

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики  
и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ,  
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН  
\_\_\_\_\_ А.М. Кривцов  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

магистерская диссертация

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В РАМКАХ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ**

по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое  
моделирование

Направленность 01.04.03\_02 Механика и математическое моделирование  
(международная образовательная программа)

Выполнил

Студент гр. 5040103/00201

А.Е. Вильчевская

Руководитель

профессор ВШТМиМФ,  
д.ф.-м.н.

Е.Н. Вильчевская

Санкт-Петербург – 2022

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

« » \_\_\_\_\_ 2022 г.

**ЗАДАНИЕ**

**по выполнению выпускной квалификационной работы**

студенту \_\_\_\_\_ Вильчевской Анастасии Евгеньевне, группа 5040103/00201  
фамилия, имя, отчество (при наличии), номер группы

1. Тема работы: Моделирование течения крови в рамках микрополярной теории
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 1.06.2022
3. Исходные данные по работе: Научные статьи по теме работы, экспериментальные данные (профиль скорости в тонком сосуде, зависимость вязкости от градиента скорости, характеристики кровотока в различных сосудах человеческого организма), уравнение Навье-Стокса, уравнение неразрывности, геометрические характеристики эритроцита.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): \_\_\_\_\_  
Анализ научной литературы по теме работы  
Постановка задачи течения крови по сосуду с заданной геометрией с двумя различными подходами к вводу микроструктурных параметров  
Получение скоростей и давлений в сосуде при течении крови с использованием двух разных постановок задачи  
Реализация алгоритма на языке программирования C++  
Сравнение полученных результатов для двух постановок между собой и с экспериментом  
Расчёт характеристик течения для случая сосуда переменного сечения и различных сосудов человеческого организма, анализ результатов
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): Профили скорости течения крови с использованием различных постановок задачи для сосудов разной геометрии
6. Консультанты по работе: Отсутствуют
7. Дата выдачи задания 13.05.2022

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ Е.Н. Вильчевская  
(подпись) инициалы, фамилия

Задание принял к исполнению 13.05.2022  
(дата)

Студент \_\_\_\_\_ А.Е. Вильчевская  
(подпись) инициалы, фамилия

## РЕФЕРАТ

На 60 с., 14 рисунков, 1 таблица

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ВЯЗКОСТЬ КРОВИ, АГРЕГАЦИЯ ЭРИТРОЦИТОВ, МИКРОПОЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ, МОМЕНТ ИНЕРЦИИ, ТЕЧЕНИЕ КРОВИ

Тема выпускной квалификационной работы: «Моделирование течения крови в рамках микрополярной теории».

В данной работе было исследовано течение крови по сосудам различного радиуса, в том числе переменного. Рассматривалась связь вязкости крови с агрегацией эритроцитов, проявляющейся в зависимости от скорости сдвига и координат внутри сосуда. В качестве характеристики агрегации было предложено ввести некоторый новый микроструктурный параметр и задать для него эмпирическое определяющее уравнение. В рамках двух подходов к описанию течения крови в качестве микроструктурного параметра были рассмотрены момент инерции в пространственном описании и объёмная доля эритроцитов. Система уравнений Навье-Стокса и несжимаемости, описывающая течение жидкости, была дополнена определяющим уравнением для момента инерции в одном случае и для объёмной доли в другом.

Задача была решена методом конечных объёмов для сосудов различной геометрии. Сравнение с экспериментальными данными для узкого капилляра показало эффективность применения предложенного определяющего уравнения для описания течения крови. В рамках данной работы на основе составленной эмпирической формулы были получены профили скорости в различных сечениях сосуда переменного радиуса. Кроме того, было исследовано течение по нескольким сосудам кровеносной системы человека.

## **ABSTRACT**

60 pages, 14 pictures, 1 table

**KEY WORDS:** WHOLE BLOOD VISCOSITY, RBC AGGREGATION, MICROPOLAR THEORY, MOMENT OF INERTIA, BLOOD FLOW

The subject of the graduate qualification work is "Modeling of blood flow in the framework of micropolar theory".

