle p\rangle}{\langle \rho^2\rangle} + \frac{p_j}{\rho_i^2}\right) + \frac{\alpha\mu_{ij}\bar{c}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}}\right)\nabla W_h(\boldsymbol{r_i} - \boldsymbol{r}_j), \qquad (1.21)$$

где α – коэффициент сопротивления, μ_{ij} определяется по формулам (1.19), $\langle p\rangle$ и $\langle \rho^2\rangle$ – средние давление и квадрат плотности жидкой фазы в окрестности i-й твердой частицы. Твердым частицам, как и жидким, приписывается сглаживающее ядро $\mathrm{W_h}$. Это означает, что межфазное взаимодействие «жидкость – твердое тело» моделируется как взаимодействие типа «жидкость – жидкость». При этом у твердых частиц сглаживающее ядро $\mathrm{W_h}$ вводится только в межфазном взаимодействии. В рамках только твердой фазы взаимодействие между частицами описывается с помощью закона Герца-Миндлина (см.п.5.5).

Сила $\boldsymbol{F}_D$ действует на жидкость со стороны частиц и на частицы со стороны жидкости.

1.4. Граничные условия

1.4.1. Стенка

Для моделирования условия прилипания потока к твердой стенке используются слой неподвижных частиц (dummy particles) [20] – см. рис.1.3.

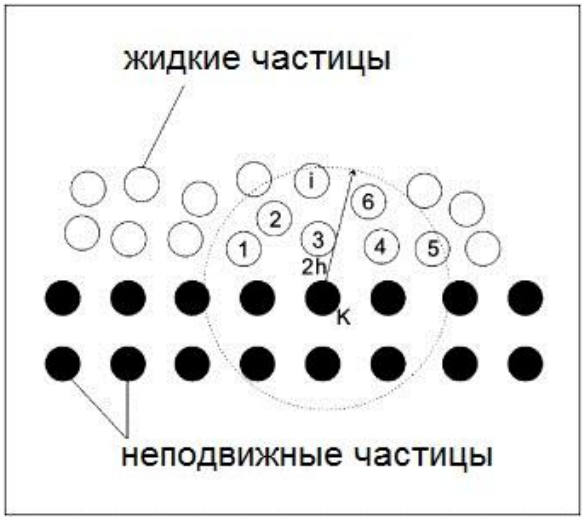


Рис.1.3. Неподвижные частицы

Это наиболее простой способ, однако он имеет один минус, связанный с тем, что такие граничные условия не совсем однородны. Пусть, к примеру, частица, ударяется о стенку. Если в точке её удара о стенку расположена неподвижная частица, мы получим одну траекторию отскока первой частицы, если же частица ударяется о часть стенки, в которой нет частицы (промежуток между двумя соседними частицами), то ясно, что при отскоке частица поведет себя иначе.

Еще один вариант моделирования граничных условий в виде стенки – зеркальные частицы (mirror particles) – см. рис.1.4.

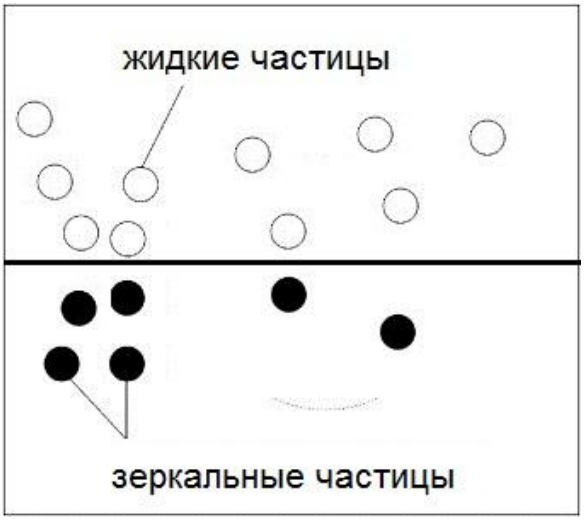


Рис.1.4. Зеркальные частицы

Если данная частица находится от стенки на расстоянии, меньшем, чем радиус сглаживания h, для данной частицы создаётся пара, зеркально

отображённая относительно стенки и двигающаяся с зеркально отображенной скоростью.

1.4.2. Вход

Пусть у нас есть зона входа частиц в расчетную область, и мы хотим смоделировать граничное условие в скоростях с однородным профилем скорости $V = const$. При этом мы ходим, чтобы на входе поток имел однородную плотность ρ_{inlet}, которой соответствует расстояние между сглаженными частицами r_{inlet}. В этом случае каждый раз по прошествии временного интервала

$$t_{inlet} = \frac{r_{inlet}}{V} \tag{1.22}$$

генерируем на зоне входа квадратную упаковку частиц с периодом r_{inlet}. При этом каждой из частиц сообщаем скорость, равную V.

1.4.3. Выход (свободная граница)

Наиболее простой случай выхода - свободная граница. При пересечении частицей границы расчетной области, она удаляется из области.

2. Верификация построенного алгоритма метода сглаженных частиц и метода дискретных частиц

Прежде чем приступить к непосредственному моделированию кипящего слоя, необходимо предварительно верифицировать алгоритм, построенный на основе сопряжения метода сглаженных частиц и метода динамики частиц. Верификацию можно провести на простейших потоках, которые хорошо изучены и для которых существуют аналитические решение, а также большое количество экспериментальных данных. Такими простейшими течениями является установившееся течение в цилиндрической трубе (в ламинарном случае – течение Гагена-Пуазейля) и обтекание сферы (в ламинарном случае – задача Стокса). Поэтому далее в данной главе проводится сравнительный анализ известных решений с решениями, получаемыми в результате численного моделирования с помощью SPH и MPD.

2.1. Течение в цилиндрической трубе с круговым профилем

2.1.1. Ламинарный случай

Одним из наиболее простых случаев движения вязкой несжимаемой жидкости является так называемое ламинарное (слоистое) движение в цилиндрической трубе произвольного сечения, при котором линии тока — прямые линии, параллельные оси трубы [8].

Как показывают опыты, такое движение существует в цилиндрических трубах с различными формами сечений, если только число Рейнольдса не превосходит некоторого определенного критического своего значения, после чего движение перестает быть ламинарным, частицы жидкости приобретают сложные криволинейные траектории и приводимое в настоящем параграфе решение теряет свою силу. Практически излагаемые сейчас результаты

имеют значение лишь при движениях с очень малыми скоростями или в тонких капиллярах, или, наконец, при движении очень вязких жидкостей. Подробнее об условиях существования ламинарного режима течения и явлений перехода его в более сложный, турбулентный режим будет сказано в параграфе 2.1.2.

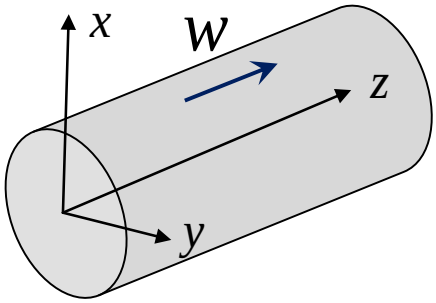


Рис.2.1. Цилиндрическая труба

Направим (рис. 2.1) ось Oz по оси трубы и будем предполагать трубу бесконечно длинной, а поток — направленным вдоль оси трубы, так что из трех компонент скорости u, vиwостается лишь одна w, а остальные две равны нулю. Отвлекаясь от действия объемных сил и считая поток изотермическим, а, следовательно, плотность ρ и коэффициент вязкости μ постоянными, будем иметь, согласно уравнениям Навье — Стокса [3], систему уравнений

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2.2}$$

$$w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.4}$$

Из последнего уравнения этой системы следует, что w представляет собой функцию только x и y, а из первых двух — что p — функция только z. Иными словами, если провести нормальные к оси трубы сечения, то во всех таких сечениях распределения скоростей одинаковы, а давление меняется

только от сечения к сечению, сохраняя в данном сечении одинаковое значение. Такие движения называют установившимися.

Введем удобное для дальнейшего обозначение

$$\frac{\partial p}{\partial z} = const = -\frac{\Delta p}{l} \tag{2.5}$$

где Δp — постоянное вдоль трубы падение давления на произвольно выбранном участке длины l.

При установившемся движении вязкой жидкости по цилиндрической трубе перепад давления Δp, будучи умножен на площадь сечения S, играет роль движущей силы, уравновешиваемой силами сопротивлений трения жидкости о поверхность трубы равно действующей, равной $\int \tau_w ds \cdot l$, где τ_w(s) —переменное по периметру напряжение трения.

Отсюда непосредственно следует, что давление в цилиндрической трубе должно уменьшаться вниз по течению, а следовательно, $\Delta p > 0$.Для трубы переменного сечения, где движение может быть как ускоренным, так и замедленным, такое заключение сделать нельзя.

В конкретных расчетах перепад давления Δp на участке трубы длины l либо задается непосредственно, либо может быть выражен через другие заданные величины: секундный расход жидкости сквозь трубу, среднюю по сечению или максимальную скорости.

Проведя несложные математические выкладки, получаем выражение для распределения скоростей в виде параболоида вращения второго порядка [3]

$$w = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right) \tag{2.6}$$

Максимальная скорость w_{max} достигается на оси ($r = 0$) и равна

$$w_{max} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \tag{2.7}$$

А секундный объемный расход жидкости Q сквозь сечение трубы кругового профиля

$$Q = \frac{1}{2}\pi R^2 w_{max} = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\mu l} \qquad (2.8)$$

Представляет интерес сравнение данных теоретических результатов с результатами численного моделирования с помощью метода сглаженных частиц. В качестве примера рассмотрим задачу о течении газа (плотность $\rho = 1.25$ кг/м^3, динамическая вязкость $\mu = 10^{-5}$ Па $\cdot$ с) через цилиндрический канал кругового профиля (диаметр канала $d = 1$ см, длина канала $h = 5$ см).

Радиус сглаживания равен $R = \frac{d}{20} = 0.5$ мм. Скорость частиц на входе в канал – $w_{in} = 0{,}1$ см/сек.

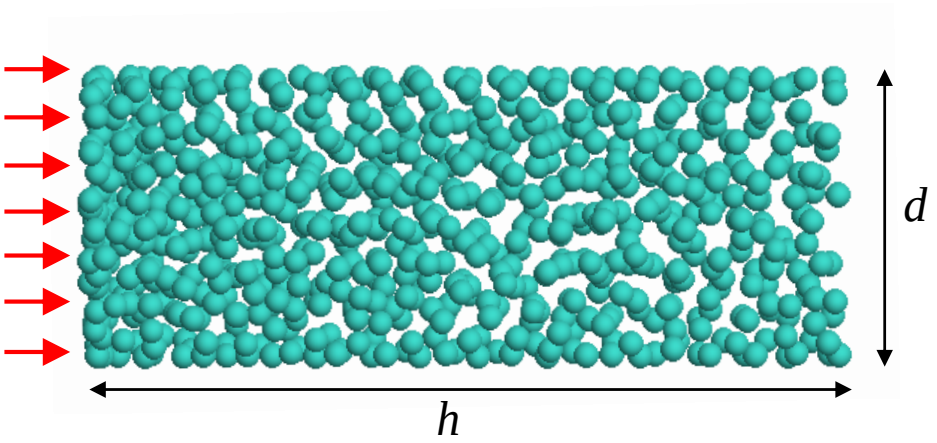


Рис.2.2. Цилиндрический канал, заполненный SPH-частицами

На рис.2.2 приведен вид сбоку канала, заполненного SPH-частицами. Слева расположен вход в канал, где генерируются новые частицы, справа – свободная граница, где частицы покидают область. На стенках задается прилипание.

На рис.2.3 приведено несколько профилей обезразмеренной скоростиw, в сечении $h/2 = 2.5$ см, полученных в результате усреднения по большому количеству частиц (2000 частиц), прошедших через данное сечение в процессе счета. Число Рейнольдса рассматриваемого течения равно

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{1.25 \cdot 0.001 \cdot 0.01}{0.00001} = 1.25 \qquad (2.9)$$

Процедура усреднения скорости по большому количеству частиц и построения на ее основе поперечного профиля скорости описана в приложении № 1.

На рис.2.3 также приведен параболический профиль, отвечающий ламинарной теории Гагена-Пуазейля (штрихованная кривая). Как видим, качественно результаты неплохо согласуются друг с другом – в обоих случаях мы имеет параболическую зависимость. Если говорить о количественном соответствии результатов, то полученные профили близки к теоретическому профилю (2.6).

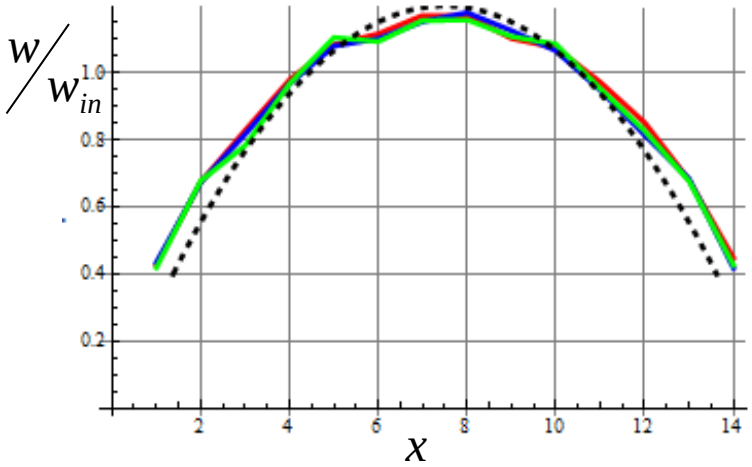


Рис.2.3. Профили скоростей: цветные кривые – численные расчеты по методу сглаженных частиц (различные цвета отвечают различным способам генерации частиц на входе в канал; определения профиля скоростей производилось на некотором удалении от входа, чтобы избежать влияния граничных эффектов), черная штриховая кривая – формула Гагена-Пуазейля.

При моделировании течения газа (жидкости) через трубу методом сглаженных частиц была замечена интересная особенность. При низких скоростях (и отвечающих им малых числах Рейнольдса $Re < 10$)траектории отдельных частиц представляют собой не ровные прямые, как это следовало ожидать, а синусоидальные волны (см. рис.2.4а).

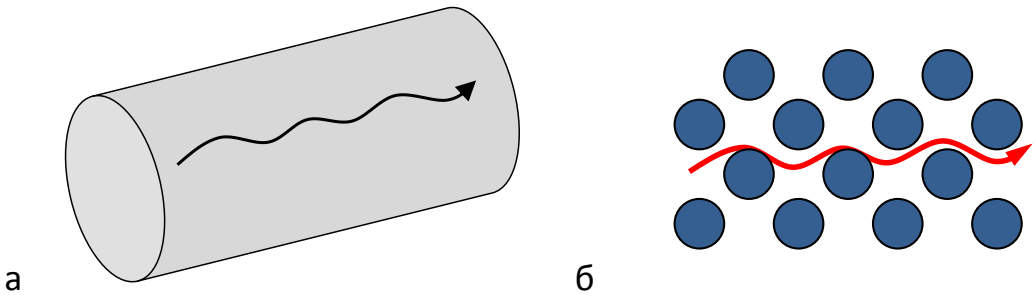


Рис.2.4. Траектории движения частиц при «ламинарном» режиме

При этом такая волнистость обусловлена дискретностью среды: частица, двигаясь вдоль канала и опережая соседей, отклоняется влево или вправо из-за неоднородности решетки (см. рис.2.4б).

При уменьшении разбиения и стремлении сглаживающего радиуса h частицы к нулю, амплитуда колебаний траектории также стремиться к нулю как первая степень радиуса h сглаживания.

Таким образом, при моделировании течений методом сглаженных частиц нужно брать в расчет не только их естественную турбулентность, но и «дискретную турбулентность», которая является погрешностью выбранного численного метода.

Если мы моделируем среду в виде совокупности отдельных частиц, локализованных в точке или размазанных по некоторому конечному радиусу и имеющих потенциалы со сферической симметрией, это, в конечном счете, все равно равносильно совокупности твердых шариков. При этом невозможно замостить все пространство сферами так, чтобы эти сферы при этом не пересекались. Поэтому у любой среды, моделируемой дискретно, есть пористость, а пористость приводит к нарушению изотропии, что может проявляться по-разному, в частности, если речь идет о методе сглаженных частиц, анизотропия проявится в виде «дискретной» турбулентности.

2.1.2. Турбулентный случай

Наибольший интерес для нас представляет не ламинарный режим течения, который на практике встречается редко, а режим развитой

турбулентности. Для моделирования турбулентного течения скорость на входе в канал полагалась равной $w = 4$ м/сек. В этом случае число Рейнольдса равно

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{1.25 \cdot 4 \cdot 0.01}{0.00001} = 5000 \qquad (2.10)$$

что говорит о режиме развитой турбулентности.

На рис.2.5 приведены профили обезразмеренной скорости $\widetilde{w} = w/w_{in}$, полученные в результате численного моделирования на той же геометрии канала, что и в предыдущем параграфе.

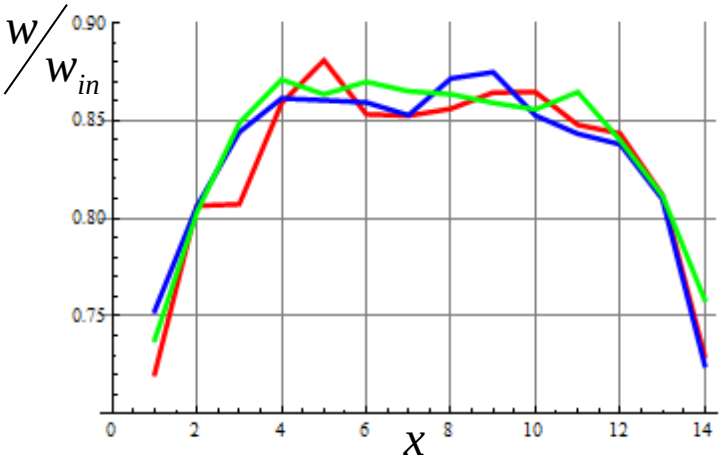


Рис.2.5. Профиль скоростей

Как видим, профиль течения отличен от параболического и является более равномерным в центральной области трубы, что хорошо согласуется с теоретическими представлениями о турбулентном течении.

Для ламинарного течения связь между перепадом давления и количеством протекающей жидкости (расход) определяется чисто теоретически по формуле (2.8), и при этом получается хорошее совпадение с опытом [8]. Для турбулентного течения такую связь можно установить только на основе измерений, так как чисто теоретический расчет турбулентных течений в настоящее время пока еще невозможен. Связь между перепадом давления и расходом устанавливается законом сопротивления для движения в трубе. В литературе известно большое число формул, определяющих сопротивление в трубе [1], причем более старые из

них выведены без учета закона подобия Рейнольдса и зависят от выбора единиц. В настоящее время [5] таким формулам придают безразмерный вид, для чего вводят безразмерный коэффициент сопротивления λ, определяемый соотношением

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\lambda}{d}\frac{\rho V^2}{2}, \tag{2.11}$$

где L – длина канала, d– диаметр канала, ρ – плотность среды, –характерная скорость среды по каналу.

В 1911 г. Г. Блаузиус [8] впервые критически рассмотрел накопившийся к тому времени обширный экспериментальный материал и обработал его с учетом закона подобия Рейнольдса. Для коэффициента сопротивления в гладких трубах с круглым поперечным сечением он получил следующую эмпирическую формулу

$$\lambda = 0.3146(\rho V d/\mu)^{-\frac{1}{4}}, \tag{2.12}$$

называемую в настоящее время законом сопротивления Блаузиуса.

Кривые, описываемые формулами (2.8) и (2.12) приведены на рис.2.6.

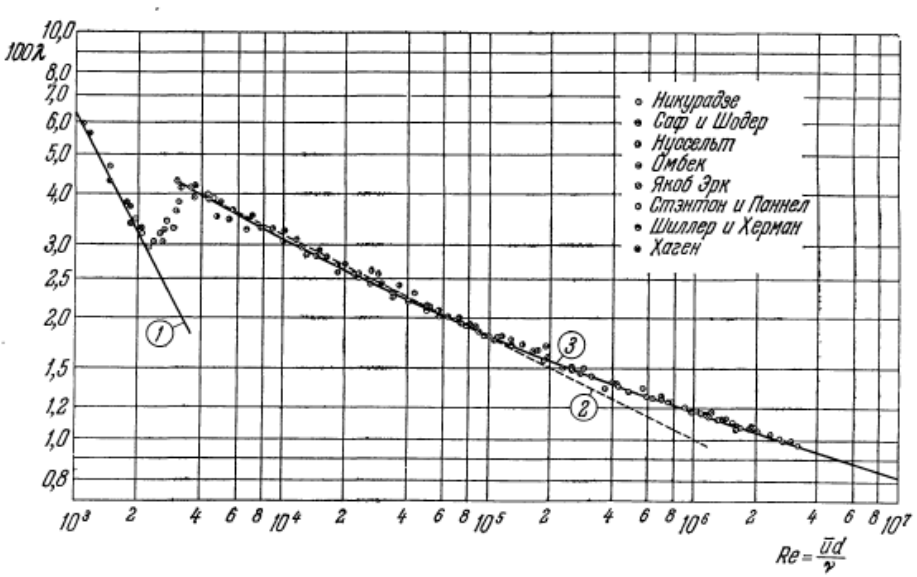


Рис.2.6. Закон сопротивления для течения в гладкой трубе. Кривая (I) — при ламинарном течении по Гагену — Пуазейлю. Кривая (2) — при турбулентном течении, формула (2.12) по Блазиусу. Кривая (3) — при турбулентном течении, формула (2.13) по Прандтлю [8]

Помимо кривой для коэффициента сопротивления для ламинарного течения и турбулентного сопротивления по Блаузиусу, приведена также кривая универсального закона сопротивления Прандтля для гладких труб

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.01g\left(\frac{\rho V d}{\mu}\sqrt{\lambda}\right) - 0.8 \qquad (2.12)$$

Он проверен опытами И. Никурадзе [8] вплоть до числа Рейнольдса $3{,}4 \cdot 10^6$ и дает прекрасное совпадение с измерениями.