In the given work, the blood flow through vessels of various radii (including the case of variable cross section) was studied. The dependence of the blood viscosity on red blood cells aggregation, which changes with the shear rate and coordinates inside the vessel, was considered. It was proposed to introduce the new microstructural parameter as a characteristic of aggregation and to set an empirical constitutive equation for it. Within the framework of two approaches to the blood flow modeling, the moment of inertia in the spatial description and the volume fraction of erythrocytes were considered as a new microstructural parameter. The system of Navier-Stokes and incompressibility equations describing the flow of a fluid was supplemented by a constitutive equation for the moment of inertia in one case and for the volume fraction in the other.

The problem was solved by the finite volume method for vessels of various geometries. Comparison with the experimental data for a narrow capillary showed the effectiveness of the proposed constitutive equation for describing the blood flow. Also, velocity profiles were obtained on the basis of the compiled empirical formula for various sections of a variable radius vessel. In addition, the flow through several vessels of the human circulatory system was studied.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	6
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ ПО СОСУДУ .....	7
1.1. Основные характеристики течения крови по сосуду .....	7
1.2. Основные подходы к моделированию кровотока.....	9
1.3. Геометрия эритроцита.....	11
1.4. Постановка задачи.....	13
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ В РАМКАХ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ..	16
2.1. Вязкость как функция агрегации.....	31
2.2. Момент инерции как микроструктурный параметр в пространственном описании .....	32
2.3. Эффективная вязкость.....	23
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ОБЪЁМОВ ...	31
3.1. Обоснование выбора метода конечных объёмов для реализации задачи ....	31
3.2. Решение уравнений в безразмерном виде.....	32
3.3. Интегральная запись уравнений и построение разностной схемы.....	34
3.4. Основные детали реализации алгоритма .....	41
ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ .....	43
4.1. Сравнение с экспериментальными данными .....	43
4.2. Влияние учёта формы эритроцита.....	47
4.3. Течение в сосуде с переменным сечением.....	49
4.4. Профиль скорости в различных сосудах.....	53

ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	55
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	58

## ВВЕДЕНИЕ

Согласно статистике [15], более половины людей в мире умирают от рака, респираторных заболеваний, а в 30% случаев – от болезней сердечно-сосудистой системы. Среди них значительную часть составляют заболевания кровеносных сосудов (тромбоз, аневризма, атеросклероз), а также их следствия – инфаркт миокарда, инсульт, сердечный приступ. Одной из самых распространённых причин смерти людей в экономически развитых странах является атеросклероз [3], связанный с сужением просвета артерии вследствие образования атеросклеротических бляшек у стенок сосуда. Для диагностики и лечения сердечно-сосудистых заболеваний часто необходимо оценивать кровоток в сосудах. В целях изучения характера течения крови по сосудам было проведено множество исследований по данной теме, описывающих связь между различными гемодинамическими параметрами, такими как вязкость, агрегация эритроцитов, гематокрит и др. Также, в научной литературе описаны многочисленные подходы к моделированию кровотока, берущие за основу различные теории и различные зависимости характеристик течения крови друг от друга. Решение задачи моделирования потока крови по сосудам имеет для медицины, и, в частности, для хирургии, необычайно важное значение и может найти применение как при диагностике заболеваний, так и, например, при реконструктивных операциях на сосудах.

Одним из наиболее существенных факторов, влияющих на течение крови по сосуду, является её вязкость, величина которой зависит от множества параметров. В рамках данной выпускной квалификационной работы будет рассмотрено два подхода к моделированию течения крови, учитывающих зависимость вязкости крови от агрегации эритроцитов и их организации в потоке. В качестве оценки эффективности таких подходов будет приведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Кроме того, будет продемонстрировано применение полученных моделей к описанию течения крови по различным сосудам человеческого организма и по сосуду переменного радиуса.

# ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ ПО СОСУДУ

## 1.1 Основные характеристики течения крови по сосуду

Кровь – это жидкость, циркулирующая по кровеносным сосудам, представляющая собой суспензию форменных элементов в межклеточном веществе, называемом плазмой крови. Форменные элементы делятся на три типа: эритроциты (красные кровяные тельца), тромбоциты и лейкоциты. Наиболее многочисленные среди них – эритроциты, занимающие 99% объёма кровяных клеток и, как следствие, значительно большее всего влияющие на течение крови [4]. Плазма крови состоит из воды и растворённых в ней белков и других органических и неорганических веществ. Вязкость плазмы крови, также, как и вязкость суспензии эритроцитов в физиологическом растворе, является постоянной величиной, в первом случае зависящей только от состава и структуры веществ, содержащихся в плазме, а во втором случае – практически только от концентрации эритроцитов. Вязкость крови, однако, вследствие гидродинамического взаимодействия форменных элементов с плазмой, не является постоянной и зависит от множества факторов.