На рис. 2.7. приведена зависимость перепада давления ΔPна участке канала в зависимости от скорости V, вычисленная путем моделирования течения в канале в рамках метода сглаженных частиц.

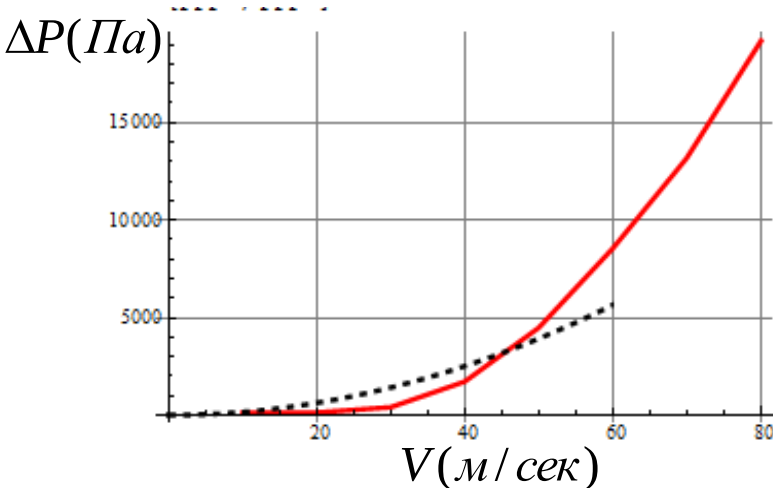


Рис.2.7. Зависимость перепада давлений ΔP от скорости V в канале. Красная кривая – численный расчет с помощью метода сглаженных частиц, черная штрихованная кривая – закон (2.11) с коэффициентом сопротивления по Блаузиусу

В приложении 2 описана методика расчета перепада давления в цилиндрическом канале, использованная для построения зависимости на рис.2.7.

Как видим, для SPHимеет место параболическая зависимость $\Delta P \sim V^2$, однако она серьезно отклоняется от теоретической зависимости (2.11). Это в первую очередь обусловлено тем, что сам параболический закон потери давления (2.11) справедлив лишь для определенного интервала чисел Рейнольдса[7] и, соответственно, приблизительно до скорости $\mathrm{V} = 6$ м/сек.

Также это может быть связано с краевыми эффектами на входе в канал (особенности генерации частиц на входе), с недостаточно малой величиной сглаживающего радиуса или с недостаточно большой выборкой частиц, по которым производится усреднение и вычисления перепада давлений.

2.2. Задача об обтекании шара

Теперь перейдем ко второму, более интересному примеру – задаче о стационарном обтекании неподвижной шара вязкой жидкостью (или газом). Существует множество режимов обтекания шара. Первый и наиболее простой режим обтекания – это ламинарный режим. Для него существует аналитическое решение, получаемое из линеаризованных уравнений Навье-Стокса – так называемый закон Стокса. Сначала мы остановимся на моделировании ламинарного обтекания сферы с помощью метода сглаженных частиц, после чего рассмотрим турбулентный случай.

2.2.1. Ламинарный случай

В задаче Стокса рассматривается такое обтекание, при котором основное значение придается силам трения и давлений, а инерционные члены откидываются. Поток имеет на бесконечности скорость U_∞, постоянную по численному значению и направлению (направление скорости совпадает с осью Ox).Радиус сферы равен $a = 10$см.

Введем сферическую систему координат следующим образом (см. рис.2.8).

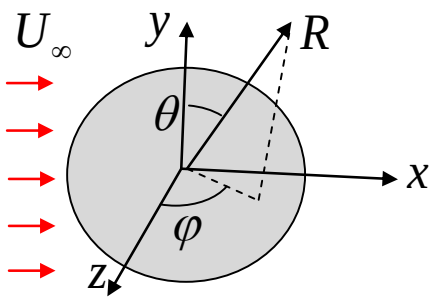


Рис.2.8. Обтекание сферы

Не углубляясь в математические выкладки, приведем решение линеаризованных уравнений Навье-Стокса. Составляющие скорости возмущения шаром безграничной вязкой жидкости [3]

$$V_R = U_\infty \left[1 - \frac{3}{2}\frac{a}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right] cos\theta \tag{2.13}$$

$$V_\theta = -U_\infty \left[1 - \frac{3}{2}\frac{a}{R} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{R}\right)^3\right] sin\theta \tag{2.14}$$

$$V_\varphi = 0 \tag{2.15}$$

Распределение давления

$$p = -\frac{3}{2}\mu a \frac{cos\theta}{R^2} + p_\infty \tag{2.16}$$

где p_∞ - давление на бесконечности, а μ – динамическая вязкость.

Касательная составляющая напряжения трения на поверхности шара $\tau_{R\theta}$ будет равна

$$\tau_{R\theta} = -\frac{3}{2}\mu \frac{sin\theta}{a} \tag{2.17}$$

Проекция на направление скорости набегающего потока силы сопротивления движению тела в вязкой жидкости, приложенной к телу со стороны жидкости, равна

$$W = \int (-\tau_{R\theta} sin\theta - pcos\theta) d\theta = 6\pi\mu a U_\infty \tag{2.18}$$

Это выражение силы сопротивления называют формулой Стокса. Полученное решение пригодно лишь при очень малых значениях числа Рейнольдса. Отметим, что одна треть этого сопротивления возникает вследствие разностей давления, а две трети — вследствие сил трения.

Необходимо также отметить, что при ламинарном обтекании сферы сопротивление пропорционально первой степени скорости.

Переходя в формуле (2.18) от силы сопротивления к коэффициенту сопротивления c_D, будем иметь

$$c_D = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \pi a^2} = \frac{24}{Re} \tag{2.19}$$

Более точные теории Озеена и Озеена-Голдстейна дают для коэффициента сопротивления вместо (2.19) разложение в ряд по степеням числа Re, принимаемого малым,

$$c_D = \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16}Re - \frac{19}{1280}Re^3 + \cdots\right) \tag{2.20}$$

На рис.2.9 приведены теоретические зависимости коэффициента сопротивления c_D от числа Рейнольдса (2.19) и (2.20), а также результат численного моделирования методом сглаженных частиц.

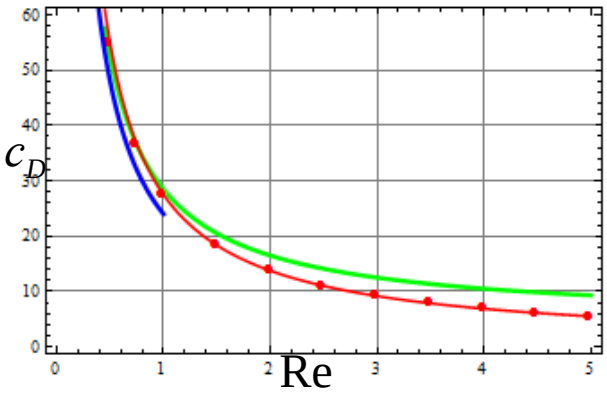


Рис.2.9. Зависимость коэффициента сопротивления c_Dот числа Рейнольдса.Синяя кривая – формула Стокса, зеленая кривая – формула Озеена, красная кривая – результат численного моделирования методом сглаженных частиц.

Коэффициент сопротивления рассчитывался по формуле

$$c_D = \frac{F_{phase}}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \pi a^2} \tag{2.21}$$

где F_{phase} – сила взаимодействия между жидкой и твердой фазами или, что то же самое, сила аэродинамического сопротивления, действующая на

твердую частицу со стороны жидкости. Расчет проводился для нескольких значений скоростей $U_\infty = 0.01\frac{\text{мм}}{\text{сек}}, 0.02\frac{\text{мм}}{\text{сек}}, 0.05\frac{\text{мм}}{\text{сек}}, \text{и } 0.1\frac{\text{мм}}{\text{сек}}$, которые соответствуют ламинарному режиму с числами Рейнольдса $Re = 1, 2, 5$ и 10 соответственно. По данным четырем точкам была построена аппроксимационная кривая, которая и представлена на рис.2.9. Нетрудно видеть, что в ламинарном случае имеет место отличное количественное и качественное соответствие результатов численного эксперимента и теории.

Мы забыли сделать одно важное замечание по поводу специфики расчета обтекания шара с помощью метода сглаженных частиц. В задаче Стокса подразумевается, что жидкая среда заполняет собой всё пространство, окружающее шар. Понятно, что на практике мы не можем этого обеспечить, а потому приходится как-то ограничивать расчетную область. В качестве такого ограничителя был выбран параллелепипед (см. рис.2.10), имеющий ширину и высоту$\gg a$ (a – радиус шара) и некоторую длину L, величина которой не очень принципиальна в ламинарном случае, т.к. позади шара отсутствует турбулентный след.

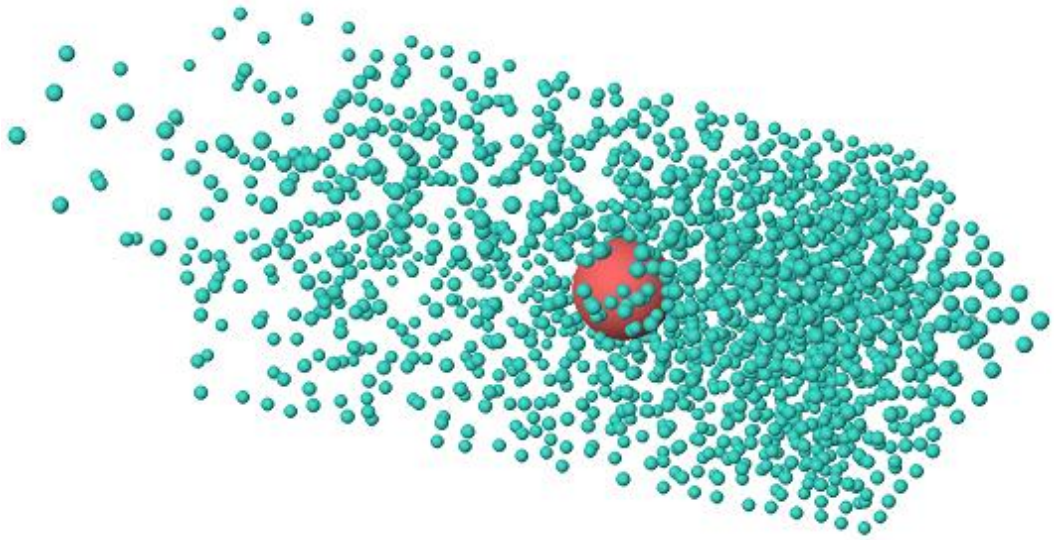


Рис.2.10. Задача об обтекании сферы. Расчетная 3D область

2.2.2. Турбулентный случай

Наконец, перейдем к наиболее интересному для нас случаю – обтеканию шара вязкой жидкостью в случае турбулентного режима.

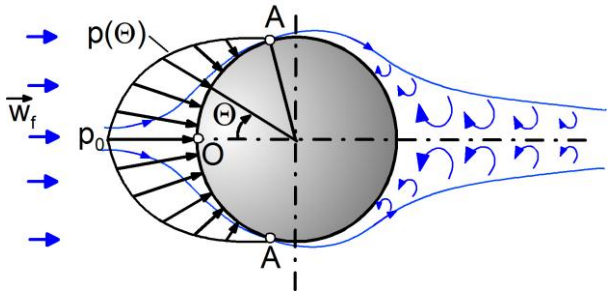


Рис.2.11. Турбулентное обтекание шара

В этом случае на поверхности шара происходит отрыв пограничного слоя и позади образуются вихри (см. рис.2.11), которые могут иметь упорядоченную структуру (дорожка Кармана) или хаотичную (развитая турбулентность).

Основная характеристика обтекаемости шара – коэффициент сопротивления c_D, который определяется по формуле (2.21). В случае развитой турбулентности он имеет примерно постоянное значение $c_D \approx 0.44$.

На рис.2.12 представлена зависимость силы аэродинамического сопротивления F, действующей на сферу, от величины скорости на бесконечности.

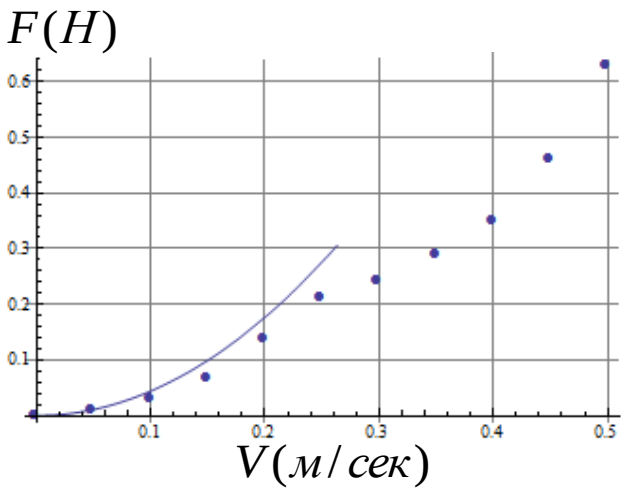


Рис.2.12. Зависимость силы сопротивления F от скорости потока «на бесконечности». Точками отмечены результаты численного эксперимента с

помощью метода сглаженных частиц. Синяя кривая – теоретическая кривая, рассчитанная для $c_D = 0.44$.

Как видим, результаты численного моделирования хорошо согласуются с ранее известными результатами только для скоростей $V < 0.2$ м/сек или, в терминах чисел Рейнольдса, при $Re < 2 \cdot 10^4$. Далее, для больших чисел Рейнольдса, проведенный численный эксперимент с помощью метода сглаженных частиц дает существенно заниженные значения для силы сопротивления.

Вероятнее всего это связано с ограниченностью квадратичного закона Ньютона

$$F = c_D \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \pi a^2 \sim U_\infty^2, \;\; c_D = 0.44 = const \tag{2.22}$$

который справедлив для $Re < 10^5$. При $Re > 10^5$ имеет место режим развитой турбулентности и коэффициент сопротивления рассчитывается по формуле

$$c_D = 0.19 - \left(\frac{8 \cdot 10^4}{Re} \right) \tag{2.23}$$

В этом случае коэффициент сопротивления c_D получается заниженными $c_D < 0.3$.

Также несовпадение результатов расчета с теорией при $V > 0.2$ м/сек может объясняться образованием пустот, незаполненных жидкими частицами, в областях с относительно более низким давлением.

3. Моделирование кипящего слоя

3.1. Понятие кипящего слоя

Кипящий слой создаётся в тех случаях, когда некоторое количество твёрдых частичек находится под воздействием восходящего потока газа – обычно воздуха, жидкости или их смеси (см. рис.3.1). Твёрдые частички оказываются в зависающем состоянии, как только скорость V восходящих потоков газа начинает превышать некоторое предельное значение скорости $V_{кс}$ (минимальная скорость флюидизации) [17].Принцип разделения частиц в кипящем слое основан на использовании процесса псевдоожижения.

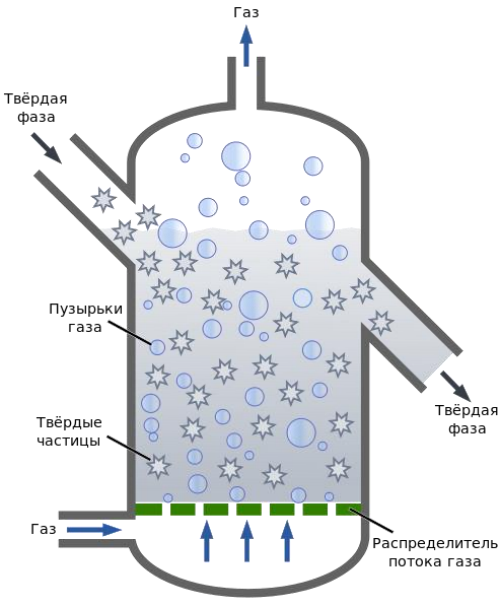


Рис.3.1. Схема аппарата с кипящим слоем

Кипящий слой представляет собой смесь жидкой и твёрдой фаз, которая имеет свойства, подобные свойствам жидкости. В частности, верхняя поверхность кипящего слоя является относительно горизонтальной, что аналогично поведению жидкостей, находящихся в покое. Кипящий слой можно рассматривать как неоднородную смесь газообразной и твёрдой фаз, которая может быть представлена как единая масса с единой плотностью. Частицы с более высокой плотностью, чем единая плотность кипящего слоя будут опускаться вниз, а частицы, имеющие плотность меньшую единой

плотности кипящего слоя, будут подниматься. То есть, кипящий слой можно рассматривать как жидкость, подчиняющуюся закону Архимеда[17].

Конструкция с кипящим слоем была впервые использована в промышленности в 1922 году для газификации мелкозернистого угля [24]. С тех пор, аппараты с кипящим слоем были применены во многих промышленно важных процессах. В настоящее время спектр применения кипящего слоя простирается на множество технических процессов, таких как охлаждение/нагрев, сушка, сублимация / десублимация, адсорбции / десорбции. Особенно эффективно использовать аппараты с кипящим слоем в качестве отяжеленной среды при окислительных/восстановительных обжигах (сульфидных руд), а также в процессах, где требуется обеспечение интенсивного тепло-массообмена (печь кипящего слоя) [17].

В кипящем слое твердые частицы находятся в подвешенном состоянии под воздействием восходящей струи газа (или жидкости).Падение давления($p_2 - p_1$)газа при прохождении через кипящий слой равно суммарной массе твердых частиц на единицу поперечного сечения A_tкипящегослоя, т.е.

$$\Delta p_{\text{кс}} = p_1 - p_2 = \frac{m_s g}{A_t} + \frac{m_f g}{A_t} = \\ = H(1-\varepsilon)\rho_s g + H\varepsilon\rho_f g \tag{3.1}$$

гдеm_sи m_f–суммарная масса твердых частиц и газа внутри кипящего слоя, g – ускорение свободного падения, ε – пористость кипящего слоя – отношение объёма, занимаемого порами (объем в промежутках между зернами), к суммарному объёму кипящего слоя,H – высота кипящего слоя.

В рассматриваемом газовом кипящем слое сила аэродинамического сопротивления, действующая на твердую частицу, не является достаточной, чтобы компенсировать её вес, то есть

$$\Delta p_{solids} A_t < W - B \tag{3.2}$$

Здесь W – сила веса в поле сил тяжести, B – сила аэродинамического сопротивления.

С увеличением скорости течения газа перепад давления Δp увеличивается до определенной величины $\Delta p_{\text{кс}}$ – перепада давления вследствие только веса твердых частиц (3.2). При дальнейшем увеличении скорости течения газа перепад давления остается постоянным. Таким образом, минимальная точка флюидизации (минимальная скорость флюидизации) кипящего слоя, которая является границей состояния кипящего слоя, может быть определена путем измерения перепада давления Δp при прохождении газа через кипящий слой в зависимости от объема и скорости потока V(см. рис. 3.2).

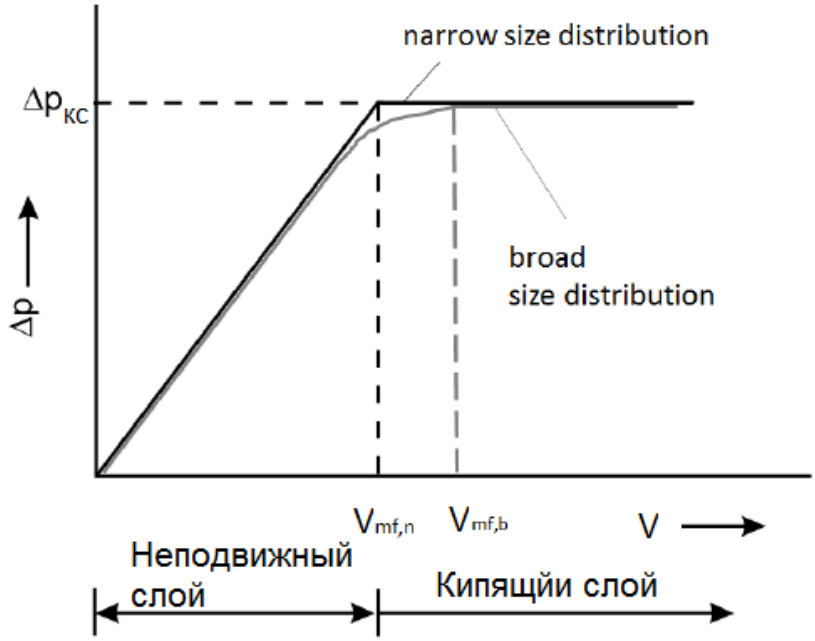


Рис.3.2. Перепад давления в кипящем слое

Четкое разделение зоны флюидизации и зоны с линейной зависимостью перепада давления $\Delta p(V)$ и точное определение минимальной скорости флюидизация возможно только для частиц очень малого размера. Как правило, на практике возникает необходимость моделировать динамику достаточно крупных частиц в кипящем слое – в этом случае граница между зоной кипящего слоя и зоной линейного перепада давления размывается. При этом минимальная скорость флюидизации определяется путём экстраполяции кривых в зоне кипящего слоя и в зоне с линейной зависимостью перепада давления $\Delta p(V)$ до точки их пересечения.

Существует приближенная аналитическая формула для расчета потери давления при прохождении газа через кипящий слой (формула Эргуна)

$$\frac{\Delta p}{H} = 150\frac{1}{d_s^2}\frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}\mu V + 1.75\frac{1}{d_s}\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\rho_f V^2 \qquad (3.3)$$

гдеH – высота кипящего слоя, d_s – диаметр твердых частиц, ρ_f–плотность несущей фазы (газа или жидкости), μ – динамическая вязкость, V–скорость газа на входе в аппарат, ε – пористость.