С целью демонстрации неньютоновского поведения крови было проведено множество экспериментов. Так, в статье [12] опубликованы результаты эксперимента по определению вязкости крови в зависимости от скорости сдвига и гематокрита (объёмной доли кровяных клеток). Были изучены три образца цельной крови при различных значениях гематокрита, полученных путём разбавления. На основе полученных результатов были сделаны выводы о том, что вязкость растёт по мере уменьшения градиента скорости и увеличения содержания кровяных клеток. Зависимость вязкости крови от температуры представлена в [1]. С увеличением температуры вязкость монотонно уменьшается. Однако, упомянутые выше эксперименты проведены вне человеческого организма, и их резуль-



таты могут в некоторой мере отличаться от зависимостей *in vivo*. При температурах, в пределах которых человек жизнеспособен, вязкость меняется не значительно, что упрощает моделирование.

Реологические свойства крови, в том числе зависимость вязкости от скорости сдвига и температуры, во многом обусловлены способностью эритроцитов образовывать и рушить агрегаты, деформироваться и перераспределяться в потоке крови [20]. Агрегация происходит вследствие взаимодействия белковых структур плазмы крови с эритроцитами. При небольших скоростях сдвига эритроциты могут легче объединяться друг с другом, создавая всё большее сопротивление течению, вследствие чего вязкость растёт [4]. При увеличении градиента скорости эритроциты отделяются друг от друга и вязкость, уменьшаясь, становится почти постоянной. Рост гематокрита, или объёмной доли кровяных клеток, способствует усилению формирования агрегатов и тем самым увеличивает вязкость крови. Влияние температуры на формирование агрегатов также очевидно. При повышении температуры агрегаты разрушаются [1] вследствие теплового движения, что обуславливает уменьшение вязкости. Кроме того, достаточно большой градиент скорости у стенок сосуда провоцирует смещение эритроцитов к оси сосуда, в результате чего в центре сосуда образуются более крупные агрегаты, а у его стенок появляется бесклеточный свободный слой плазмы. Тем самым, вязкость у оси сосуда больше, чем на периферии, что означает зависимость вязкости (или агрегации) от радиальной координаты. Размеры сосуда так же имеют большое значение, так как в более узких сосудах образование агрегатов выражено сильнее [22]. В артериолах, венулах и капиллярах за счёт их радиуса эффект от перераспределения эритроцитов в потоке становится более значительным [10]. Чем больше способность эритроцитов к агрегации (которая, кроме всего прочего, может зависеть и от наличия у человека патологий), тем больше толщина свободного слоя у стенок сосуда и тем больше значение вязкости у центральной оси [25]. Однако, есть и исключение: в очень тонких капиллярах, диаметр которых сравним с размером эритроцита, вязкость наоборот уменьшается

вследствие выстраивания эритроцитов вдоль оси сосуда и смазывающего действия плазмы по краям [4]. Такой эффект называется эффектом Фареуса-Линдквиста и рассматриваться в ходе данной работы не будет.

Необходимо также упомянуть влияние деформации эритроцитов на вязкость крови [25]. Изменение формы деформированных клеток влияет на сопротивление потоку, однако оно не столь значительно, как другие эффекты, поэтому эритроциты часто считают твёрдыми телами, что будет сделано и в данной работе. Не будет учтен также и такой фактор как присутствие тромбоцитов и лейкоцитов в крови, так как они занимают пренебрежимо малую часть объёма и почти не влияют на течение крови, за исключением случаев патологий, при которых концентрация этих клеток сильно увеличивается. Влияние вязкости плазмы на вязкость крови может быть значительным, так как свойства плазмы во многом определяют способность эритроцитов к агрегации, однако в данной работе вязкость плазмы будет считаться постоянной, так как её изменение, как правило, возникает только вследствие патологий.

В виду переменного характера вязкости крови, радиальный профиль скорости её течения становится более приплюснутым, чем в случае течения Пуазейля, когда вязкость постоянна [24]. В тонких сосудах, в которых наблюдается эффект Фареуса-Линдквиста, у стенок сосуда скорость возрастает за счёт свободного слоя плазмы, что делает профиль скорости ещё более плоским. Существует множество экспериментов по определению профиля скорости крови. В данной работе полученные численные результаты будут сравнены с экспериментальными данными, описанными в [19].