Как видим, в (3.3) справа присутствует два слагаемых – линейное по скорости V и квадратичное. Квадратичное слагаемое начинает играть роль при относительно малых пористостях, в то время как при пористостях $\varepsilon > 0.8$ основной вклад в перепад давления вносит линейное слагаемое. Заметим также, что перепад давлений зависит пористости в гораздо меньше степени, чем от скорости. При малых скоростях ($\mathrm{Re} < 1$)доминирует первое слагаемое, но при дальнейшем увеличении скорости второе слагаемое

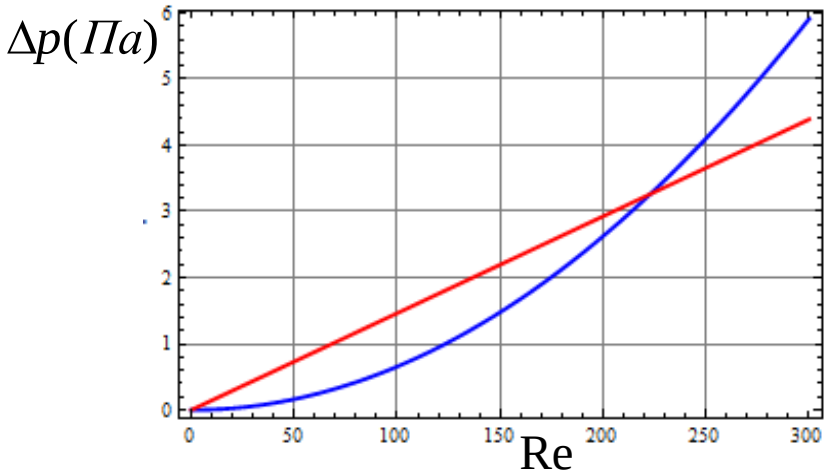


Рис.3.3. Зависимость перепада давлений Δp от числа Рейнольдса Re_{in}на входе в канал: ламинарная компонента Δp_{lam} и турбулентная Δp_{turb}

3.2. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерную область в форме параллелепипеда. Размером $20\ \text{см} \times 20\text{см} \times 50\text{см}$ (см. рис.3.4).

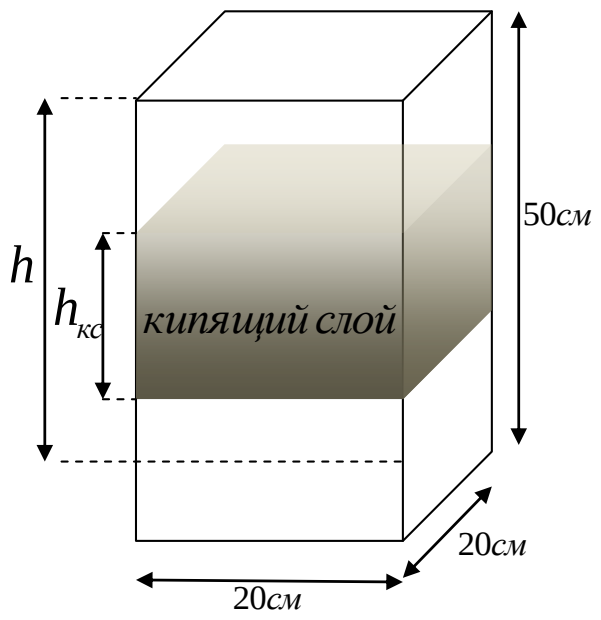


Рис.3.4. Геометрия области

В начальный момент времени задаём правильную упаковку твердых частиц ($d_S = 1$см). Причем задаём её только в подобласти параллелепипеда размером $20\text{см} \times 20\text{см} \times h_{\text{кс}}$, где $h_{\text{кс}}$ – высота кипящего слоя ($h_{\text{кс}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6$см). Упаковка имеет пористость $\varepsilon_{\text{кс}} \approx 0.5$. Пористость $\varepsilon_{\text{кс}}$ начальной упаковки частиц рассчитывалась как отношение объёма$V_{\text{пор}}$, не занимаемой твердой фазой в тетраэдре (см. рис.3.4) – объёма пор – к объему самого тетраэдра $V_{\text{тетр}} = \frac{\sqrt{2}}{12}(2R)^3$.

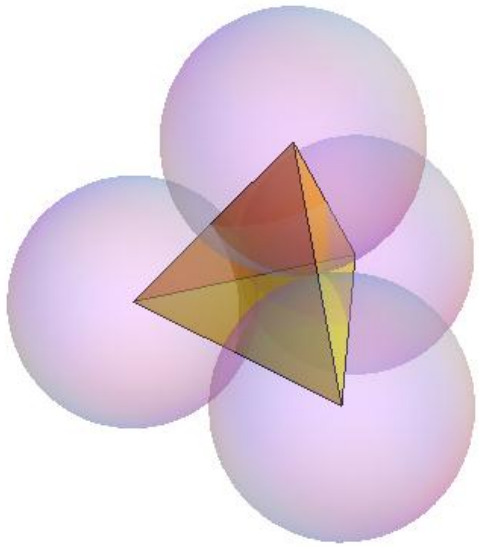


Рис.3.5. К расчету пористости ГЦК-упаковки твердых частиц

Однако это еще не та пористость, которая нам нужна. Дело в том, что объём, занимаемый частицами в начальный момент времени не совпадает с объёмом, в котором частицы могут свободно перемещаться в процессе счёта. Последний объём характеризуется высотой $h = 13$см (см. рис.3.4).

$$\varepsilon = 1 - \frac{(1 - \varepsilon_{\text{кс}})h_{\text{к}}}{h} \approx 1 - 0.5\frac{5.2}{13} = 0.8 \qquad (3.4)$$

– «глобальная» пористость, которую мы будем использовать далее.

Начальная упаковка частиц, по которой производился расчет пористости, в рассматриваемом кипящем слое имеет вид

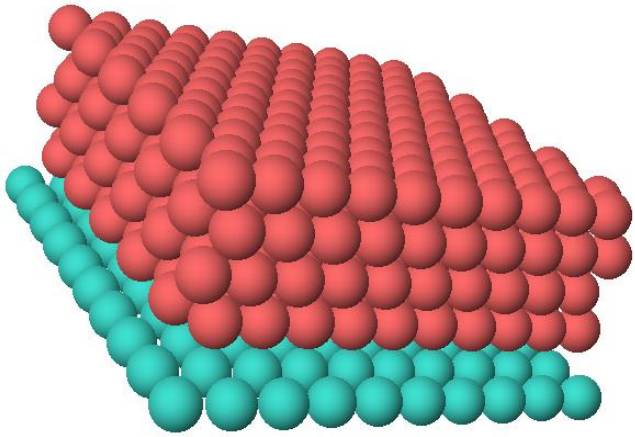


Рис.3.6. Начальная упаковка частиц (красные частицы – твердые гранулы, слой синих частиц – слой сглаженных частиц газообразной фазы, приведенный для сравнения)

Численные параметры, которые использовались в дальнейшем при моделировании кипящего слоя, приведены в табл.3.1.

Табл.3.1.

Плотность воздуха	$\rho_f = 1.25\ kg/m^3$
Плотность твердых частиц	$\rho_s = 1000\ kg/m^3$
Вязкость воздуха	$\mu = 10^{-5} Pa \cdot sec$
Диаметр твердых частиц	$d = 0.01\ m$
Пористость твердой фазы	$\varepsilon_{\text{кс}} = 0.9$
Высота кипящего слоя	$h_{\text{кс}} = 0.13\ m$

Площадь поперечного сечения канала	$S = 0.01\ m^2$
Максимальное число частиц	$\mathrm{N} = 15000$
Шаг по времени,	$dt = 0.25T_{\text{колеб}} = 0.5\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$ сек
Модуль объемного сжатия для воздуха (который ты использовал!)	$\mathrm{C} = \rho_0 c^2 \approx 100000$ Па

3.3. Численное моделирование

Представляет интерес численный расчёт зависимости$\Delta p(V)$, которая является одной из основных характеристики кипящего слоя. Измерение данной зависимости в переходной области ($V{\sim}V_{\text{кс}}$) имеет ряд сложностей, поэтому, как правило, поступают следующим образом (см. рис.3.7): делают серию численных расчётов для скоростей существенно ниже скорости флюидизации $V_{\text{кс}}$ – в этой зоне имеет место ламинарный режим и кривая $\Delta p(V)$ линейна – и серию численных расчётов в зоне кипящего слоя, когда $V > V_{\text{кс}}$. При этом в переходной области $V{\sim}V_{\text{кс}}$ проводят экстраполяцию кривой $\Delta p(V)$ с помощью уравнения (3.3) Эргуна.

Чтобы корректно экстраполировать кривую $\Delta p(V)$в переходной области и правильно рассчитать точку флюидизации (см. рис.3.7) необходимо уделить особое внимание режиму течения. Линейная экстраполяция возможна только в случае ламинарного течения ($Re < 1$), т.к. для малых чисел Рейнольдса падение давления пропорционально скорости газа ($\Delta P{\sim}V$). Поэтому в уравнении Эргуна (3.3) вторым слагаемым – так называемым турбулентным членом – можно пренебречь. Для $Re > 1$режим течения занимает промежуточное положение между ламинарным и турбулентным случаями. В соответствии с уравнением Эргуна падение давления содержит два слагаемых – пропорциональных V иV^2. Это так называемая "переходная область" имеет место до чисел Рейнольдса $Re = 1000$, после чего мы имеем развитую турбулентность. В этом случае

пренебречь можно уже первым, ламинарным членом в уравнении Эргуна. Падение давления будет теперь пропорционально квадрату скорости газа.

Область перехода от ламинарного течения к турбулентному является единственной трудной областью для экстраполяции измеренного перепада давления.

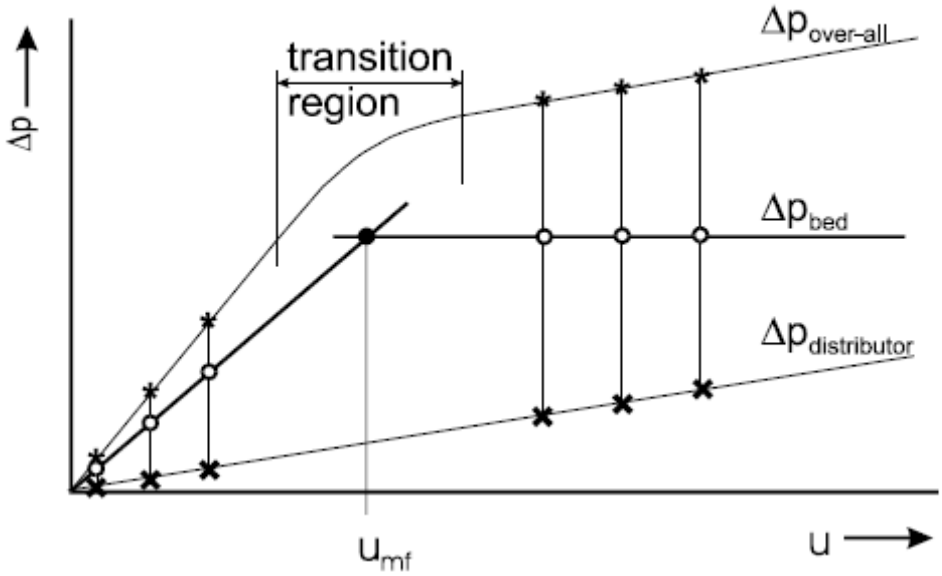


Рис.3.7. Процедура измерения минимальной скорости флюидизации

Перепад давления в кипящем слое вычисляется как разность давлений в двух сечениях аппарата с кипящим слоем – полностью выше слоя и полностью ниже. Полученный таким образом перепад давлений еще не есть искомый перепад, так как в нём также учитывается потеря давления на гидравлических сопротивлениях, а также вследствие действия силы тяжести. Поэтому из полученного перепада давлений Δpследует вычесть перепад давлений $\Delta p_{\text{гидр}}$, который бы был в канале при отсутствии твердой фазы, – перепад давлений гидравлического происхождения.

$$\Delta p_{\text{кс}} = \Delta p_{\text{полн}} - \Delta p_{\text{гидр}}, \qquad (3.5)$$

где $\Delta p_{\text{полн}}$ – полный перепад давлений с учётом твердой фазы и гидравлических факторов.

На рис.3.6. показана процедура измерений перепада давления $\Delta p_{\text{кс}}$ в кипящем слое

Результаты численного расчета перепада давлений в кипящем слое при различных скоростях в интервале $V \in [0,3]$м/с представлены на рис.3.8

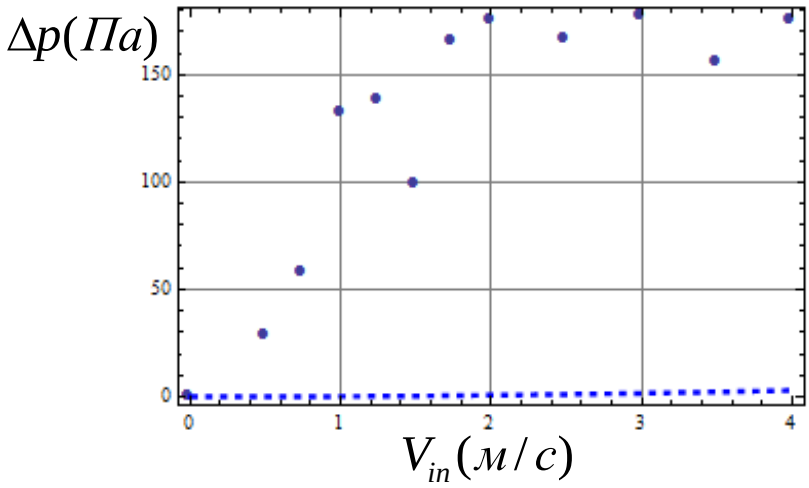


Рис.3.8. Зависимость перепада давлений Δp от скорости V_{in}на входе в канал. Синяя сплошная кривая – аппроксимационная кривая по точкам, полученным в результате численного эксперимента, суммарное падение давления. Синяя штрихованная кривая – падение давления на гидравлических сопротивлениях (формула Блаузиуса)

Как видим из рис.3.8. суммарный перепад давления $\Delta p(V)$создаётся преимущественно силами сопротивления со стороны твердых частиц (доля $> 95\%$). В качестве кривой падения давления на гидравлических сопротивлениях использовалась формула (2.11) с коэффициентом сопротивления λиз закона Блазиуса (2.12). Численный расчет течения воздуха без твердых частиц отдельно в данном случае не производился.

Сравним полученные результаты с теорией. Формула для теоретического расчета перепада давлений Δp в кипящем слое принимает в нашем случае следующий вид

$$\Delta p = 0.13 \cdot 150 \frac{1}{0.01} \frac{(1-0.1)^2}{0.1^3} \cdot 10^{-3} V + 0.42 \cdot 1.75 \frac{1}{0.01} \frac{1-0.1}{0.1} \cdot 1.25 \cdot V^2 \qquad (3.6)$$

На рис.3.9. представлены результаты численного эксперимента (точки) и теоретическая кривая по формуле (3.6).

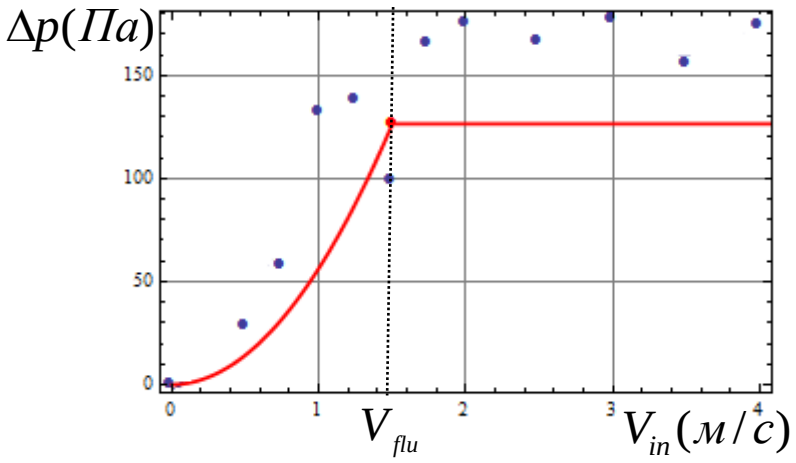


Рис.3.9. Зависимость перепада давлений Δp от скорости V_{in}на входе в канал, V_{flu} – скорость флюидизации. Точками отмечены результаты отдельных численных экспериментов. Синяя кривая – аппроксимационная кривая по точкам эксперимента

Теоретическая кривая строилась до значения минимальной скорости флюидизации V_{fb}. Точка начала флюидизации отмечена на рис.3.8 и рассчитывается по известной формуле

$$w = 42.9 \cdot (1 - \varepsilon_{\text{кс}}) \cdot \frac{\nu}{d_p}\left\{\sqrt{1 + 3.11 \times 10^{-4} \frac{\varepsilon_{\text{кс}}^3}{(1-\varepsilon_{\text{кс}})^2} \frac{\Delta\rho g d_p^3}{\rho_f \nu^2}} - 1\right\}, \quad (3.7)$$

где ν – кинематическая вязкость воздуха, $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$ – разность давлений твердой и газообразной фаз.

Численное значение минимальной скорости флюидизации при параметрах из табл.3.1.

При скоростях Vвыше минимальной скорости флюидизации V_{fb} теоретическая кривая (3.6) продолжается прямой линией.

Перепад давлений, обусловленный весом, может быть рассчитан по формуле

$$\Delta p_{weight} = \rho_f g \frac{\varepsilon_{\text{кс}} V_{\text{кс}}}{S} = 42\text{Па} \sim \Delta p_{sum}, \quad (3.8)$$

где g – ускорение свободного падения, $V_{\text{кс}}$ – объём, занимаемый кипящем слоем в аппарате, S – поперечное сечение аппарата.

Получается, что при скоростях потока $V_{in} > 1$ м/секосновной вклад в падение давления Δpвносят силы аэродинамического сопротивления, а вес частиц становится незначителен. При этом ясно, что если изменить материал частиц, сделав последние более тяжелыми, влияние веса увеличится, однако всё равно, начиная с некоторой скорости V_{aero} падение давления будет происходить преимущественно вследствие аэродинамического сопротивления при обтекании частиц.

Из рис.3.8. видно, что результаты численного расчета получаются существенно завышенными (около 30%). Это связано с особенностями вычисления плотности и давления в методе сглаженных частиц, а также с эффектом «закупорки», свойственном методу сглаженных частиц из-за конечности сглаживающего радиуса. Описанию эффекта «закупорки» посвящен следующий параграф.

3.4. Эффект «закупорки» при моделировании течений методом сглаженных частиц

Во время численного моделирования кипящего слоя был выявлен следующий интересный эффект, вызванный дискретностью природы несущей фазы. При расчете предполагалось, что размер сглаженных частиц (газ) превышает размеры твердых частиц (в $1{,}5 - 2$ раза в зависимости от эксперимента) – брать сглаженные частицы меньшего радиуса невыгодно ввиду серьёзных временных и мощностных затрат на численный эксперимент. В случаях, когда твердые частицы концентрировались в какой-то одной области канала, происходила закупорка течения, так как сглаженных частицы газа из-за своего большого размера не могли проходить через поры между твердыми частицами (см. рис.3.10).

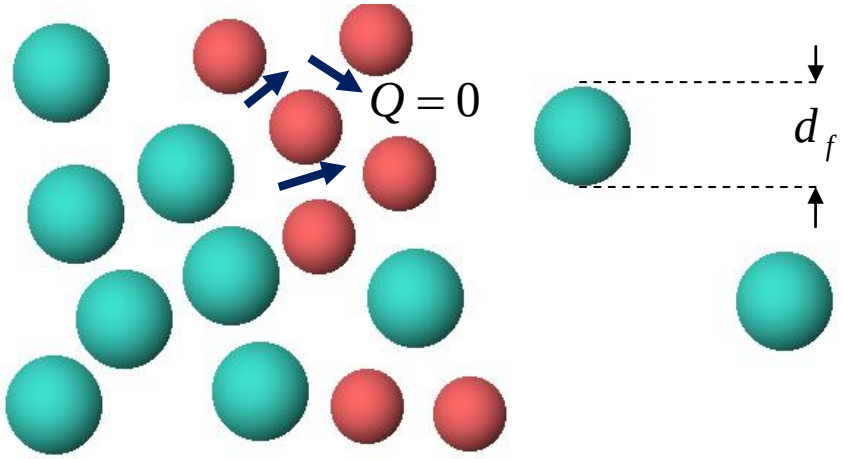


Рис.3.10. Иллюстрация эффекта закупорки

При этом протекание газа через слой твердых частиц становится возможным либо в результате конвективного выноса образования твердых частиц, мешающего течению, либо через достаточно большие поры, образованные в результате прорыва слоя твердых частиц течением.

Указанный эффект закупорки приводил к значительным временным колебаниям Δp перепада давления в кипящем слое, к завышенному значению давления газа в области «до кипящего слоя» (рис.3.10, слева). Данный эффект объясняет завышенное значение Δp, полученное в численном эксперименте (см. рис.3.9). Однако данный эффект не единственный эффект, проистекающий из особенностей метода сглаженных частиц. При моделировании кипящего слоя была замечена еще одна интересная вещь – эффект фрагментации.

3.5. Эффект фрагментации

Пусть –диаметр текущего поперечного сечения рассматриваемого канала, в котором течет газ, а h - сглаживающий радиус частиц газа. Тогда вслучае, когда средняя концентрация сглаженных частиц по сечению меньше величины

$$c_{\text{кр}} = d/h \tag{3.9}$$

не вся область поперечного сечения является заполненной частицами. Присутствуют области пустот, в которых плотность $\rho = 0$. Т.е. течение фрагментируется на отдельные кластеры, между которыми нет никакой материи [20].

Суть эффекта фрагментации можно понять на следующем простом одномерном примере – одномерное нестационарное течение сжимаемого газа в канале постоянного сечения (см. рис.3.11)

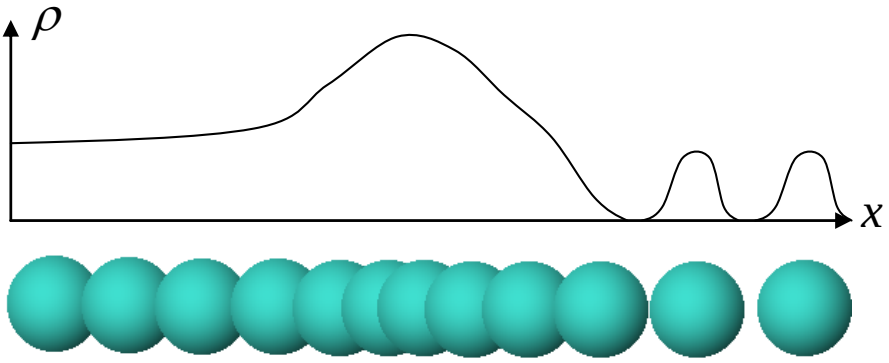


Рис.3.11. Иллюстрация эффекта фрагментации

При расчетах использовалось сглаживающее ядро по Монагану [22]. Также использовались физические свойства воздуха.