## 1.2. Основные подходы к моделированию кровотока

Существует множество различных подходов к моделированию течения крови по сосудам. Самое простое из существующих описаний – представление крови как ньютоновской жидкости с постоянной эффективной вязкостью. Такой

подход даёт хоть насколько-то удовлетворительные результаты только для сосудов больших диаметров, так как в них образуется меньше агрегатов эритроцитов, влияющих на вязкость, в то время как в узких сосудах применение такого описания значительно теряет в точности [9]. Однако, в случае крупных сосудов становится существенным взаимодействие крови с упругой сосудистой стенкой. В узких сосудах этим взаимодействием можно пренебречь, считая стенку сосуда недеформируемой, но способность эритроцитов к агрегации повышается и значительно влияет на вязкость [22]. В научной литературе предложено несколько способов задать переменную вязкость. Одним из них является введение зависимости вязкости крови от скорости сдвига. Существуют также модели с переменным распределением вязкости в зависимости от радиальной координаты. Например, в [8] предложено рассматривать вязкость вблизи оси сосуда как постоянную величину, а начиная с некоторой координаты, обозначающей возникновение бесклеточного слоя, уменьшающейся по направлению к стенкам сосуда. Такой подход хорошо применим к описанию течения в капиллярах, однако стоит учитывать, что толщина свободного слоя плазмы зависит от радиуса сосуда. Кроме того, часто для моделирования кровотока используется двухфазная модель, в которой эритроциты рассматриваются как твёрдые (или деформируемые) эллиптические частицы в однородной жидкости – плазме [8, 21].

В данной выпускной квалификационной работе будет получена модель течения крови, в некоторой степени объединяющая описанные выше подходы. За основу будет взята зависимость вязкости от агрегации эритроцитов, зависящей как от градиента скорости, так и от радиальной координаты. В качестве характеристики агрегации будут предложены два параметра – усреднённый по пространству момент инерции и объёмная доля эритроцитов. Во втором случае потребуется использовать двухфазную модель для расчёта эффективной вязкости в зависимости от объёмной доли. Течение крови описывается совокупностью уравнений Навье-Стокса и несжимаемости [7]. Эритроциты считаются абсолютно твёрдыми телами, связь вязкости с температурой, вязкостью плазмы и содержанием

в крови тромбоцитов и лейкоцитов не учитывается, как и деформация сосудистой стенки. Кроме того, отметим, что в данной задаче имеет место осевая симметрия, поскольку зависимость параметров течения от угловой координаты ничем не обусловлена.

### 1.3. Геометрия эритроцита

Согласно исследованиям, эритроцит имеет форму сфероида, слегка приплюснутого в центре [5]. Большие диаметры равны примерно 8,5 мкм, максимальная толщина в среднем составляет 2,4 мкм, минимальная – 1 мкм.

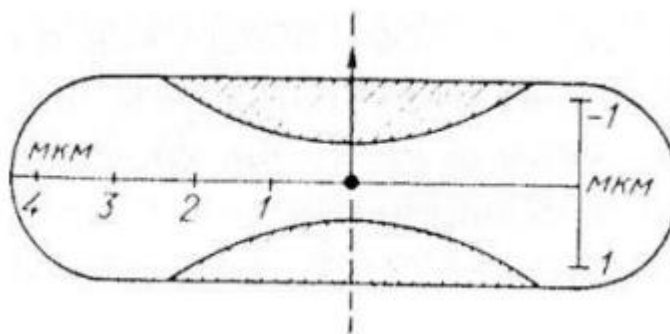


Рисунок 1.3.1. Геометрия эритроцита человека

Часто в двухфазных моделях эритроцит-плазма приплюснутостью сфероида пренебрегают с целью упрощения моделирования. Иногда эритроциты даже грубо считают шарообразными, однако такое допущение существенно влияет на точность результата, что среди прочего будет продемонстрировано в данной выпускной квалификационной работе. Далее будем рассматривать эритроцит как сфероид без центральной приплюснутости с радиусами 4 мкм и 1,1 мкм. Геометрия, учитываемая в данной работе, изображена на рисунке 1.3.2. Обычно для нахождения эффективных свойств значения радиусов не так важны, как характеристика сплюснутости  $\gamma$ , выражаемая отношением меньшей полуоси к большей.

$$\gamma = \frac{r}{R} \quad (1)$$

Для эритроцита эта характеристика равна 0.275. Также, в задачах с суспензией частиц разного размера имеет значение объём, однако в рамках данной задачи эритроциты считаются одинаковыми и их объём достаточно характеризуется объёмной долей.

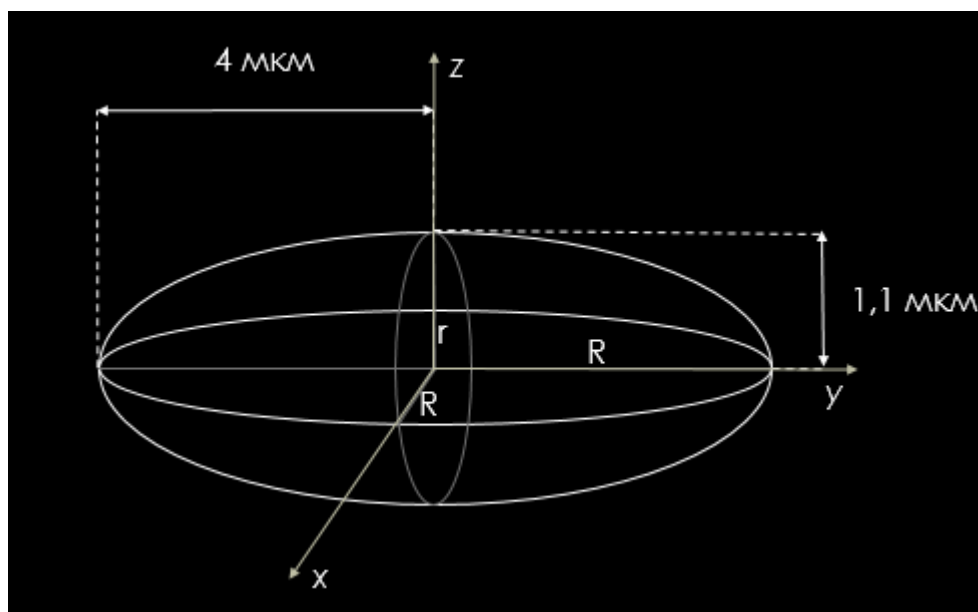


Рисунок 1.3.2. Упрощённая геометрия эритроцита человека

Ещё одна важная геометрическая характеристика – момент инерции, который, вследствие осевой симметрии эритроцита, имеет две компоненты. Тензор инерции эритроцита равен

$$\underline{\underline{J_e}} = J_1 \underline{\underline{nn}} + J_2 (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{nn}}) \quad (2)$$

где  $\underline{\underline{n}}$  – единичный вектор, сонаправленный с осью симметрии,  $\underline{\underline{I}}$  – единичный тензор второго ранга, а  $J_1, J_2$  – компоненты, равные

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{2}{5} R^2 = 6.4 \text{ мкм}^2 \\ J_2 &= \frac{1}{5} (R^2 + r^2) = 3.442 \text{ мкм}^2 \end{aligned} \quad (3)$$

#### 1.4. Постановка задачи

Основная задача данной выпускной квалификационной работы состоит в описании течения крови по сосуду постоянного или переменного радиального сечения. Требуется при заданной геометрии сосуда и скорости на входе в канал получить значения давления, радиальной и продольной компонент скорости установившегося течения в каждой точке рассматриваемого участка канала. На основе этих данных можно построить профили скоростей и давления в выбранном поперечном сечении сосуда, а также графики зависимости этих величин от координаты вдоль оси канала.