В областях, где плотность среды велика и сглаженные частицы накладываются друг на друга результирующее поле плотности ρ

$$\rho(x,t) = \sum_{i=1}^{N} m_i W(x - x_i, h) \tag{3.10}$$

получаетсядостаточно гладким. В том случае, где есть разрежение, поле плотности теряет свою гладкость и приобретает ярко выраженные пики [20]. Амплитуда пиков зависит в первую очередь от выбора ядра Wи является тем меньше, чем более пологий вид имеет функция ядра$W(x_{rel}, h)$.

Физически такое течение можно трактовать, как нарушение сплошности течения и его фрагментацию на отдельные «капли». Такая фрагментация может происходить в областях с пониженным давлением. Чтобы избегать появления таких зон, необходимо течение с достаточно высоким давлением и, следовательно, с достаточно большой плотностью частиц, т.е. проблема

фрагментации легко решается с помощью увеличения сглаженных частиц в расчётной области.

Эффект фрагментации, помимо того, что является нефизичным поведением среды, затрудняет расчёт плотности и давления в областях с низким давлением. Методика, применявшаяся для расчёта плотности и падения давления в задаче о кипящем слое (рис.3.9), не учитывала наличие пустот, поскольку расчёт производился по значениям плотности в центре сглаженных частиц.

4. Экспериментальное моделирование кипящего слоя

4.1. Описание установки

Аппарат с кипящим слоем (рис.4.1) представляет собой прозрачную цилиндрическую трубу кругового профиля, которая расположена в вертикальном положении. Снизу подводится газ (воздух). Также снизу установлен фильтр, который препятствует проникновению частиц. Также снизу и сверху установлены датчики давления (манометры), по которым вычисляется перепад давления в кипящем слое (рис.4.2).

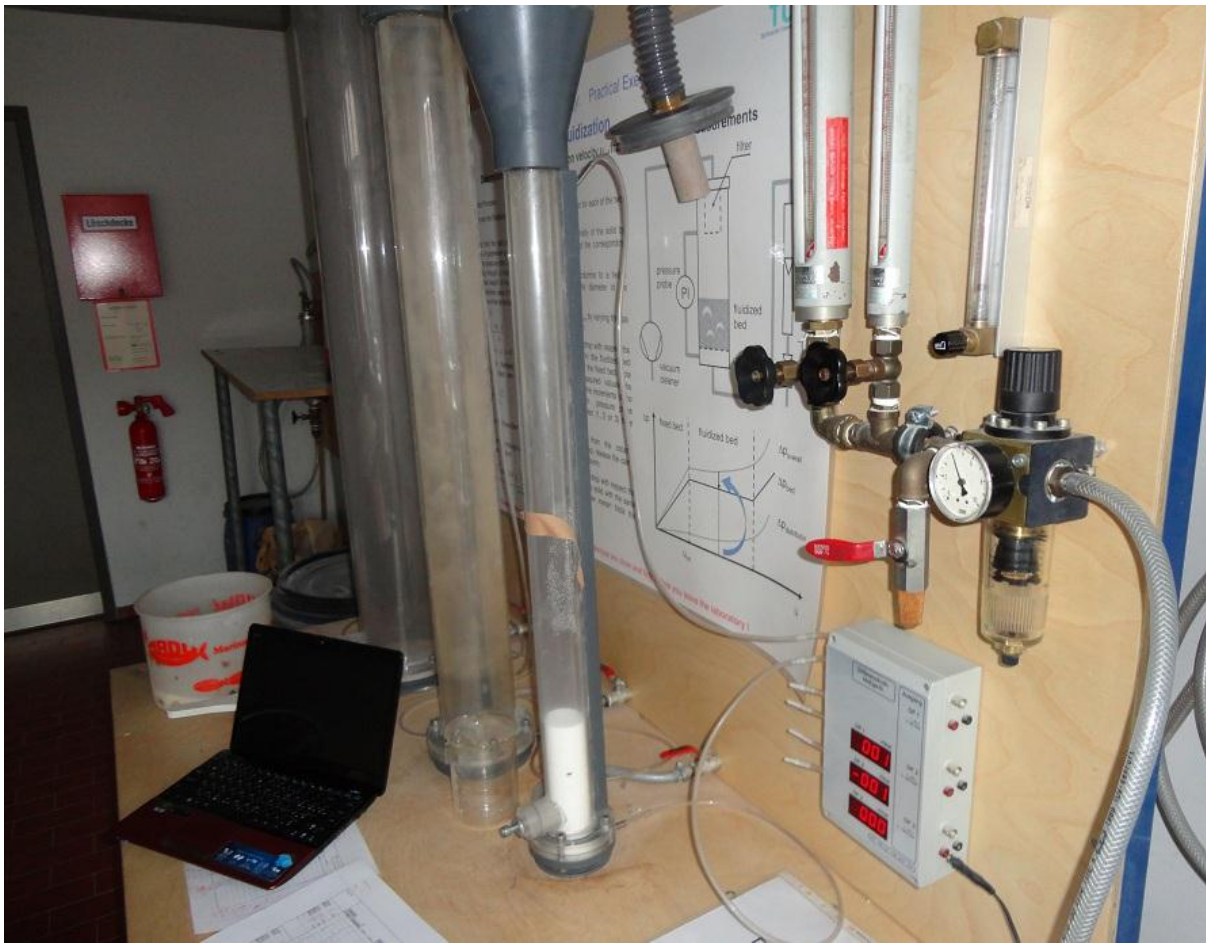


Рис.4.1. Вид установки

Измерять перепад давлений можно с помощью одного из трех манометров. Данные манометры различаются по максимальной величине перепада давления Δp, которое они могут измерить. Первый манометр

измеряет перепады давления не более 69 миллибар, второй – не более 345 миллибар, третий – не более 1064 миллибар (см. рис.4.2).

Рис.4.2. Манометр

Для задания малых потоков газов в лабораторной установке используются «ротаметры» с переменным проходным сечением (см. рис.4.3, рис.4.1). Ротаметр состоит из конической трубки, расходящейся вверх, внутри которой перемещается поплавок-индикатор. Измеряемый поток газа проходит через трубку снизу вверх и поднимает поплавок. Чем выше поплавок, тем больше площадь вокруг него, через которую может течь поток. Поднявшись настолько, что сила тяжести F_G уравновешивает подъёмную силу F_r со стороны потока (см. рис.4.3), поплавок останавливается. Таким образом, каждому положению поплавка соответствует определённый расход — определение этого соответствия называется калибровка.

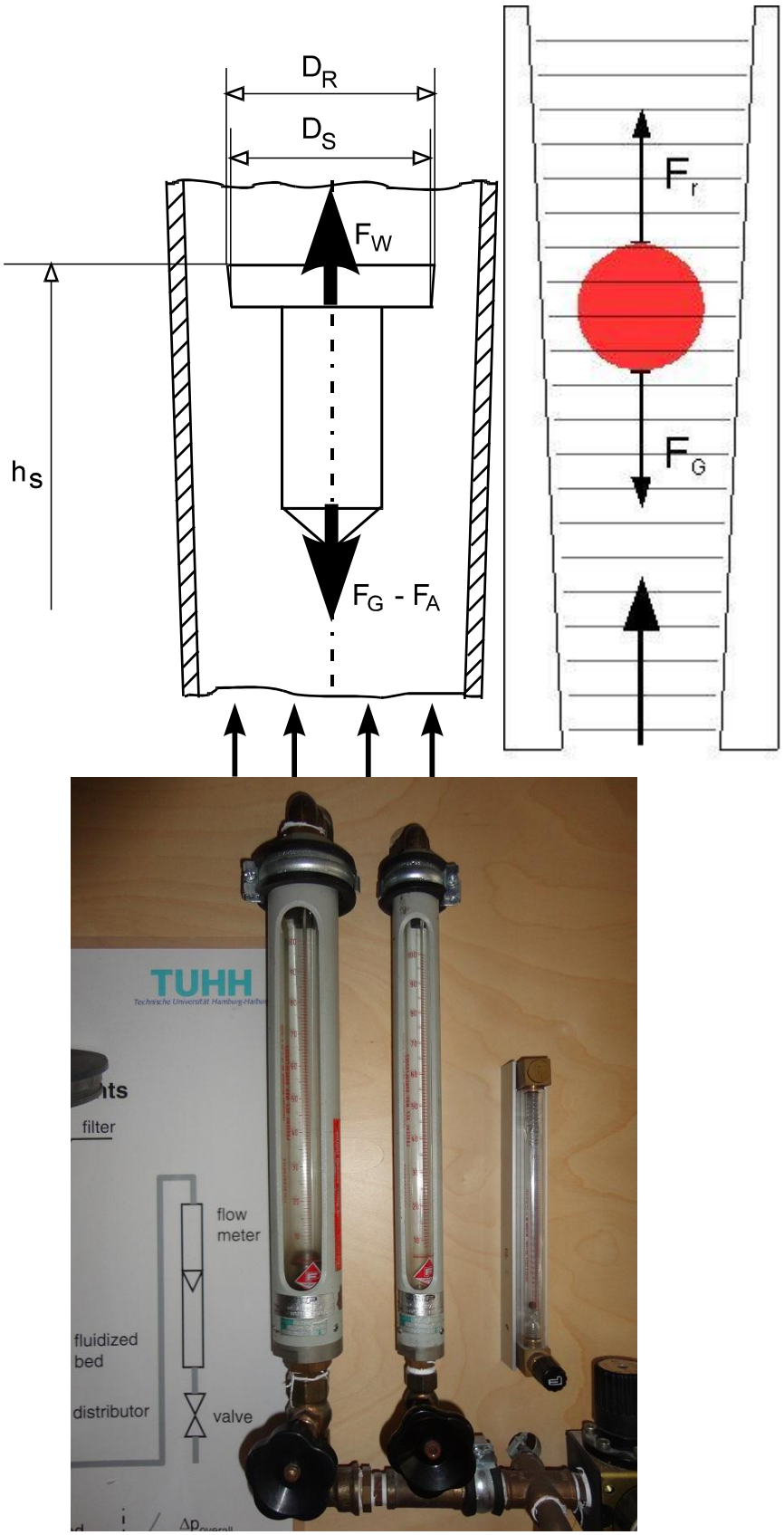


Рис.4.3. Ротаметры

На рис.4.4. приведена упрощённая схема аппарата с кипящим слоем. Воздух, разгоняемый компрессором, предварительно проходит через

ротаметр, после чего поступает в вертикальную трубу кипящего слоя. После прохождения через трубу воздух отводится через вентиляционную систему в атмосферу.

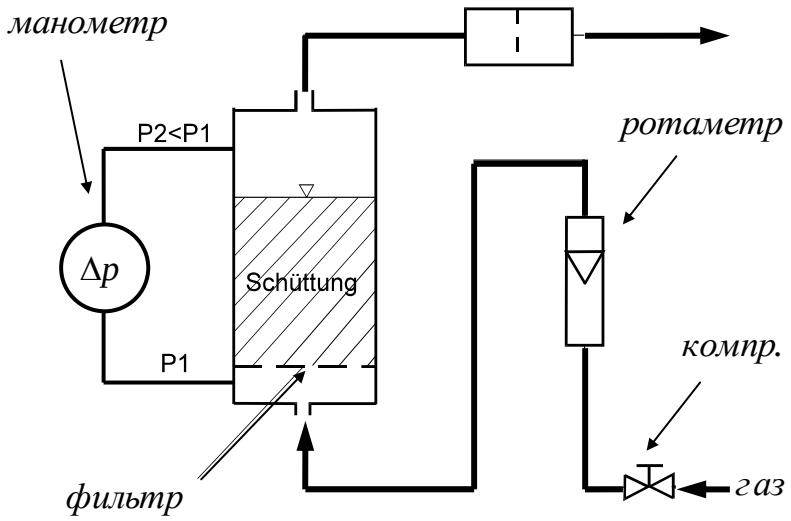


Рис.4.4. Схема установки

4.2. Результаты эксперимента

Эксперимент проводился для следующего набора параметров:

Табл.4.1

Величина	Значение
Диаметр частиц	$d = 1780\ \mu m$
Плотность частиц	$\rho = 1040$ кг/м^3
Плотность упаковки	$\rho_d = 565$ кг/м^3
Пористость кипящего слоя	$\varepsilon = 0.45$
Высота кипящего слоя	$h = 20$ см
Диаметр кипящего слоя	$D = 5$ см

Было произведено несколько расчётов, по которым далее были получены усредненные значения, которые приведены на графиках ниже.

На графике 4.5 приведены экспериментальные кривые суммарного давления в кипящем слое и давления вследствие аэродинамического сопротивления фильтра.

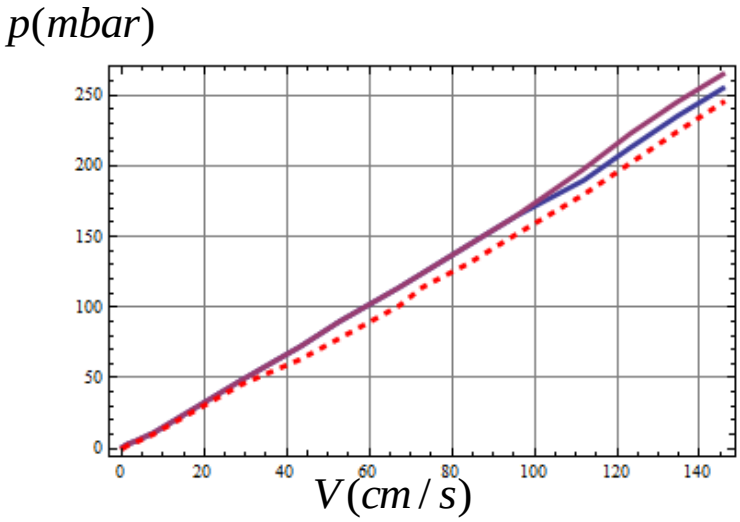


Рис.4.5. Суммарное давление (непрерывные кривые), давление вследствие аэродинамического сопротивления фильтра (штрихованная кривая)

На рис.4.6. приведен график падения давления в кипящем слое, вызванного только наличием твердой фазы. Участки неподвижного слоя и кипящего слоя аппроксимировались линейно.

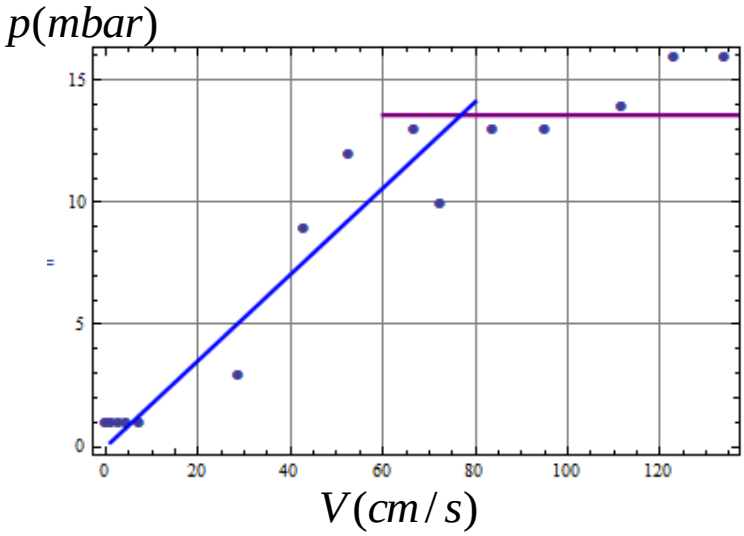


Рис.4.6. Падение давления в кипящем слое

Исходя из результатов расчёта ясно, что минимальная скорость флюидизации равна приблизительно $V_{mf} = 76\ cm/s$. Значение минимальной скорости по теоретической формуле Эргуна равно (см. (3.7))

$$w = 42.9 \cdot (1 - \varepsilon_{кс}) \cdot \frac{\nu}{d_p}\left\{\sqrt{1 + 3.11 \times 10^{-4} \frac{\varepsilon_{кс}^3}{(1-\varepsilon_{кс})^2} \frac{\Delta\rho g d_p^3}{\rho_f \nu^2}} - 1\right\} =$$

$$= 42.9 \cdot (1 - 0.45) \cdot \frac{1.46 \cdot 10^{-5}}{0.0018} \cdot \tag{4.1}$$

$$\left\{\sqrt{1 + 3.11 \times 10^{-4} \frac{0.45^3}{(1-0.45)^2} \frac{(1040 - 1.25) \cdot 9.81 \cdot 0.05^3}{1.25(1.46 \cdot 10^{-5})^2}} - 1\right\}$$

$$= 0.74\ m/s = 74\ cm/s$$

Как видим, рассогласование результатов менее 5%, что говорит о корректности проведенных экспериментов.

Представляет интерес сравнение результатов натурного эксперимента с результатами численного на аналогичных конструктивных параметрах (см. табл.4.1)

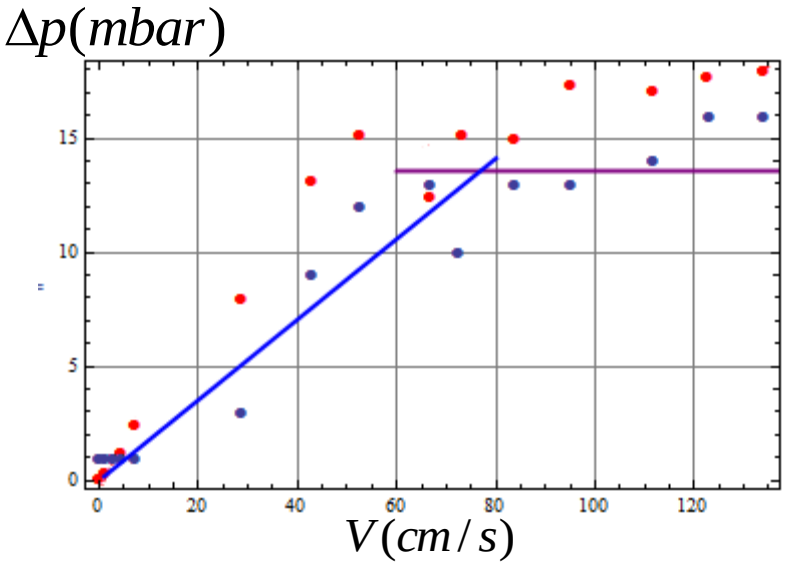


Рис.4.7. Падение давления в кипящем слое. Красный цвет – результаты численного эксперимента (отдельные расчеты показаны точками) посредством каплинга SPH&DEM, сине-фиолетовая кривая – интерполяция результатов лабораторного эксперимента

Как и в рассмотренном ранее примере (см. рис.3.9.) видим, что результаты численного эксперимента получаются несколько завышенными по абсолютному значению перепада давления (~20%).

При этом значение скорости начала флюидизации в численном эксперименте получается достаточно близким к значению из лабораторного эксперимента.

Причины рассогласований, как и ранее, заключается в нескольких дискретных особенностях метода сглаженных частиц и, возможно, в особенностях расчета давления в поперечном сечении канала в аппарате с кипящим слоем. Также следует отметить, что число твердых частиц в расчетной области численного эксперимента гораздо меньше числа частиц в лабораторном эксперименте. Это следует понимать так, что частица в численном эксперименте представляет собой кластер из реальных твердых частиц в кипящем слое.

Уменьшение радиуса сглаживания позволило бы решить данную проблему, однако в этом случае существенно увеличивается суммарное количество частиц в расчетной области и, как следствие, сильно возрастает расчетное время.

ЧАСТЬ 2

ДИСКРЕТНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРУШЕНИЯ ГРУНТА В КАРСТОВУЮ ПОЛОСТЬ

5. Теоретические аспекты дискретно-элементного моделирование деформации горного массива

5.1. Постановка задачи

Строительство гражданских и промышленных объектов на закарстованных территориях сопряжено с опасностью их разрушения под воздействием карстовых процессов. На этих территориях строительными нормами и правилами [9,10] предусматривается проектирование сооружений с учетом возможности реализации карстовых деформаций. Однако, данные нормативные документы не располагают строгими критериями оценки опасности воздействия карстовых процессов на здания и сооружения. В них ограничиваются вероятностно-статистическими подходами, предусматривающими районирование территории по интенсивности карстовых явлений [9,11].

В работе [11] предложена методическая схема количественной оценки опасности воздействия карста на наземные объекты, базирующаяся на математическом моделировании изменения напряженно-деформированного состояния приповерхностной части геологического разреза вследствие развития карстовых процессов. Параметрическим обеспечением геомеханических расчетов служила локализация карстовых полостей методами площадной сейсморазведки и определение по данным их интерпретации формы карстогенной нарушенности. Опасность воздействия карста на здания и сооружения основывалась на определении соотношения максимальных, в пределах зданий, расчетных горизонтальных деформаций (сжатия и растяжения) земной поверхности к соответствующим допустимым и предельным значениям.

Используя изложенные выше принципы, в работе [13] проведено районированиезакарстованных территорий по степени карстоопасности. Районирование проводилось на основе оценки максимального возможного воздействия карста на поверхностные объекты. Предполагалось, что оно имеет место при достижении карстовыми полостями наибольших возможных размеров, которые, в конечном счете, определяются геологическими условиями

залегания карстующихся пород. Разработанные методические схемы описывали единственный механизм образования провалов на земной поверхности – полное обрушение вышележащих пород в карстовую полость. Характерные размеры провалов в плане в этом случае оценивались в десятки метров. Безусловно, такие провалы имеют место, однако, большинство провальныхявлений на территории Пермского края определяются размерами в первые метры. В связи с этим несоответствием появилась необходимость в уточнении модели формирования карстовой полости и механизма обрушения в нее вышележащих пород в конкретных геологических условиях.

Сложный процесс развития карста в структурированном виде можно представить следующей последовательностью:

1. образование полости;

2. рост полости вследствие процессов выщелачивания;

3. достижение полостью предельных размеров;

4. обрушение в полость вышележащих пород (пластичных и сыпучих), ее дальнейшее развитие и, связанная с этими процессами, деформация земной поверхности;

5. постепенное заполнение полости разрушенными породами и образование провала на земной поверхности (при определенных условиях).

Математическая модель, претендующая на достоверное прогнозирование формирования карстовых провалов, должна учитывать самые важные, с точки зрения конечной цели, особенности этих этапов.

Методы механики сплошной среды, эффективные при описании роста и формирования предельных карстовых полостей (пункты 1-4), не позволяют адекватно описать процесс образования самого карстового провала. В этом случае более приемлемыми являются методы механики сыпучих сред. Использование этих подходов при исследовании развития карстовых процессов вплоть до образования провалов на земной поверхности требует четкого разделения областей эффективного применения различных методов,

определения возможностей каждого из них и отыскания условий сопряжения для их совместной реализации.

Для оценки опасности воздействия карста на здания и сооружения нет необходимости в подробном исследовании гидрогеохимических процессов, приводящих к образованию карстовой полости. Достаточно определить начальные размеры и форму полости, которые не внесут ощутимой погрешности на конечный результат решения задачи.

Анализ напряженно-деформированного состояния пород в окрестности карстовых полостей показал, что их устойчивость практически не зависит от высоты полости [13]. Для геологических условий территории Кунгура ее начальное значение можно оценить по данным работы [14], в которой по результатам изучения карстовых полостей Кунгурской пещеры показано, что отношение их горизонтального размера к вертикальному изменяется преимущественно в интервале от 3 до 5. Начальный латеральный размер полости определяется из условий устойчивости ее кровли согласно критериям разрушения, которые будут рассмотрены ниже.

Без потери общности можно предположить, что полость формируется в почве карстующихся пород, что соответствует потенциальной возможности достижения ею максимальных в данных геологических условиях латеральных размеров и позволяет получить верхние оценки интенсивности воздействия карста на здания и сооружения. Тогда, мощность сульфатных отложений, наряду с глубиной залегания карстующихся отложений, будут играть определяющую роль при оценке предельных размеров карстовых полостей и характера их обрушения. С учетом вышесказанного на рис. 5.1 представлена расчетная схема для начального состояния растущей карстовой полости, соответствующая характерному для условий территории г. Кунгура геологическому разрезу.

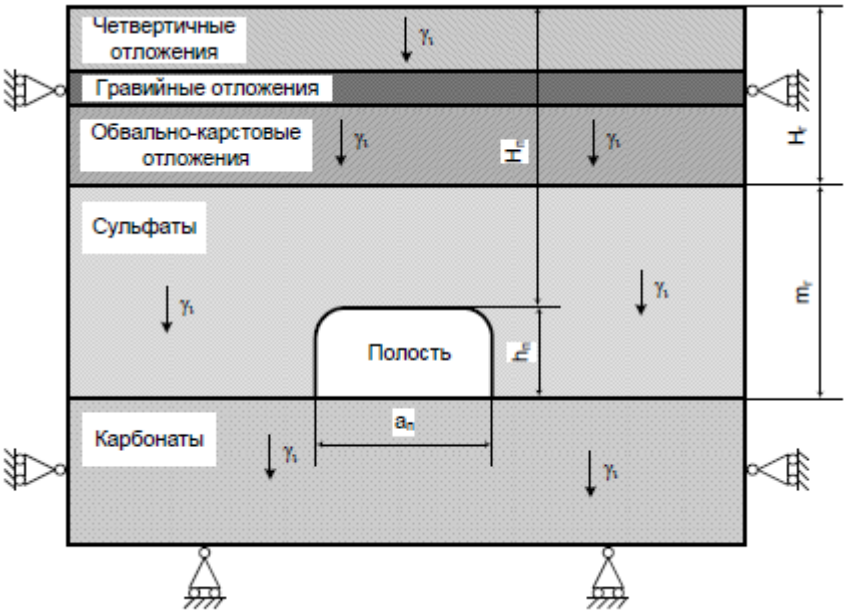


Рис.5.1. Типовая расчетная схема

5.2. Граничные условия

Граничные условия задавались исходя из начального литостатического напряженного состояния верхней части породного массива: горизонтальные перемещения на боковых гранях и вертикальные – на нижней принимались равными нулю. Расчетная область находилась в условиях действия массовых сил, интенсивностью

$$\sigma_{zz} = \rho g(h - z) \tag{5.1}$$

где $\gamma = \rho$ – удельный вес, $(h - z)$ – глубина залегания.

В силу симметрии задачи относительно центральной оси для экономии ресурсов ЭВМ в дальнейшем можно рассматривать только правую половину представленной расчетной схемы (рис.5.1).

5.3. Прочность горных пород

Рост полости по латерали может происходить в результате различных процессов: растворения или вымывания горных пород водой, высыпания или обрушения породы. С точки зрения оценки критических (предельных) размеров карстовых полостей важным является не собственно процесс роста поло-

сти, а в большей степени механизм обрушения пород, и, как следствие, изменение формы карстовой полости.

Прочность на растяжение горных пород значительно ниже их прочности на сжатие. Это одна из наиболее характерных особенностей горных пород, определяющих их поведение в поле механических сил. Горные породы плохо сопротивляются растягивающим усилиям, появление которых в тех или иных участках массива пород может служить критерием разрушения, что и было использовано ранее в работе [11]. Вместе с тем, очевидно, что разрушенные под действием растягивающих напряжений породы не будут обрушаться в карстовую полость, если они окружены материалом, не потерявшим своей несущей способности.

Специфика поведения горных пород под нагрузкой (в отличие, к примеру, от металлов или полимеров) состоит в том, что пластическое деформирование в них на микро уровне осуществляется за счет трещинообразования. Не случайно, для описания поверхности текучести горных пород используетсякритерий Кулона-Мора.

В соответствии с Кулоном, Мором [3] условие предельного равновесия имеет вид

$$|\tau| = \sigma_m \tan \varphi_{\text{тр}} + C, \tag{5.2}$$

где $\varphi_{\text{тр}}$– угол внутреннего трения среды, C– сцепление в ней. Видно, что в соотношение (5.2) $\varphi_{\text{тр}}$и Cвходят в аддитивной форме. В [5] показано, что для кристаллических горных пород фактически это не так. Деформации, при которых в них нарушается сцепление – второго порядка малости, по сравнению с теми, которые необходимы для того, чтобы их внутреннее трение оказалось полностью развитым. Это означает, что действительная прочность пород определяется не суммой прочностных составляющих за счет трения и сцепления, а лишь наибольшей из них [5].

В настоящей работе развивается подход [5] и модель, которая учитывает данный факт. Кристаллические горные породы рассматриваются как среда, состоящая из зерен, связанных сцеплением Cи образующих жесткую

матрицу. От качества упаковки частиц в ней или, что, то же, ее пористости n зависит структурная компонента прочности такого геоматериала. Определяется данная компонента углом трения φ, который является аналогом угла $\varphi_{\text{тр}}$ и имеет следующий вид [6]

$$\varphi = \varphi_{\mu} + \nu, \tag{5.3}$$

где φ_{μ} – угол контактного трения зерен, ν – угол дилатансии. Величина νсвязана с размером d, формой частиц и уровнем действующих в породном массиве напряжений.

Сцепление C в упаковке, как и дилатансия, зависит от размера зерен, поскольку он определяет число контактов между ними. Сами частицы характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ. В диапазоне рассматриваемых в работе напряжений эти структурные элементы считаются неразрушаемыми.

Трение включается в работу после нарушения сцепления. Таким образом, в качестве определяющих параметров пород и грунтов принимаются

$$C, d, n, n_{max}, \varphi_{\mu}, E, \mu, \rho \tag{5.4}$$

где n_{max}– пористость, максимально возможная для конкретной геосреды.

5.4. Метод дискретных элементов

Решение поставленных задач потребовало привлечения численного метода дискретных элементов (МДЭ) [2,5,6]. Состоит она в конкретизации сил взаимодействия между частицами среды в соответствии с выбранной моделью и соответствующих этим силам уравнений движения частиц. За основу при ее (модификации) проведении принята работа [9].

Рассмотрим сначала, как ставится задача о движении частиц в общем виде. Каждая i-я частица среды в общем случае имеет шесть степеней свободы, и ее движение определяется шестью уравнениями. Три первых получаем из закона движения центра тяжести твердого тела:

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \tag{5.5}$$

где $i, j = 1, \ldots, N_p$; N_p– число частиц в исследуемой области среды; m_i– масса i-й частицы; $\boldsymbol{v}_i$– вектор скорости центра масс i-й частицы в глобальной системе координат $\{O, x, y, z\}$; $\boldsymbol{F}_{ij}$– вектор поверхностных сил, возникающих на контакте i-й и j-й частиц; g– ускорение свободного падения.

Три других уравнения находим из уравнений моментов относительно осей x, y, z, которые являются справедливыми для любых неподвижных осей:

$$\frac{d\boldsymbol{N}_i}{dt} = \sum_j (\boldsymbol{M}_{ij} + \boldsymbol{L}_{ij}) \tag{5.6}$$

где $\boldsymbol{N}_i$– вектор момента импульса i-й частицы относительно главных осей частицы, а $\boldsymbol{M}_{ij}$– вектор момента поверхностных сил $\boldsymbol{F}_{ij}$относительно тех же осей; $\boldsymbol{L}_{ij}$– вектор собственного момента относительно главных осей.

Положение движущейся частицы относительно неподвижной глобальной оси с течением времени меняется и связь между моментом импульса и угловой скоростью будет сложной. Поэтому для упрощения исходных уравнений движения введем локальную систему координат $\{O_i, x_i, y_i, z_i\}$, жестко связанную с i-й частицей так, чтобы началоO_iсовпадало с центром ее масс. Тогда за ось моментов можно принять локальную ось y_i. Последняя неподвижна относительно локальной системы координат и, моменты сил относительно нее оказываются равными нулю. Поэтому уравнение моментов имеет такой же вид, как и для неподвижной глобальной оси y. Поскольку ось y_i неподвижна относительно частицы, то момент импульса N_i будет равен:

$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{I}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i \tag{5.7}$$

где $\boldsymbol{I}_i$– тензор момента инерции частицы, $\boldsymbol{\omega}_i$– вектор ее угловая скорость.

5.5. Модель взаимодействия Герца-Миндлина

Конкретизируем физико-механические характеристики частиц среды. Для упрощения дальнейших выкладок примем их форму в виде шара. Тогда каждая i-я частица среды имеет один геометрический параметр r_i – радиус шара и пять физико-механических – $C, \varphi_\mu, \rho, E, \mu$ – сцепление на контактах с другими частицами, угол контактного трения, плотность, модуль упругости и коэффициентПуассона соответственно. Считаем, что форма частиц при их взаимодействиидруг с другом не изменяется, так как деформации на контактах являются величинами второго порядка малости по сравнению с размерами частиц. Это позволяет использовать уравнения движения (5.5) абсолютно твердых тел.

Найдем поверхностные силы. Для этого рассмотрим взаимодействие двух частиц – i-го и j-го шаров радиусами r_iи r_j, центры O_iи O_jкоторых лежат в одной плоскости $y = 0$ (рис.5.2).

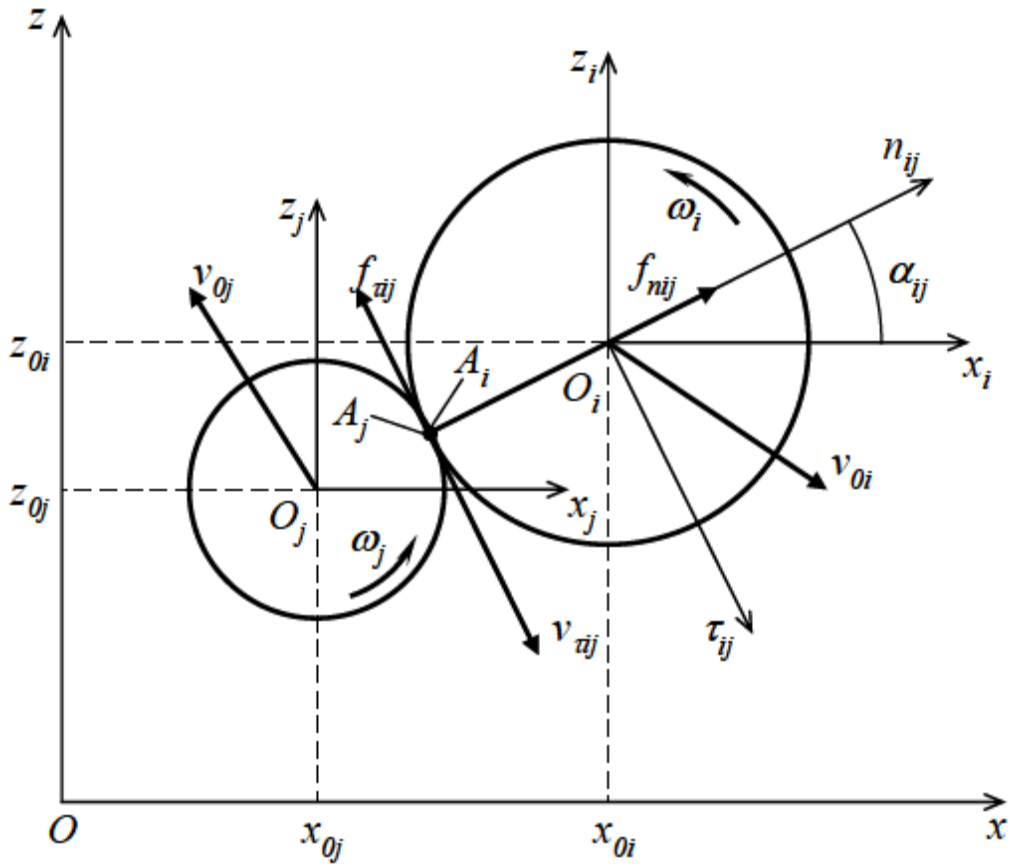


Рис.5.2.

Определим силы, действующие на i-ю частицу со стороны j-й частицы. В общем случае на контакте частиц могут проявляться три типа сил: отталкивания f_{nii}, контактного трения (трения) $f_{\tau ii}$ и сцепления (притяжения) f_{cii}. Сила отталкивания возникает при условии $\Delta s = r_i + r_j - s > 0$, где s – расстояние между центрами двух частиц. Она направлена по нормали к контакту от центра i-й частицы и согласно Герцу ее величина равна [13]:

$$F_n = -\frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \delta^{\frac{3}{2}} \tag{5.8}$$

Здесь E^*–приведенный модуль Юнга, который выражается через модули Юнга E_ii-й частицы и E_jj-й частицы:

$$E^* = \frac{E_i E_j}{E_i + E_j} \tag{5.9}$$

R^* – приведенный радиус частицы:

$$R^* = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \tag{5.10}$$

δ – интервал перекрытия двух сфер. Данная сила направлена вдоль нормали, соединяющей две частицы (см. рис.5.3).

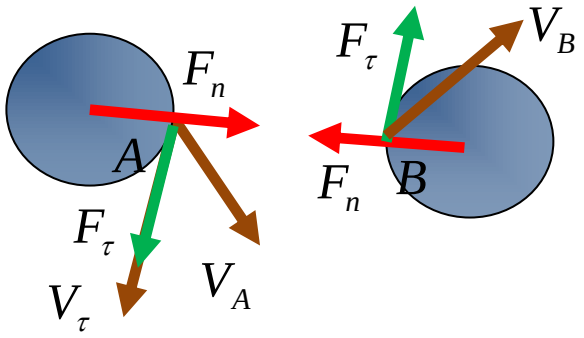


Рис.5.3. Силы при взаимодействии двух сферических частиц

Касательная сила Миндлина имеет вид

$$F_\tau = -8G^* \sqrt{R^* \delta} \cdot \vec{\delta} \tag{5.11}$$

Где G^* - модуль сдвига,

$$G^* = \frac{G_i G_j}{G_i + G_j} \tag{5.12}$$

$\vec{\delta}$ – вектор, пропорциональный касательной компоненте относительной скорости $V_\tau = V_A - V_B$в точке контакта. Точки A и B – точки контакта с первой и второй частицами соответственно.

Помимо (5.8) и (5.11) могут быть также введены демпфирующие касательные и нормальные силы, пропорциональные относительным скоростям в точке контакта.

В классической модели Герца-Миндлина [13] отсутствует жесткость на растяжение – если частицы удалены друг от друга и их перекрытие равно нулю, то $\delta = 0$. Однако при желании смоделировать слипание песчинок среды, можно ввести отрицательное перекрытие $\delta < 0$. В этом случае при удалении частиц друг от друга между ними будет действовать сила притяжения.

Также вводится понятие радиуса обрезания r_{cut}– радиуса между двумя заданными частицами, в пределах которого рассчитывается взаимодействие. Вне данного радиуса считается, что взаимодействие отсутствует.

Помимо радиуса обрезания, в модели Герца-Миндлина вводится также прочность на изгиб.

Из вышесказанного следует, что зависимости сил от расстояния будут иметь следующий вид

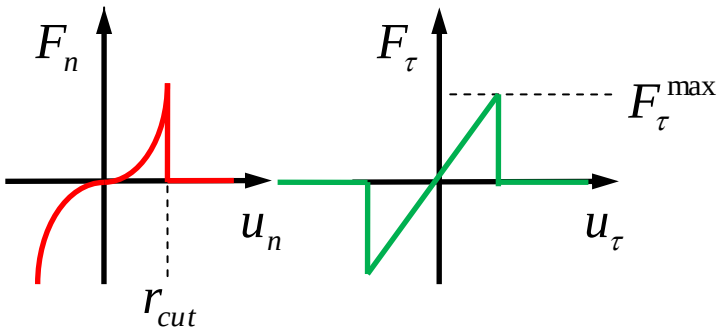


Рис.5.4. Силы взаимодействия между частицами

Здесь u_τ – величина относительного перемещения ближайших точек двух частиц вдоль их касательной плоскости

$$u_\tau = \int_0^t V_\tau dt$$

Модель Герца-Миндлина предназначена для моделирования сыпучих сред и дает хорошие результаты, когда в качестве рассматриваемой среды выступает песок или грунт. Горные породы, расположенные на глубине, обладают меньшей сыпучестью, сравнительно большей жесткостью на сдвиг и растяжение. Для моделирования таких плотных горных пород модель Герца-Миндлина является не совсем подходящей. В связи с этим в данном исследовании была использована еще одна дискретная модель горных пород, построенная на основе Bonded-Particle Model.

5.6. Модифицированная Bonded-Particle Model

КлассическаяBonded-Particle Model (далееBPM) была сформулирована P. Cundall и D. Potyondy применительно именно к моделированию разрушения горных пород [20]. По словам авторов, данная модель позволяет моделировать очень широкий спектр свойств горных пород: упругость, пластика, акустика, накопление повреждений, хрупкость, гистерезис и пр.

Идея моделирования с использованием BPM заключается в инкрементальном изменении сил и моментов, действующих со стороны связи на частицу, согласно следующим уравнениям:

$$\delta \boldsymbol{F}_n = -\boldsymbol{v}_n S_n A_b dt \tag{5.13}$$

$$\delta \boldsymbol{F}_t = -\boldsymbol{v}_\tau S_t A_b dt \tag{5.14}$$

$$\delta \boldsymbol{M}_n = -\boldsymbol{\omega}_n S_n J dt \tag{5.15}$$

$$\delta \boldsymbol{M}_t = -\boldsymbol{\omega}_t S_t \frac{J}{2} dt \tag{5.16}$$

где $\delta \boldsymbol{F}_{n,\tau}$ – приращение за шаг интегрирования нормальной и тангенциальной составляющей силы, действующей со стороны связи, $\delta \boldsymbol{M}_{n,t}$ – приращение за шаг интегрирования нормальной и тангенциальной составляющей момента, действующего со стороны связи, $A_b = \pi R_b^2$ –

площадь поперечного сечения связи, $J = \frac{1}{2}\pi R_b^4$ – полярный момент инерции сечения связи, R_b – радиус связи, $\boldsymbol{v}_{n,\tau}$ – нормальная и тангенциальная проекция относительной поступательной скорости частиц соответственно, $\boldsymbol{\omega}_{n,\tau}$ – нормальная и тангенциальная проекция относительной угловой скорости частиц соответственно, $S_{n,\tau}$ – нормальная и сдвиговая жесткость связи соответственно, dt – шаг интегрирования. Как правило, при моделировании к представленным выше силам и моментам добавляются силы взаимодействия Герца-Миндлина, которые возникают только при физическом контакте частиц.

Суммарные силы ищутся путём суммирования (интегрирования) вычисляемых на каждом шаге приращений

$$\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}_{n_0} + \int_0^t d\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}_{n_0} + \int_0^t C_n d\boldsymbol{R} \tag{5.17}$$

$$\boldsymbol{F}_\tau = \boldsymbol{F}_{\tau_0} + \int_0^t d\boldsymbol{F}_\tau = \boldsymbol{F}_{\tau_0} + \int_0^t C_\tau \boldsymbol{V}_\tau dt \tag{5.18}$$

$$\boldsymbol{V}_\tau = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{[\boldsymbol{V}_C \cdot \boldsymbol{R}]\boldsymbol{R}}{R^2} \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \int_0^t C_\varphi \boldsymbol{\omega} dt \tag{5.20}$$

И на основании полученных рассчитываются новые скорости и перемещения частиц с помощью 1 и 2 законов Эйлера:

$$m\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{F}_\tau \tag{5.21}$$

$$I\ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{M} \tag{5.22}$$

К числу достоинств классической модели ВРМследует отнести то, что её параметры модели имеют ясный физический смысл. Но есть также и недостатки. Так, например, в данной модели сложно (если вообще возможно) использовать нелинейный закон межчастичного взаимодействия – и это надо

записать на счёт инкрементальной процедуры вычисления сил и моментов. Также, взаимодействие не является потенциальным.

Предлагается следующая модификация классического метода BPM (5.17) – (5.20).