Течение крови, как и течение любой жидкости, описывается уравнением Навье-Стокса:

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}} : (\nabla \underline{v}) \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\underline{v}$  – скорость,  $p$  – давление,  $\underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}}$  – тензор вязкости четвёртого ранга, а  $\nabla$  - набла-оператор, в цилиндрических координатах имеющий вид

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \underline{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \underline{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \underline{e}_z \quad (5)$$

Цилиндрическая система координат выбрана здесь для удобства, так как сосуды имеют форму цилиндра. Упомянутая выше осевая симметрия придаёт задаче двумерный вид, уничтожая все зависящие от координаты  $\varphi$  компоненты. Так, скорость имеет вид

$$\underline{v}(t, r, z) = v_r(t, r, z) \underline{e}_r + v_z(t, r, z) \underline{e}_z \quad (6)$$

где  $v_r$  и  $v_z$  – радиальная и осевая компоненты соответственно. Кроме того, кровь будем считать несжимаемой жидкостью в постоянным значением плотности  $\rho = 1050 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Тогда, добавляя уравнение несжимаемости, получаем систему вида

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\mu}}: (\nabla \underline{v}); \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Данная система уравнений является неполной, поскольку компоненты тензора  $\underline{\underline{\mu}}$  не являются постоянными, а зависят от множества перечисленных выше факторов. Целью данной работы является доопределение системы (7) с учётом эмпирических зависимостей компонент вязкости от агрегации эритроцитов и их перераспределения в потоке крови, а также решение этой системы.

Однако, такой неполный вид системы уравнений уже позволяет ввести граничные условия. У стенок сосуда радиусом  $R$  достаточно установить условие прилипания:

$$\underline{v}|_{\rho=R} = 0 \quad (8)$$

На входе в сосуд будем задавать горизонтальную скорость  $u_0$ :

$$\begin{cases} v_z|_{z=0} = u_0; \\ v_\rho|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

На выходе из участка канала длиной  $l$  поставим условие независимости скоростей от сечения, сообщающее о том, что течение установилось:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_z}{\partial z}|_{z=l} = 0; \\ \frac{\partial v_\rho}{\partial z}|_{z=l} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Течение крови по сосудам в человеческом организме можно считать установившимся, поэтому в качестве решения интересно именно распределение скоростей и давлений, не зависящее от времени. Однако, в данной работе в общем виде решена нестационарная задача. Это позволяет задать на входе в канал простое граничное условие в виде горизонтальной скорости, ведь с течением времени и по мере удаления от начальной координаты профиль скорости перестаёт зависеть от профиля на входе, и роль играет только величина расхода. Значения скоростей и давлений будут соответствовать поставленной задаче только в тот

момент и при тех координатах, при которых течение установится как по времени, так и по сечению. В любом случае, нестационарная задача обязывает ввести начальное условие. Пусть в нулевой момент времени все скорости будут равны нулю (жидкость в канале отсутствует):

$$\underline{v}|_{t=0} = 0 \quad (11)$$

Таким образом, имеем неполную систему дифференциальных уравнений (7) с начальными и граничными условиями на скорость, определяемыми равенствами (8) - (11). В следующих главах будет описано введение уравнений, замыкающих систему, численное решение задачи и анализ полученных результатов.



## ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ В РАМКАХ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ

### 2.1. Вязкость как функция агрегации

Как описано в главе 1, переменный характер вязкости крови во многом обусловлен способностью эритроцитов образовывать агрегаты, тем самым увеличивая сопротивление потоку. При высоких скоростях сдвига вязкость растёт с увеличением агрегации, а при низких – уменьшается, что связано с образованием бесклеточного слоя в узких сосудах. В этой главе будет предложено два способа охарактеризовать агрегацию с помощью измеримой физической величины. В первом случае за такую характеристику будет принят шаровой тензор инерции, который коррелирует с размером образованных агрегатов, а во втором случае – объёмная доля эритроцитов, которая показывает количество эритроцитов в агрегате. Допустимость ввода таких параметров будет пояснена в следующих разделах данной главы.

Представляя кровь как суспензию эритроцитов в плазме необходимо принимать во внимание ориентацию сфероидальных частиц в пространстве. Для простоты можно считать распределение ориентаций случайным, тогда кровь будет обладать изотропией и вязкость будет одинаковой во всех направлениях. В таком случае тензор вязкости четвёртого ранга станет изотропным и система (7) упростится до (12)

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + (\nabla \mu(A)) \cdot (\nabla \underline{v}) + \mu(A) \Delta \underline{v}; \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

где  $A$  характеризует агрегацию. Тогда, расписывая первое уравнение по компонентам вдоль радиуса и вдоль оси сосуда в цилиндрической системе координат, получим для радиальной компоненты