Нормальные силы будем записывать в привычном явном виде.

$$\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}_{n_0} + \int_0^t d\boldsymbol{F}_n = 0 - \int_0^t C_n d\boldsymbol{R} = -C_n \boldsymbol{R} \tag{5.23}$$

где C_n – константа, характеризующая жесткость среды на сжатие.

При этом введём радиус обрезания в полной аналогии с тем, как это было сделано для модели Герца-Миндлина.

Касательные силы представим в виде

$$\boldsymbol{F}_\tau = \boldsymbol{F}_{\tau_0} + \int_0^t d\boldsymbol{F}_\tau = C_\tau R_\tau \frac{\boldsymbol{V}_\tau}{V_\tau} \tag{5.24}$$

$$\boldsymbol{V}_\tau = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{[\boldsymbol{V}_C \cdot \boldsymbol{R}]\boldsymbol{R}}{R^2} \tag{5.25}$$

Интеграл

$$R_\tau = \int_0^t V_\tau dt \tag{5.26}$$

представляет собой абсолютное значение пути проскальзывания между двумя частицами.

Сила в (5.24) имеет то достоинство, что она лежит в касательной плоскости контакта частиц (как это и должно быть у силы трения) в отличие от её классического предка (5.18).

В моментное уравнение включим компоненту, обуславливающую трение, а также представим старую компоненту в (5.20) не в итеративном виде.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F}_\tau + C_\varphi \boldsymbol{\varphi} \tag{5.27}$$

где $\boldsymbol{\varphi}$не есть вектор реальных углов поворота. Вектор $\boldsymbol{\varphi}$можно рассматривать как вектор, компонентами которого являются некие квазиуглы, которые не имеют чёткого физического смысла

$$\boldsymbol{\varphi} = \int_0^t \boldsymbol{\omega} dt \tag{5.28}$$

Для касательной силы трения $\boldsymbol{F}_\tau$вводится предельное значение (аналог сдвиговой прочности) F_τ^{max},при достижении которой воздействие пропадает. Аналогично для абсолютного значения собственного момента $C_\varphi \boldsymbol{\varphi}$ вводится ограничение M_φ^{max}.

Представим силовое взаимодействие графически. Пусть $u_n = r - r_0$ – нормальное перемещение двух частиц друг относительно друга (изменение длины радиус-вектора, их соединяющего). Тогда

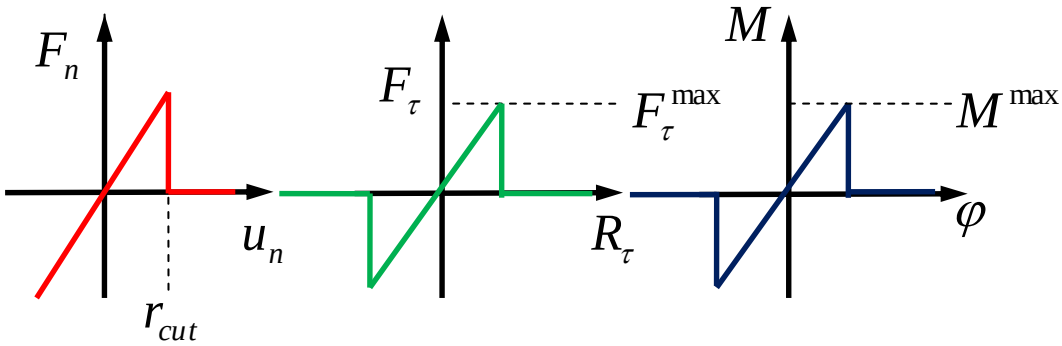


Рис.5.5. Силы взаимодействия между частицами

5.7. Обезразмеривание как способ уменьшения вычислительной ошибки в молекулярно-динамическом моделировании

Существует четыре источника погрешностей результата численного решения задачи:

1)погрешность математической модели,

2) погрешность исходных данных,

3) погрешность метода (в литературе ее также называют погрешностью обрыва),

4) погрешность округления (машинная погрешность).

Нас здесь интересует последний, четвертый тип погрешностей. Главные причины большой машинной погрешности следующие:

1) метод обрыва и округления, принятый в машине;

2) потеря значащих разрядов при вычитании;

3) техническое состояние машины;

4) потеря разрядов при превышении допустимой разрядности представления чисел (например, при делении на маленькие числа).

Из вышесказанного следует, что выгодно работать с числами, которые имеют порядок единиц. По данной причине при написании численного алгоритма расчета деформации горного массива для решаемой системы дифференциальных уравнений применялась процедура обезразмеривания. Это делалось для перехода к вычисляемым величинам с разумным порядком, а также для сокращения числа арифметических операций при работе расчетной программы.

Ниже приведена процедура обезразмеривания для задачи Коши в самом общем случае

$$\begin{gathered}\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{r}_{ij}, \boldsymbol{v}_{ij})}{m_i} \\ \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \boldsymbol{v}_i \\ \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{r}_i^{\boldsymbol{0}} \\ \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{0}} \\ i = 1, .., N\end{gathered} \tag{5.28}$$

Пусть τ – характерное время протекания рассматриваемых процессов, L – характерный размер частиц, m – характерная масса частиц.

Сделаем замену переменных

$$\begin{gathered}\boldsymbol{r}_i \to L\boldsymbol{R}_i \\ \boldsymbol{v}_i \to \frac{L}{\tau}\boldsymbol{V}_i\end{gathered} \tag{5.29}$$

$$t \to \tau$$

$$\boldsymbol{f}_i \to \frac{mL}{\tau^2}\boldsymbol{F}_i$$

$$i = 1,..,N$$

где $\tau, \boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{V}_i, \boldsymbol{F}_i$ – новые безразмерные параметры (время, радиус-вектор, вектор скорости и сила соответственно).

Система (5.28) в безразмерном виде будет таковой

$$\frac{d\boldsymbol{V}_i}{d\tau} = \boldsymbol{F}_i\left(\boldsymbol{R}_{ij}, \boldsymbol{V}_{ij}\right)$$

$$\frac{d\boldsymbol{R}_i}{d\tau} = \boldsymbol{V}_i$$

$$\boldsymbol{R}_i(\boldsymbol{0}) = \frac{\boldsymbol{r}_i^{\boldsymbol{0}}}{L} \tag{5.30}$$

$$\boldsymbol{V}_i(\boldsymbol{0}) = \frac{\boldsymbol{v}_i^{\boldsymbol{0}}\tau}{L}$$

$$i = 1,..,N$$

Однако на этом обезразмеривание ещё не заканчивается. Необходимо отдельно пояснить процедуру обезразмеривания правой части уравнений движения. Пусть имеет место парный потенциал силового взаимодействия.

$$\boldsymbol{f}_i\left(\boldsymbol{r}_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_{ij}) \tag{5.31}$$

где

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{r}_{ij}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_{ij}} \tag{5.32}$$

Возьмём в качестве потенциала взаимодействия U, к примеру, потенциал Леннарда-Джонса

$$U\left(\boldsymbol{r}_{ij}\right) = D\left[\left(\frac{a}{r_{ij}}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r_{ij}}\right)^{6}\right] = D\left[\left(\frac{1}{R_{ij}}\right)^{12} - 2\left(\frac{1}{R_{ij}}\right)^{6}\right] \tag{5.33}$$

Глубина Dпотенциальной ямы имеет размерность энергии. Если мы хотим обезразмерить (5.33), то нам достаточно ввести новую безразмерную глубину $\widetilde{D}$потенциальной ямыпо правилу

$$D = \widetilde{D}\frac{mL^2}{\tau^2} \tag{5.34}$$

Тогда новая обезразмеренная потенциальная энергия запишется в виде

$$\widetilde{U}(\boldsymbol{R}_{ij}) = \widetilde{D}\left[\left(\frac{1}{R_{ij}}\right)^{12} - 2\left(\frac{1}{R_{ij}}\right)^{6}\right] \tag{5.35}$$

Обезразмерная сила $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ будет выражаться через потенциал привычной формулой

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{ij}) = -\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \boldsymbol{R}_{ij}} \tag{5.36}$$

Для неизвестной вектор-функции $\boldsymbol{x}(t)$, в качестве которой для примера может быть взят вектор$\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}\} = \{x, y, z, u, v, w\}$координат позиции и скорости тела. Данная задача может быть решена численно классическим методом Рунге-Кутты четвёртого порядка.

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{k}_1 = \Delta t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n, t_n) \\
\boldsymbol{k}_2 = \Delta t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{k}_1/2, t_n + \Delta t/2) \\
\boldsymbol{k}_3 = \Delta t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{k}_2/2, t_n + \Delta t/2) \\
\boldsymbol{k}_4 = \Delta t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{k}_3, t_n + \Delta \mathrm{t}) \\
\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \frac{1}{6}(\boldsymbol{k}_1 + 2\boldsymbol{k}_2 + 2\boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4)
\end{gathered} \tag{5.37}$$

По сравнению с методами Эйлера, Лагранжа и Верле, данный метод имеет более высокий порядок точности. Однако классический метод Рунге-Кутты четвёртого порядка имеет одну особенность, связанную с необходимостью вычислять функцию$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$четыре раза за одну временную итерацию. Потому этот метод становится неэффективным в вычислительных задачах, где основное расчётное время тратится на вычисление правой части системы дифференциальных уравнений, как, например, это имеет место в случае расчёта молекулярно-динамической задачи множества частиц. Вследствие данной особенности применение метода Рунге-Кутты становится неэффективным и даже его исключительная точность теряет свою значимость.

Ниже приводится модификация метода Рунге-Кутты 4 порядка, где с помощью одного приёма удаётся избежать многократного вычисления функцию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ на одном временном шаге и в то же время сохранить высокий порядок по времени.

Процедура обезразмеривания является общепринятой при решении задачи вычислительной механики и метода дискретных элементов в частности. Похожая процедура обезразмеривания используется в работах [2] и [7].

6. Верификация алгоритма расчета деформирования грунта

Вышеприведённые модели были запрограммированы и отлажены на ряде простейших тестовых задач, имитирующих реальные лабораторные испытания.

6.1. Одноосное сжатие прямоугольного образца (двумерный случай)

Испытания образцов на одноосное сжатие являются простейшими и применяются для прочных скальных, полускальных, мерзлых и плотных глинистых грунтов. Особенностью такого испытания является отсутствие боковых напряжений ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$), т.е. возможность свободных боковых деформаций грунта.

Рассматриваемый образец имеет прямоугольную форму и состоит из сферических частиц одинакового радиуса R (см. рис. 6.1).

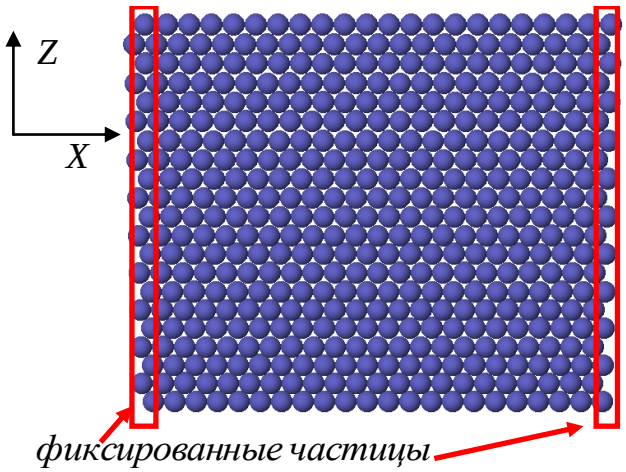


Рис.6.1. Геометрия тела

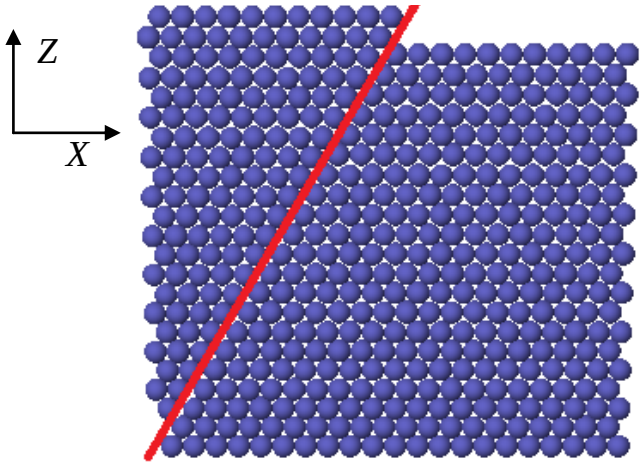
По бокам задаются граничные условия[1] в виде неподвижных частиц. Данные условия могут быть заданы двумя способами. Первый способ – наложение удерживающих связей на все степени свободы граничных частиц – и трансляционных, и вращательных (ситуация отсутствия скольжения

[1] Здесь понятие граничное условие используется в несколько ином по сравнению с континуальной механикой смысле

между испытуемым образцом и обкладкой пресса). Второй способ – ограничение накладываются только на повороты и на составляющую перемещений по оси нагружения X.

В ходе тестирования использовались оба способа задания граничных условий, но в данном отчёте было отдано предпочтение первому способу, поскольку полученные для него результаты позволяли наблюдать более физичную картину разрушения образца.

При моделировании граничных условий по второму способу наблюдался один побочный эффект: лишняя степень свободы приводила к образованию диагональных сдвигов решетки (см. рис.6.2)



сдвиг

Рис.6.2. Геометрия тела

В рамках рассматриваемого имитационного испытания образца использовалась следующая схема нагружения. По прошествии интервала времени Δt на текущее поле деформаций накладывалась (инкрементально) некоторая деформация догружения $\Delta\varepsilon$. Величины деформации догружения $\Delta\varepsilon$ и временного интервала догружения Δt выбирались так, чтобы волновые процессы в образце установились. Для дополнительного ускорения гашения волн использовалась искусственная вязкость μ, которая вычислялась по формуле

$$\mu = 2\sqrt{mC} \tag{6.1}$$

Здесь m – масса частицы, C – жесткость на сжатие.

Неподвижные частицы-стенки также подвергались деформации догружения (в этом смысле неподвижные частицы-стенки являются неподвижными только внутри временного интервала между двумя догружениями). Таким образом, данный случай нагружения соответствует мягкому квазистатическому нагружению.

Параметры модели ВРМ выбирались произвольно и не соответствуют какому-либо реальному образцу горных пород, поскольку цель верификационного теста отчёта – показать дееспособность модели на качественном уровне.

Параметры ВРМ:

Жёсткость на сжатие	40 МПа
Прочность на растяжение	0.8 МПа
Жёсткость на сдвиг	4 МПа
Прочность на сдвиг	0.04 МПа
Жёсткость на изгиб	4 МПа
Прочность на изгиб	0.04 МПа
Динамическая вязкость	$0.001\,\frac{\text{кг}}{\text{см}\cdot\text{сек}}$
Масса частицы	0.01 кг
Равновесный радиус	1 см
Радиус обрезания	1.02 см
Интервал догружения	10 сек
Деформация догружения	0.001
Количество частиц	~500

Ниже приведены результаты имитационного испытания образца. Визуализация делалась в пакете CADMathematica 8.0.

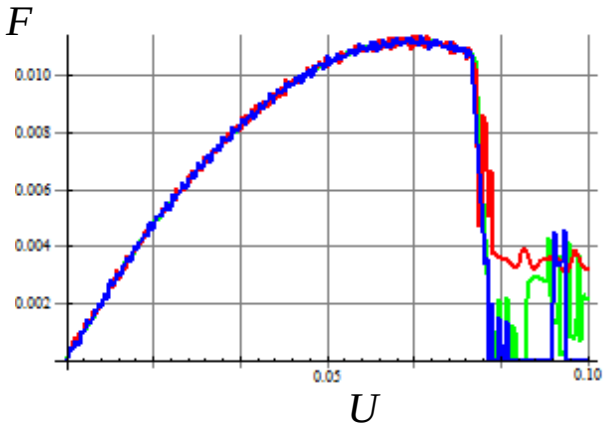


Рис.6.3. Сжатие образца с взаимодействием по ВРМ. Случай различных сдвиговых жёсткостей ($4\ \text{МПа}, 0.4\ \text{МПа}, 40\ \text{МПа}$*). Наблюдается отсутствие зависимости диаграммы сжатия от сдвиговой жёсткости. Разрушение происходит примерно при одних значениях перемещений*

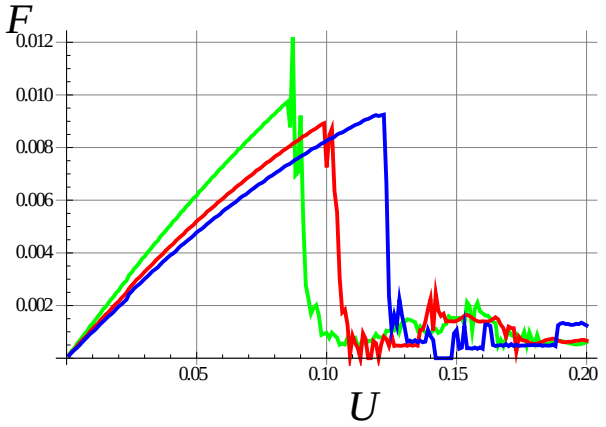


Рис.6.4. Испытание образцов с разным отношением h/D. *Зелёная кривая -* $\frac{h}{D} = 0.5$, *красная кривая -* $\frac{h}{D} = 1$, *синяя кривая -* $\frac{h}{D} = 2$.

Упомянутые испытания также были проведены на образцах, состоящих из большего числа частиц (см. рис.6.4.). Это было необходимо для того, чтобы оценить влияние дискретности образца на точность проводимых вычислений. В ходе численного эксперимента было выявлено, что в упругой области деформирование практически не зависит от дискретной природы (количества частиц), однако после начала процессов разрушения (пластика), наблюдается другая картина поведения образца.

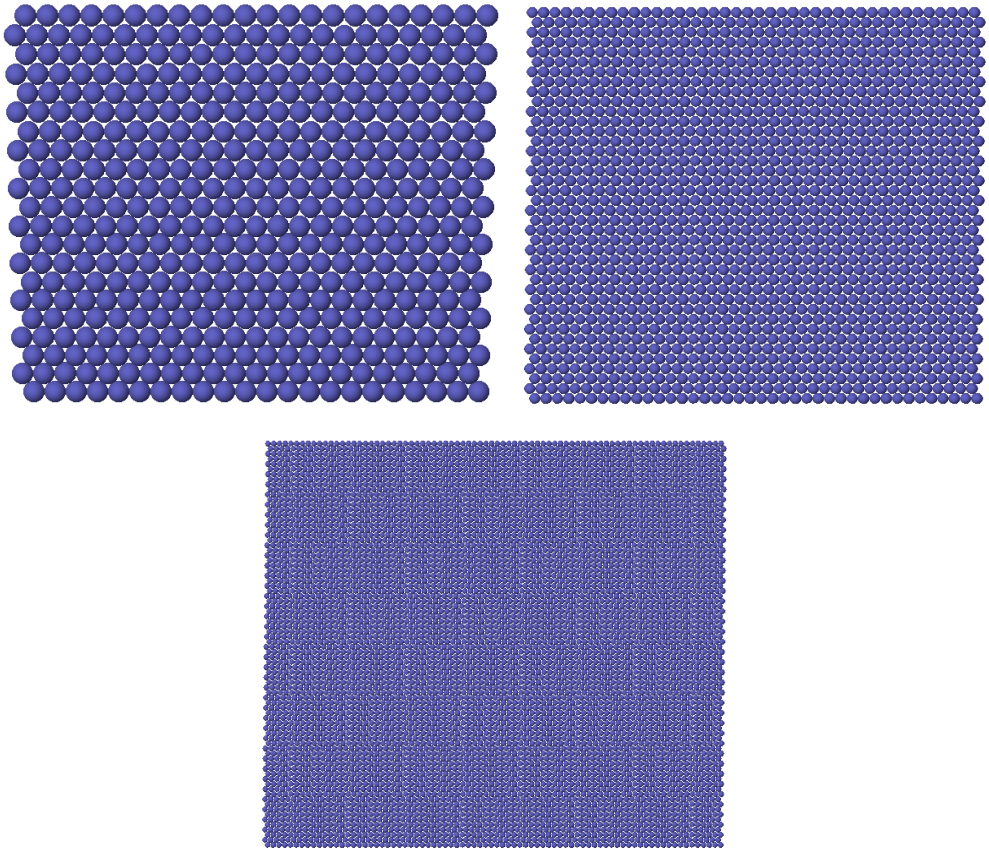


Рис.6.5. Решетка 1) 22x21 частиц 2)40x40 частиц 3) 80x80 частиц

Теперь рассмотрим поведение материалов, описываемых законом Герц-Миндлина, при сжатии. В качестве параметров модели возьмём те же, что брали по умолчанию для ВРМ. К приведённым выше параметрам следует добавить ещё один

Коэффициент сухого трения	0.1

Ниже приведены результаты численных расчётов.

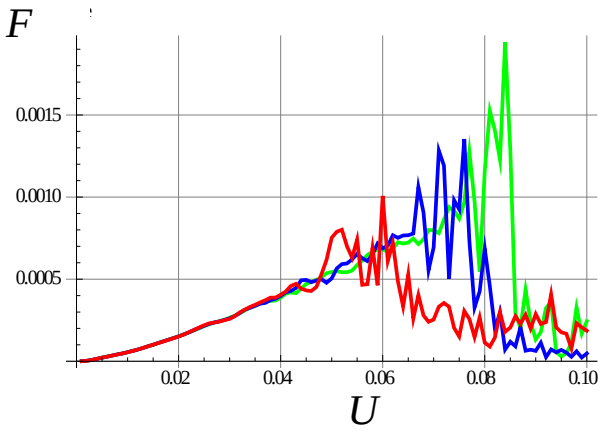


Рис.6.6. Герц-Миндлин при радиусе обрезания $R_{cut} = 1.02\ R$ и при различных значениях коэффициента сухого трения 0.025 (красная кривая), 0.05 (синяя кривая), 0.1(зелёная кривая). Из графиков следует, что чем ниже величина трения, тем быстрее происходит разрушение материала. Зигзагообразные всплески в правой части графика (большие перемещения) соответствуют образованию отдельных трещин в образце и скольжению вдоль этих трещин. Характер поведения материала после разрушения (появления первой трещины) не рассматривается, поскольку там очень существенны эффекты, связанные с масштабом рассматриваемых зёрен (частиц)

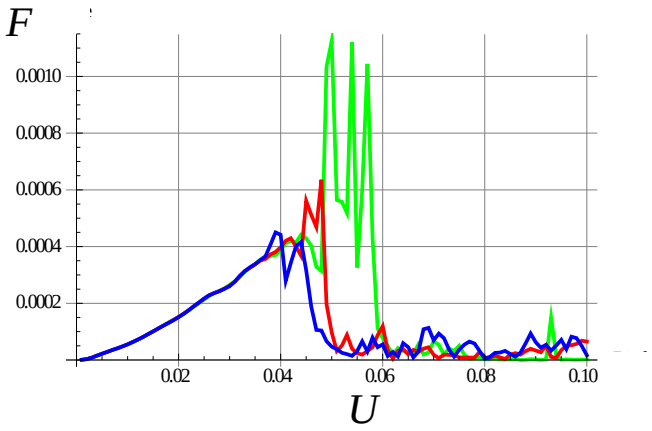


Рис.6.7. Герц-Миндлин при радиусе обрезания $R_{cut} = 1.01\ R$ различных значениях коэффициента сухого трения 0.025 (красная кривая), 0.05 (синяя кривая), 0.1(зелёная кривая).