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_r(r, z)}{\partial t} + \rho \left( v_r(r, z) \frac{\partial v_r(r, z)}{\partial r} + v_z(r, z) \frac{\partial v_r(r, z)}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial \mu(A)}{\partial r} \frac{\partial v_r(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial \mu(A)}{\partial z} \frac{\partial v_r(r, z)}{\partial z} + \\ + \mu(A) \left( \frac{\partial^2 v_r(r, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r(r, z)}{\partial r} - \frac{v_r(r, z)}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r(r, z)}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

и для компоненты по оси  $Z$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_z(r,z)}{\partial t} + \rho \left( v_r(r,z) \frac{\partial v_z(r,z)}{\partial r} + v_z(r,z) \frac{\partial v_z(r,z)}{\partial z} \right) = \\ = - \frac{\partial p(r,z)}{\partial z} + \frac{\partial \mu(A)}{\partial r} \frac{\partial v_z(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial \mu(A)}{\partial z} \frac{\partial v_z(r,z)}{\partial z} + \\ + \mu(A) \left( \frac{\partial^2 v_z(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z(r,z)}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Однако, для описания течения крови по узким капиллярам допущение о случайном распределении ориентаций становится ошибочным, поскольку эритроциты выстраиваются вдоль оси сосуда. В таком случае имеет место трансверсальная изотропия, и тензор вязкости четвёртого ранга представляется в  $T$ -базисе следующим образом

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}} = \sum_{p=1}^6 \mu_p \underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_p \quad (15)$$

где тензоры  $\underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_p$  имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_1 &= \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_2 = \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}}, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_3 = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}}, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_4 = \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_5 &= \left( \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \right)^s = \frac{1}{4} \left( \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k + \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \right) \\ \underline{\underline{\underline{\underline{T}}}}_6 &= \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} &= \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}}, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_s \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_s + \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_s \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_s \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k \right) \\ &\underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_k, \underline{\underline{\underline{\underline{e}}}}_s \perp \underline{\underline{\underline{\underline{m}}}}, \quad k, s = 1, 2 \end{aligned} \quad (16)$$

В рамках данной выпускной квалификационной работы численно решена задача лишь для случая изотропии. Случай эритроцитов, выровненных по одной оси и промежуточный случай преимущественной ориентации эритроцитов в одном направлении, характерный при переходе более крупных сосудов к тонким капиллярам, выходит за рамки данной работы.

## 2.2. Момент инерции как микроструктурный параметр в пространственном описании

В теории микрополярных сред Эрингена [14] тензор инерции элемента сплошной среды в сочетании с его угловой скоростью позволяет описывать вращение частиц материального континуума как твёрдого тела. При этом вид и форма тензора инерции не меняются в масштабе сплошной среды. Тем не менее, для некоторых материалов это свойство перестаёт быть справедливым. В [13, 16] предложено расширение микрополярной теории в рамках пространственного описания, при котором элементарный объём содержит разные микрочастицы в разные моменты времени. В такой формулировке становятся возможными структурные изменения, происходящие за счёт консолидации или дефрагментации частиц, а также оттока и притока вещества в элементарном объёме. Тензор инерции элементарного объёма становится новым, способным изменяться, независимым микроструктурным параметром, для которого необходимо дополнительное определяющее уравнение.

В контексте поставленной задачи удобно использовать момент инерции как характеристику агрегации эритроцитов. Он может меняться в зависимости от образования или разрушения агрегатов, а также за счёт перераспределения клеток в потоке крови. В рамках подхода, описанного в [16] тензор инерции как свойство на макроуровне, вводится с помощью усреднения по элементарному объёму  $V$ . Пусть внутри данного объёма находится  $N$  эритроцитов и их агрегатов с массой  $m_i$  и тензором инерции  $\hat{\underline{\underline{J}}}_i$ . Тогда удельный момент инерции  $\underline{\underline{J}}$  элементарного объёма равен

$$\underline{\underline{J}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \hat{\underline{\underline{J}}}_i, \quad m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i \quad (17)$$

Одиночные эритроциты в крови могут быть ориентированы случайным образом, а их агрегаты при этом обычно имеют неправильную форму и совершенно разный размер. В то же время гомогенизированный тензор инерции является шаровым на континуальном уровне и равен

$$\underline{\underline{J}} = J \underline{\underline{I}} \quad (18)$$

где  $\underline{\underline{I}}$  – единичный тензор второго ранга. Изотропия появляется из-за случайного распределения агрегатов по ориентации, размеру и форме, и в контексте сосудов, диаметр которых сравним с размерами эритроцита, теряет свою справедливость.