Нетрудно заметить, что в зоне малых деформаций образец ведет себя так, как предсказывает закон Герца – т.е. сила зависит от перемещений в степени 3/2. При переходе в пластику и зону разрушения наблюдаются локализованные скачки сил, что вероятнее всего связано с …

Как и для ВРМ, проводилось несколько испытаний, отвечающих разному количеству частиц. В упругой зоне было выявлено полное соответствие кривых нагружения образцов с разным количеством частиц, в пластической зоне и зоне разрушения поведение отличается.

6.2. Простой сдвиг

В данном пункте рассматривается только модель BPM, поскольку материал, описываемый в рамках модели Герца-Миндлина, не имеет жёсткостей на сдвиг и на растяжение и отдельное проведение теста на сдвиг для него не несет никакой новой информации.

В качестве расчётной геометрии берётся первоначальный образец (рис.6.1), на верхней и нижней границе которого задаются граничные условия в перемещениях в виде слоя неподвижных частиц.

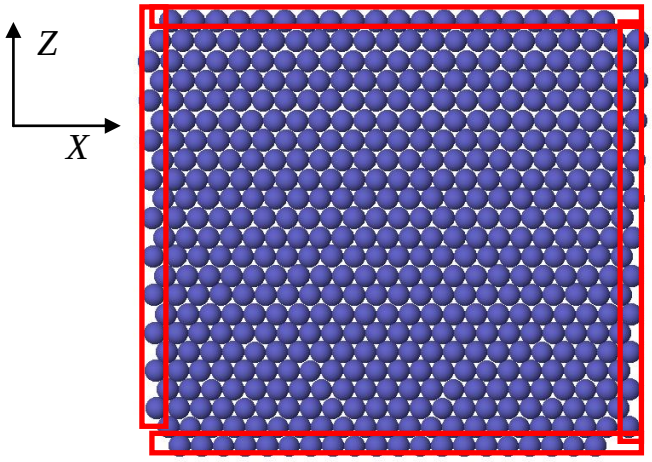


Рис.6.8. Расчётная область (в красную рамку заключены слои неподвижных частиц)

Сдвиг реализовывался путём суперпозиции растяжения и сжатия по двум перпендикулярным осям X и Z соответсвенно (см. рис.6.9).

На рис.6.9. приведены аппроксимации кривых зависимости касательной силы от перемещений при различных значениях жёсткости на сдвиг. Образцы в указанных имитационных численных экспериментах не доводились до полного разрушения. Легко видеть, что при увеличении жёсткости на сдвиг наблюдается увеличения угла наклона кривой при малых перемещениях.

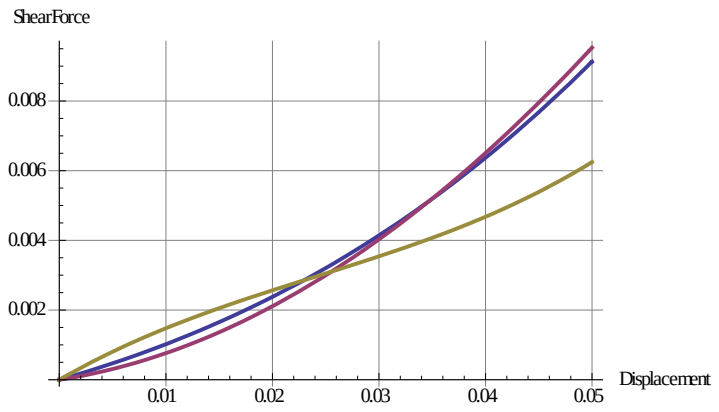


*Рис.6.9. Зависимость касательной силы от перемещений при разных величинах жёсткости на сдвиг (*4 МПа, 6 МПа, 12 МПа – *красная, синяя и золотая кривые соответственно)*

При больших же перемещениях кривая, соответствующая большей сдвиговой жёсткости, становится достаточно пологой. Причина данного эффекта кроется не в плохой аппроксимации кривых. Возможной причиной такого неожиданного результата следует считать граничные особенности, возникающие в углах образца.

7. Задача об обрушении грунта в карстовую полость

7.1. Постановка задачи

С использованием модифицированного МДЭ в плоской постановке решалась задача о деформированном состоянии слоистого массива горных пород в окрестности карстовой полости в зависимости от ее размеров и глубины H залегания сульфатных отложений, а также характеристик основных элементов приповерхностной части геологического разреза (рис. 7.1).

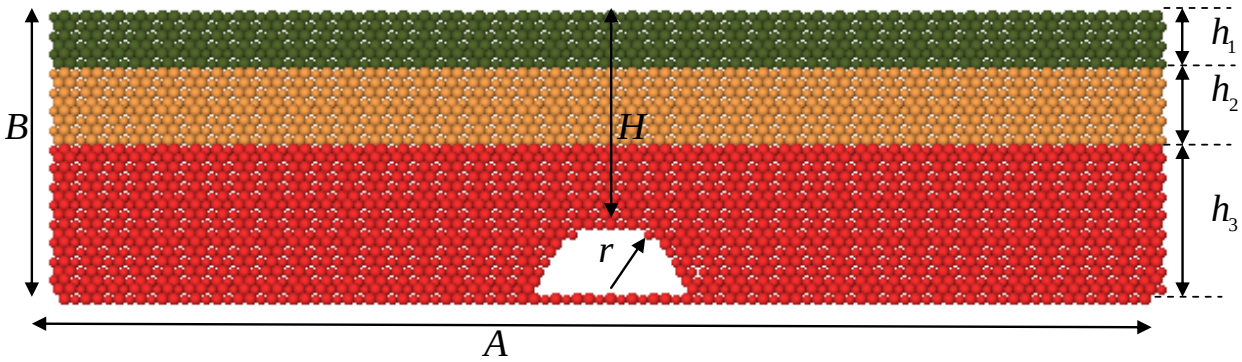


Рис.7.1. Начальная конфигурация

Расчетную область в задаче принимается прямоугольной, имеющей размеры $A \times B = 31\text{м} \times 120\text{м}$(рис. 7.1). Она ослаблена полостью Ω в форме полуарки с радиусом $r = 6\text{м}$. Губина залегания полости по кровле – $H = 25\text{м}$. Полость Ω расположена симметрично относительно вертикальной оси симметрии области счета.

Дневная поверхность свободна от напряжений. Расчетная область разбита на *три* горизонтальных слоя мощностями $\{h_i\} = \{6\text{м}, 8\text{м}, 17\text{м}\}$. Механические свойства частиц во всех слоях – одинаковые и определяются величинами ρ, φ, E, μ:

Модельная среда сформирована следующим образом. Вначале создается исходный массив (без полости) из шаров, находящихся в равновесном состоянии. Эта процедура является аналогичной триангуляции расчетной области в методе конечных элементов. Исходный массив формировался путем

усадки шаров в области, ограниченной неподвижными дискретными элементами, первоначально не контактирующих между собой частиц под действием силы гравитации. Далее за счет удаления частиц из зоны полости Ω, на глубине H в слоистом массиве организовывалась полость. Данный момент времени в задаче принимался в качестве начального.

Образование пустотной аномалии приводит к нарушению равновесного состояния модельной среды. В зависимости от механических свойств элементов, слагающих массив, сцепления между ними, количества слоев, сочетания их мощности и прочности, формы полости, ее размеров и глубины залегания ее кровли, оказываются возможными различные виды деформирования моделируемого геопространства.

7.2. Численный эксперимент

Результаты численных экспериментов представлены на рис. 7.2-7.6. Все они получены при A= 31 м, B = 120 м, h = 25 м и следующих постоянных параметрах породного массива:

Табл.7.1.

Слой № 1	Слой № 2	Слой № 3
$\rho = 1800\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\rho = 2100\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\rho = 2600\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
$E = 7\text{МПа}$	$E = 100\text{МПа}$	$E = 2500\text{МПа}$
$\mu = 0.001\ \text{Па}\cdot\text{с}$	$\mu = 0.001\ \text{Па}\cdot\text{с}$	$\mu = 0.005\ \text{Па}\cdot\text{с}$
$r = 1$	$r = 1\text{м}$	$r = 1\text{м}$

В табл.7.1. приведены плотности и модули соответствующих континуальных сред. Однако в уравнениях метода динамики частиц используются собственные дискретные модули и масса, которые не совпадают с континуальными модулями. Определение эквивалентных континуальным модулей является предметом отдельного исследования и в данной работе никак не затрагивается. Дискретные модули берутся из

тестовых испытаний образца на сдвиг и одноосное сжатие методом подбора на предмет соответствия континуальным модулям для испытуемого образца в целом.

Общее количество частиц – $\mathrm{N} = 3160$.

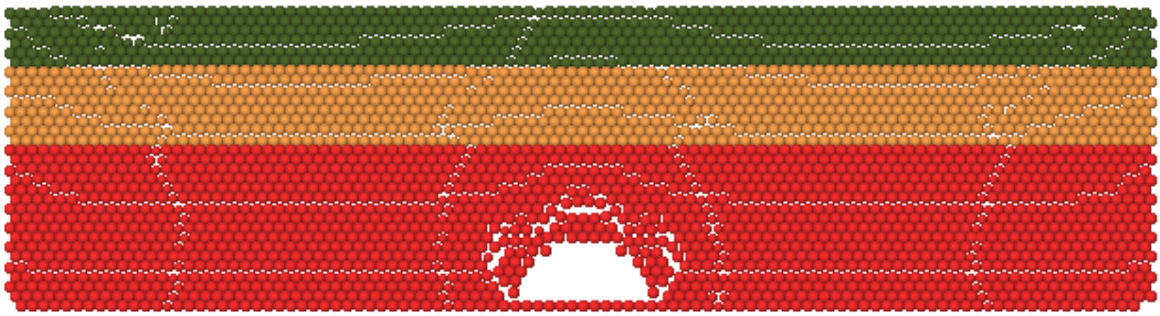


Рис.7.2. Расчетная область в момент $t = 1$ *мин*

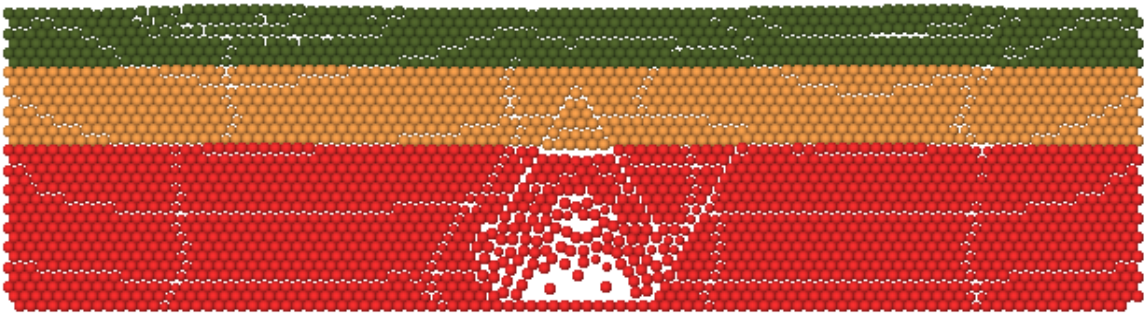


Рис.7.3. Расчетная область в момент $t = 2$ *мин*

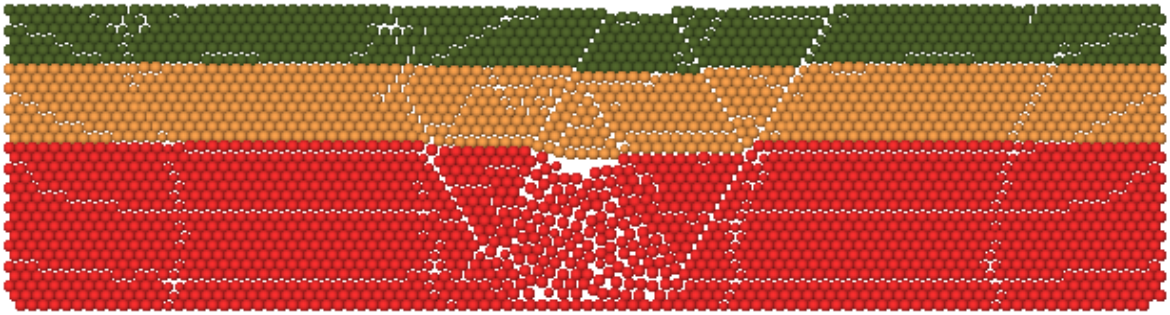


Рис.7.4. Расчетная область в момент $t = 3$ *мин*

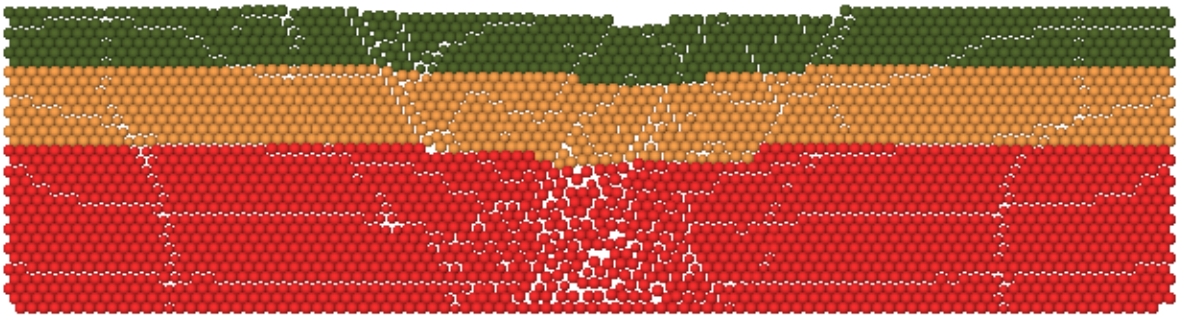


Рис.7.5. Расчетная область в момент $t = 5$ *мин*

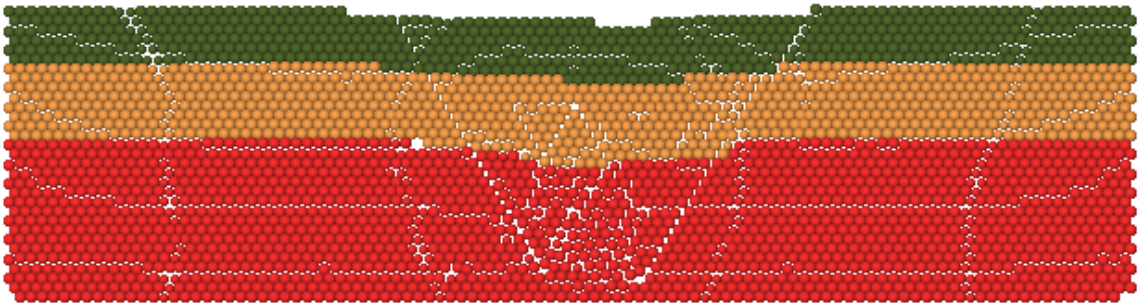


Рис.7.6. Расчетная область в момент $t = 15$ *мин*

Как видим, вследствие особенностей используемой для отображения результатов графики, на рис.7.2-7.6 присутствует узор из муаровых полос, по которому также можно судить о характере деформаций в горном массиве.

В приведенном численном расчете мы исследовали деформацию горного массива малой мощности. Приведем результаты численного моделирования для расчетной области с*тремя*горизонтальными слоямимощностями$\{h_i\} = \{29\text{м}, 18\text{м}, 32\text{м}\}$. Механические свойства частиц во всех слоях оставляем прежними. Размер карстовой полости прежний. Глубина залегания – $H = 74\text{м}$.

Рис.7.7. Расчетная область в момент $t = 0$ *мин*

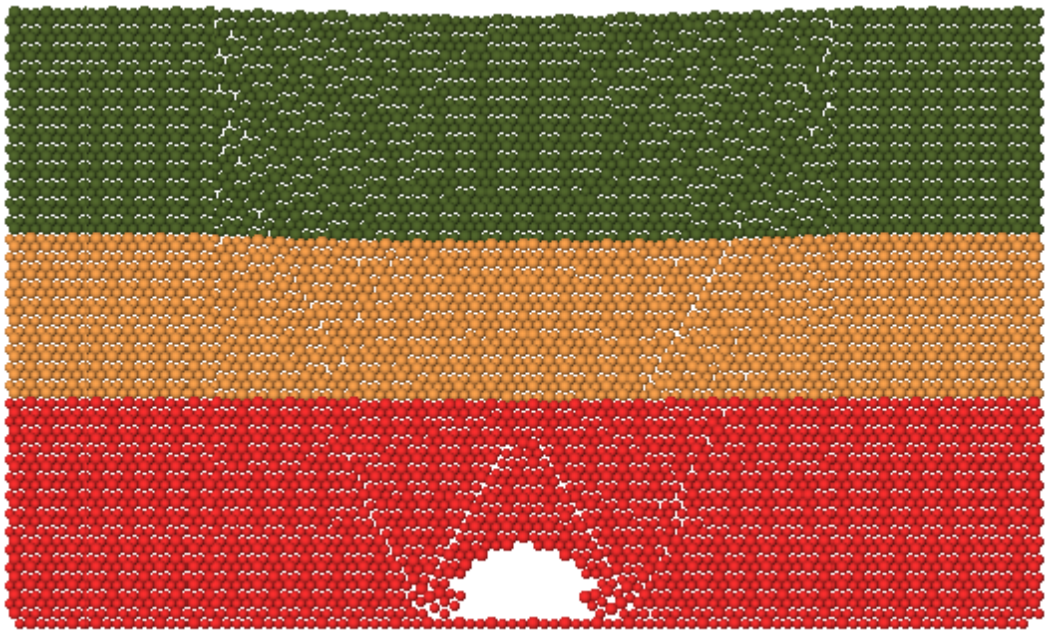


Рис.7.8. Расчетная область в момент $t = 2$ *мин*

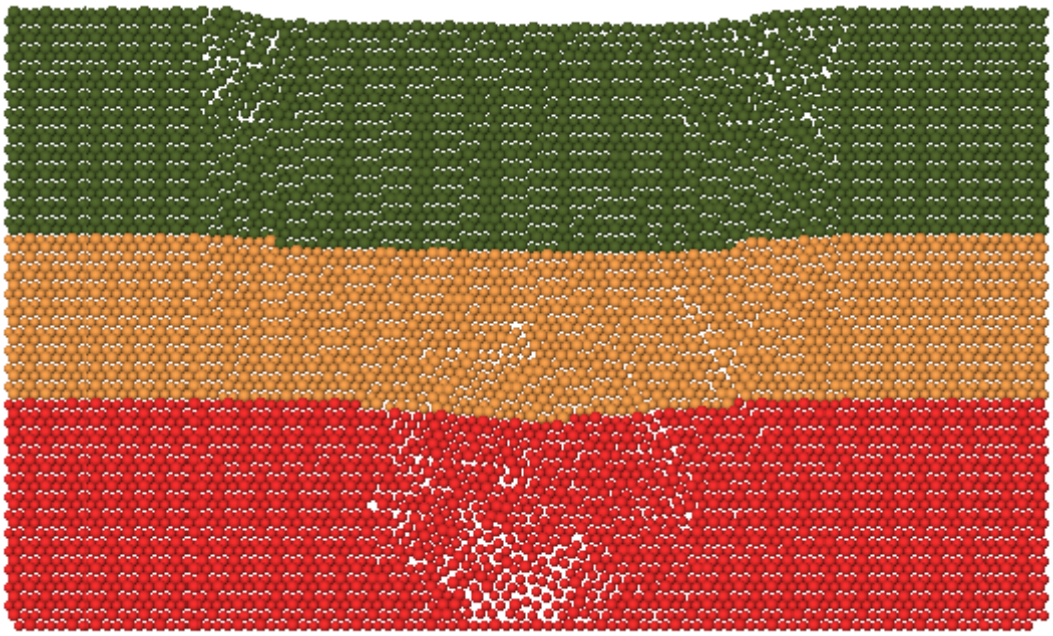


Рис.7.9. Расчетная область в момент $t = 5$ *мин*

В целом все перечисленное выше характерно и для деформированного состояния геосреды в экспериментах первой серии (рис. 7.2-7.6). Представленные на рис. 7.2-7.9 результаты, приводят к заключению о слабой зависимости ширины l зоны больших деформаций над карстовой полостью от высоты последней. В действительности данный вывод справедлив лишь для конкретных рассматриваемых ситуаций. Расчеты, результаты которых здесь не приводятся, показывают, что при иных параметрах среды с увеличением радиусаrполости возможны случаи, когда борта карстовой полости будут терять устойчивость. Это означает изменение ее размера, как следствие, – ширины l деформируемой над ней зоны и ее деформированного состояния.

Таким образом, проделанные численные эксперименты дали возможность наглядно проследить как геометрические размеры карстовой пустоты способны повлиять на реализуемое над ней в массиве деформированное состояние, а также на размеры областей проявления карстогенеза на дневной поверхности.

Заключение

В рамках задачи о моделировании кипящего слоя был проведен обзор литературы на тему "Моделирование динамики частиц в жидкости методами SPH и DEM", реализован алгоритм моделирования методом гидродинамики сглаженных частиц, решены тестовые задачи по моделированию течения газа/жидкости методом SPH, разработан алгоритм связанного моделирования методами SPH и DEM с использованием оригинальных наработок в области DEM моделирования, имеющиеся в TUHH и SPbSTU: течение жидкости в цилиндрическом канале, обтекание сферы, течение через гранулированную среду. Проведено численное моделирование аппарата с кипящим слоем и сравнение полученных результатов с результатами натурных экспериментов, проводимых в TUHH.

В рамках задачи о моделировании провала грунта была изучена литература по моделям деформирование горных массивов в рамках дискретно-элементного подхода, модифицирована и отлажена модель Bonded-ParticleModel. Написан алгоритм по моделированию деформирования горного массива и проведены его верификационные расчеты на простейших задачах (одноосное сжатие, простой сдвиг). Построена модель карстовой полости, учитывающая изменение ее формы в процессе роста. Проведено моделирование обрушения грунта при различных параметрах залегания карстовой полости (мощность, ширина). В ходе численных экспериментов было выявлено, что величина образовавшейся карстовой воронки и сценарий обрушения практически не зависит от глубины залегания карстующихся отложений, а зависит от физических свойств горных пород.

Приложение А

Процедура усреднения скорости по большому количеству частиц и построения на ее основе поперечного профиля скорости

Постановка

Пусть имеется некоторая трехмерная расчетная область Ω, в которой мы моделируем течение жидкой или газообразной среды. Среда считается дискретной и состоит из частиц. Также мы выделяем плоскость S, профиль скоростей среды на которой нас интересует (см. рис.п.1).

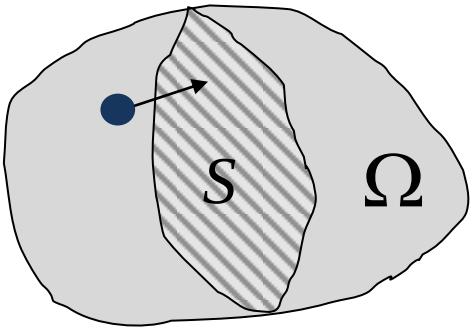


Рис.п.1. Расчетная область

Требуется определить профиль скоростей среды в рассматриваемом сечении.

Процедура

Пусть T – временной промежуток усреднения, в течение которого мы «ловим» частицы, проходящие через область S.

1) Первый этап связан с накоплением статистики о прошедших через область S частицах. Если обнаруживаем частицу, переходящую через область, запоминаем её скорость и координаты (для простоты здесь мы рассмотрим осесимметричный случай, в этом случае координата одна – радиус). Таким образом, по истечению времени T мы имеем

множество упорядоченных пар $\{r_i, V_i\}$. Пример такого множества приведен на рис.п.2.

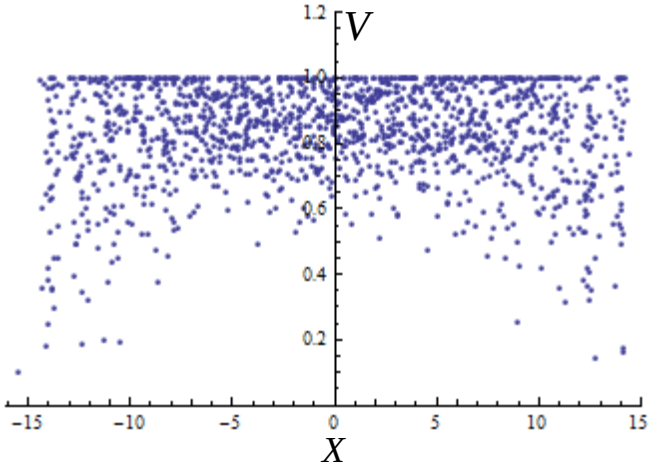


Рис.п.2. Статистика

2) Делим область S на конечные элементы, внутри каждого из которых ищем усреднённую скорость по скоростям всех частиц, через данный элемент области Sпрошедших (см. рис.п.3). Следует отметить, что длина каждого элемента не должна превышать величину h сглаживающего радиуса частиц; в противном случае вчерез некоторые слишком малые элементы частицы могут вообще не проходить и зависимость$V(r)$может оказаться немонотонной

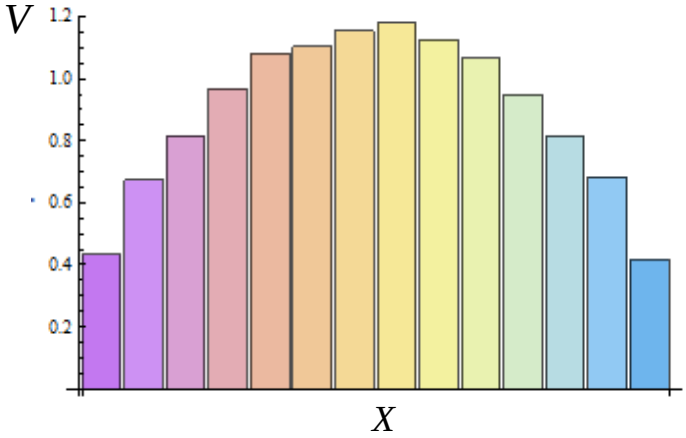


Рис.п.3. Статистика

3) По средним значениям скорости частиц в отдельных элементах области Sстроим интерполяционную кривую (см. рис.п.4)

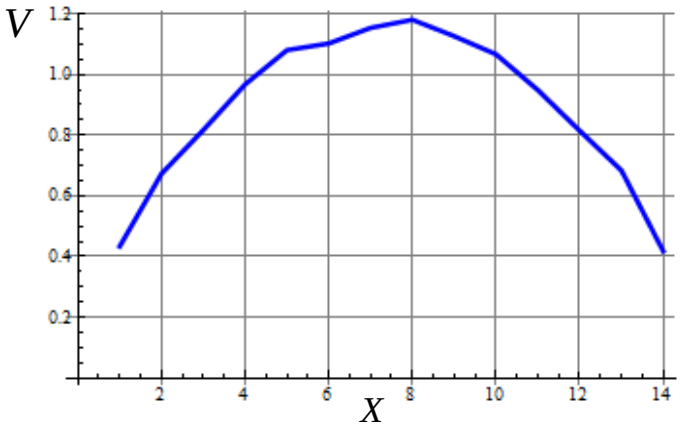


Рис.п.4. Усредненный поперечный профиль скоростей

Усредненный профиль скоростей, приведенный на рис.п.4. был также отмасштабирован по оси координат: $X = x/h$ – безразмерный параметр, где h - радиус сглаживания частиц.

Приложение В

Процедура расчета перепада давления

Постановка

Пусть имеется некоторая трехмерная расчетная область Ω, в которой мы моделируем течение жидкой или газообразной среды. Среда считается дискретной и состоит из частиц. Также мы выделяем плоскостиS_1и S_2, отстоящих друг от друга на некотором расстоянии L, и исследуем перепад давлений в течении между двумя данными плоскостями (см. рис.п.5).

Расчет перепада Δpдавлений осуществляется путём расчета средних давлений p_1 и p_2в двух поперечных сечениях S_1и S_2, отстоящих друг от друга на некотором расстоянии L и нахождения их разности$\Delta p = p_2 - p_1$(см. рис.п.5).Процедура расчета среднего давления в сечении во многом аналогична процедуре нахождения профиля скоростей в сечении.

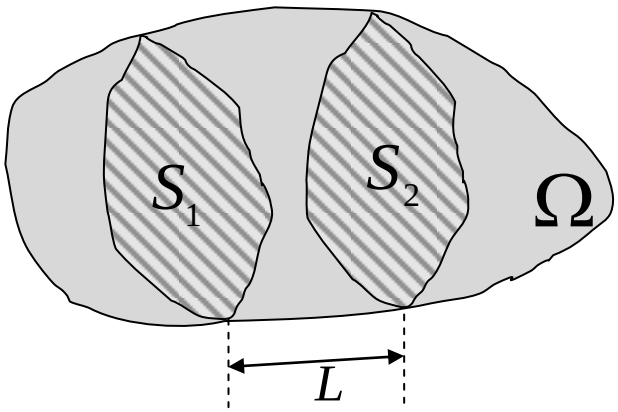


Рис.п.5. Расчет перепада давлений

Процедура

Выделяем интересующее нас сечение S (см. рис.п.1) и следим за проходящими через данное сечение частицами в течение временного интервала усреднения T. Поскольку в формализме SPH частице

приписываются такие нестандартные для дискретных сред свойства как плотность и давление, то мы без труда может сформировать в памяти компьютера массив давлений p_i всех i-хчастиц, проходивших через интересуемоесечение S

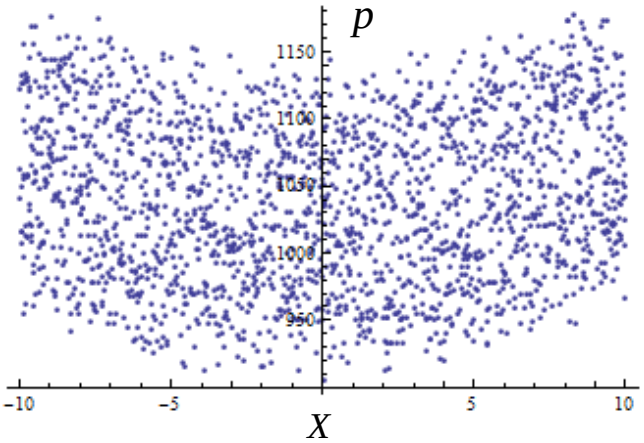


Рис.п.6. Статистика

и усреднить его по времени следующим образом:

$$\bar{p} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} p_i \qquad \text{(п.1)}$$

Проводя описанные расчеты для обоих сечений S_1 и S_2, вычисляем перепад давлений как разность усредненных давлений в сечениях

$$\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \Delta p \qquad \text{(п.2)}$$

Приложение С

Охрана труда

Основные нагрузки при выполнении данной работы: интеллектуальные, эмоциональные, зрительные, и, в меньшей степени, слуховые. Вся работа проводилась за персональным компьютером и за письменным столом, присутствовали также лабораторные эксперименты. Организация работы должна проводиться в этом случае согласно СНиП 2.2.2/2.41340-03. По природе действий вредные и опасные факторы подразделяются на следующие группы:

Физические факторы: температура, влажность и подвижность воздуха, неионизирующие электромагнитные излучения (ультрафиолетовое, видимое, инфракрасное, лазерное, микроволновое, радиочастотное, низкочастотное), статические электрические и магнитные поля, ионизирующие излучения, производственный шум, вибрация (локальная, общая), ультразвук, аэрозоли преимущественно фиброгенного действия (пыли), освещенность (отсутствие естественного освещения, недостаточная освещенность, повешенная ультрафиолетовая радиация);

- Химические факторы, в том числе некоторые вещества биологической природы (антибиотики, витамины, гормоны, ферменты);
- Биологические факторы: патогенные микроорганизмы, микроорганизмы продуценты, препараты, содержащие живые клетки и споры микроорганизмов, белковые препараты;
- Факторы трудового процесса, характеризующие тяжесть физического труда: физическая динамическая нагрузка, масса поднимаемого и перемещаемого груза, стереотипные рабочие движения, статическая нагрузка, рабочая поза, наклоны корпуса, перемещения в пространстве;

- Факторы трудового процесса, характеризующие напряженность труда: интеллектуальные, сенсорные, эмоциональные нагрузки, монотонность нагрузок, режим работы.

В помещении лаборатории или кафедры на сотрудника, работающего с вычислительной техникой, могут негативно действовать следующие факторы:

- Повышенная и пониженная температура воздуха;
- Чрезмерная запыленность и загазованность воздуха;
- Повышенная и пониженная влажность воздуха;
- Недостаточная освещенность рабочего места;
- Превышающий допустимые нормы шум;
- Повышенный уровень ионизирующего излучения;
- Повышенный уровень электромагнитных полей;
- Повышенный уровень статического электричества;
- Опасность поражения электрическим током;
- Блеклость экрана дисплея;
- Длительное пребывание в сидячем положении;
- Гиподинамия;
- Повышенные интеллектуальные и психо-эмоциональные нагрузки;
- Ненормированный рабочий день.

С.1. Требования к вентиляции, отоплению и кондиционированию воздуха

Микроклимат производственных помещений – это климат внутренней среды этих помещений, который определяется действующими на организм человека сочетаниями температуры, влажности и скорости движения воздуха. Допустимые микроклиматические условия – это такие сочетания

параметров микроклимата, которые при длительном и систематическом воздействии на человека могут вызвать напряжение реакции терморегуляции и которые не выходят за пределы физиологических приспособительных возможностей. При этом не возникает нарушений в состоянии здоровья, не наблюдаются дискомфортные теплоощущения, ухудшающие самочувствие и понижение работоспособности. Оптимальные параметры микроклимата в производственных помещениях обеспечиваются системами кондиционирования воздуха, а допустимые параметры – обычными системами вентиляции и отопления. Помещение кафедры является помещением категории 1а, то есть выполняются работы с интенсивностью энергозатрат 58-77 Вт/м3. Для создания и автоматического поддержания в лаборатории независимо от наружных условий оптимальных значений температуры, влажности, чистоты и скорости движения воздуха, в холодное время года используется водяное отопление, в теплое время года применяется кондиционирование воздуха. Кондиционер представляет собой вентиляционную установку, которая с помощью приборов автоматического регулирования поддерживает в помещении заданные параметры воздушной среды. Также одежда персонала должна соответствовать температурному режиму в помещении. Отопление, вентиляция и кондиционирование должны осуществляться согласно СНиП 2.04.05-91:

1. В холодные периоды года температура воздуха, скорость его движения и относительная влажность должны соответственно составлять: 22-24°С; 0.1 м/с; 40-60%; температура воздуха может колебаться в пределах от 21 до 25°С;
2. То же в теплые периоды года: 23-25°С; 0.1-0.2 м/с; 40-60%; температура воздуха может колебаться в пределах от 22 до 26°С.
3. Воздух, поступающий в помещение с ЭВМ, должен быть отчищен от загрязнений, в том числе от пыли и микроорганизмов. Запыленность воздуха не должна превышать требований 12.1.005-91.

С.2. Требования к уровням шума

Шум – беспорядочное сочетание различных по силе и частоте звуков. Эквивалентный (по энергии) уровень звука (дБА) непостоянного шума – уровень звука постоянного широкополосного шума, который имеет такое же среднеквадратичное звуковое давление, что и данный непостоянный шум в течение определенного интервала времени. Предельно допустимый уровень (ПДУ) шума – это уровень фактора, который при ежедневной (кроме выходных дней) работе, но не более 40 часов в неделю в течение всего рабочего стажа, не должен вызывать заболеваний или отклонений в состоянии здоровья, обнаруживаемых современными методами исследований в процессе работы или в отдаленные сроке жизни настоящего и последующего поколений. Соблюдение ПДУ шума не исключает нарушения здоровья у сверхчувствительных лиц. В нашем случае источником шумовых помех могут стать вентиляционные установки, кондиционеры и др. Длительное воздействие этих шумов отрицательно сказывается на эмоциональном состоянии персонала. Шум ухудшает условия труда оказывая вредное действие на организм человека. Работающие в условиях длительного шумового воздействия испытывают раздражительность, головные боли, головокружение, снижение памяти, повышенную утомляемость, понижение аппетита, боли в ушах и т.д. Такие нарушения в работе ряда органов и систем организма человека могут вызывать негативные изменения в эмоциональном состоянии человека вплоть до стрессовых. Под воздействием шума снижается концентрация внимания, нарушаются физиологическое функции, появляется усталость в связи с повешенными энергетическими затратами и нервно-психологическим напряжением, ухудшается речевая коммутация. Всё это снижает работоспособность человека и его производительность, качество и безопасноть труда. Длительное воздействие интенсивного шума (выше 80 дБА) на слух человека приводит к его частичной или полной потере. Для того, чтобы добиться допустимого уровня шума рекомендуется применять

звукопоглощающее покрытие стен. Защиту от шума следует выполнять в соответствии с СНиП 2.2.4/2.1.8.562-96.

С.3. Требование к естественному и искусственному освещению для помещений вычислительных комнат

Освещенность – плотность светового потока по поверхности, но которую он падает. Правильно спроектированное и выполненное производственное освещение улучшает условия зрительной работы, снижает утомляемость, способствует повышению производительности труда, благотворно влияет на производственную среду, оказывая положительное психологическое воздействие наработающего, повышает безопасность труда и снижает травматизм. Недостаточность освещения приводит к напряжению зрения, ослабляет внимание, приводит к наступлению преждевременной утомленности. Чрезмерно яркое освещение вызывает ослепление, раздражение и резь в глазах. Неправильное направление света на рабочем месте может создавать резкие тени, блики, дезориентировать работающего. Существует три вида освещения: естественное, искусственное и совмещенное (естественное и искусственное вместе). Естественное освещение – освещение помещений дневным светом, проникающим через световые проемы в наружных ограждающих конструкциях помещений. Естественное освещение характеризуется тем, что меняется в широких пределах в зависимости от времени дня, времени года, характера области и ряда других факторов. Искусственное освещение применяется при работе в темное время суток и днем, когда не удается обеспечить нормированные значения коэффициента естественного освещения (пасмурная погода, короткий световой день). Освещение, при котором недостаточное по нормам естественное освещение дополняется искусственным, называется совмещенным освещением. Искусственное освещение подразделяется на рабочее, аварийное, эвакуационное, охранное. Рабочее освещение, в свою

очередь, может быть общим или комбинированным. Общее освещение, при котором светильники размещаются в верхней зоне помещение равномерно или применительно к расположению оборудования. Комбинированное – освещение, при котором к общему добавляется местное освещение. Работа, выполняемая с использованием вычислительной техники, имеют следующие недостатки: вероятность появляения прямой блесткости, ухудшенная контрастность между изображениями и фотом, отражение экрана. Недостаточность освещения приводит к напряжению зрения, ослабляет внимание, приводит к наступлению преждевременной утомленности. Чрезмерно яркое освещение вызывает ослепление, раздражение и резь в глазах. Неправильное направление света на рабочем месте может создавать резкие тени, блики, дезориентировать работающего, Согласно СНиП 23-05-95 освещение в помещениях, где располагается вычислительная техника, должно быть смешанным: естественным и искусственным. При выполнении зрительной работы категории средней точности к.е.о. должен быть не ниже 4%. Искусственное освещение в помещениях следует осуществлять в виде комбинированной системы освещения с использованием люминесцентных источников света в светильниках общего назначения. В качестве источников должны использоваться люминесцентные лампы типа ЛБ и ДРЛ с индексом цветопередачи (R>70). В качестве светильников должны использоваться установки с преимущественно отраженным или рассеянным светораспределением (тип УСП-5-2х40, УСП-35-2х40, ЛВ003-2х40-002). Величина освещенности при искусственном освещении люминесцентными лампами должна быть в горизонтальной плоскости не ниже 300лк – для системы общего освещения и не ниже 750лк – для системы комбинированного освещения, причем с учетом работы категорий высокой зрительной точности может быть увеличена до 1000лк. Для исключения бликов отражения на экранах от светильников общего назначения необходимо применять антибликерные сетки, специальные фильтры для экранов, защитные козырьки и т.п.

Список литературы

1. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям/ Под ред. М. О. Штейнберга.— 3-е изд., перераб. и доп.— М.; Машиностроение, 1992.— 672 с: ил.
2. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой, 2007. - 304 с.
3. Лойцянский Л.Г., Механика жидкости и газа. — Л., 1950. — 676 с.
4. Ревуженко А.Ф., Стажевский С.Б., Шемякин Е.И. О структурно-дилатансионной прочности горных пород // ДАН СССР, 1989. – Т.305. – №5. – С.1077-1080.
5. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. – М.: Наука, 1990.
6. Тейлор Д. Основы механики грунтов. – М.: Стройиздат, 1960.
7. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. – М: Мир, 1987. – 640с.
8. Шлихтинг Г., Теория пограничного слоя. *“*Наука*”, М. 1969*
9. СНиП 2.02.01-83* (2000). Основания зданий и сооружений. – М.: 2000.
10. СНиП 2.01.15-90. Инженерная защита зданий и сооружений от опасных геологических процессов. Основные положения проектирования. – М.: 1990.
11. СП 11-105-97. Инженерно-геологические изыскания для строительства.- М.,2000.
12. Мониторинг экзогенных геологических процессов на территории Пермской области. – Пермь, ГИ УрО РАН, 2004.
13. Мониторинг экзогенных геологических процессов на территории Пермской области. – Пермь, ГИ УрО РАН, 2005.

14. Alberto Di Renzo, Francesco Paolo Di Maio, Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes. Chemical Engineering Science, 59,(2004) pp. 525–541
15. Cundall P.A., Strack O.D.L., A discrete numerical model for granular assemblies // Geotechnique, 29, 1979, pp. 47-65
16. Fleissner F., Eberhard P., Load Balanced Parallel Simulation of Particle-Fluid DEM-SPH Systems with Moving Boundaries // Advances in Parallel Computing, Volume 15, ISSN 0927-5452, SBN 978-1-58603-796-3 (IOS Press), 2008
17. Geldart, D. (1973). "Types of gas fluidization". *Powdertechnology* **7** (5): 285–292
18. Gingold R. A. and Monaghan J. J., "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Nonspherical Stars", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 181, 375-389 (1977)
19. Harlow F.H., A Machine Calculation Method for Hydrodynamic Problems. Los Alamos Scientific Laboratory report LAMS-1956 (1955)
20. Hoover W. G., Smooth Particle Applied Mechanics: The State of the Art, World Scientific, (2006).
21. Lucy L. B., "A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis", The Astronomical Journal 82, 1013-1024 (1977)
22. Monaghan J.J., "An introduction to SPH," Computer Physics Communications, vol. 48, pp. 88–96, 1988.
23. Potyondy, D. O., Cundall P. A. “A Bonded-Particle Model for Rock,” Int. J. Rock Mech. & Min. Sci.,. 41(8), 1329-1364 (2004)
24. Winkler F., I.G. Farben, DRP 437 970, 1922