В рамках пространственного описания момент инерции может меняться не только за счёт вращения частиц как твёрдых тел (что соответствует повороту тензора инерции вместе с частицей), но и за счёт потока инерции и внутренних структурных преобразований. Тогда уравнение баланса момента инерции записывают в следующем виде

$$\frac{\delta \underline{\underline{J}}}{\delta t} = \underline{\underline{\omega}} \times \underline{\underline{J}} - \underline{\underline{J}} \times \underline{\underline{\omega}} + \underline{\underline{\chi}} \quad (18)$$

где  $\underline{\underline{\chi}}$  – некоторый источниковый член, который может быть функцией множества величин, в зависимости от задачи [16, 23]. Тем самым задаётся новое определяющее уравнение, как правило кинематическое. Однако, иногда представляется возможным задать не кинематическое, а алгебраическое определяющее уравнение для момента инерции. Например, в рамках данной работы интерес представляет стационарное течение крови с вязкостью, зависящей от агрегации, характеризуемой моментом инерции. Тогда, имея систему уравнений (12) с  $\mu = \mu(J)$  достаточно ввести алгебраическое определяющее уравнение для момента инерции в виде

$$J = \chi\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) \quad (19)$$

Здесь агрегация введена как функция координат и скорости сдвига. Как было упомянуто в работе ранее, зависимость агрегации от температуры, свойств плазмы крови и содержания в крови других клеток, кроме эритроцитов, учтена не будет. Угловые скорости в данной задаче равны нулю. Тогда имеем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + (\nabla \mu(J)) \cdot (\nabla \underline{v}) + \mu(J) \Delta \underline{v}; \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0; \\ J = \chi\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) \end{array} \right. \quad (20)$$

Эмпирическая формула для  $\chi$  будет получена далее на основе изученных зависимостей агрегации от параметров течения.

Для начала рассмотрим, как зависит способность эритроцитов к агрегации от градиента скорости при фиксированной координате. Известно, что при очень низких скоростях сдвига вязкость уменьшается с увеличением агрегации, а при высоких увеличивается. Зависимость же вязкости от скорости сдвига экспериментально получена в работе [12].

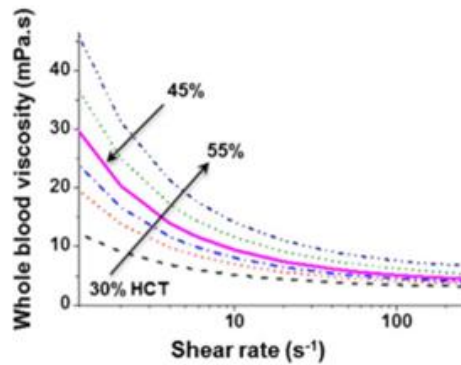


Рисунок 2.2.1. Зависимость вязкости крови от скорости сдвига [12]

Объединяя перечисленные выше закономерности, можно примерно обозначить характер зависимости агрегации от скорости сдвига. Получается, что при росте скорости сдвига сначала агрегация растёт, начиная с некоторого значения, а затем начинает снижаться и в пределе достигает минимального значения, равного моменту инерции одиночного эритроцита. Возрастанием при низких скоростях сдвига можно пренебречь, так как это касается только очень тонких сосудов. Тогда при фиксированном радиусе эмпирическое выражение для момента инерции можно записать в следующем виде

$$J_r \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{M}{c + \frac{\partial v}{\partial r}} + J_{min} \quad (21)$$

где  $M, C$  – некоторые константы,  $J_{min}$  – минимальный момент инерции.

Теперь рассмотрим, каким образом будет зависеть агрегация от радиальной координаты при фиксированной скорости сдвига. Эритроцитам свойственно мигрировать к оси сосуда, вследствие чего по направлению к центру канала агрегация растёт, так как клеткам проще слипаться друг с другом. Между тем, по краям канала, у стенок, агрегаты не образуются и значение агрегации минимально. Тогда при определённом значении градиента скорости будем считать распределение агрегации по сечению постоянным в центре сосуда и снижающимся линейно до нуля у стенок сосуда согласно формуле

$$J_{\frac{\partial v}{\partial r}}(r) = \frac{K}{h} \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (22)$$

где  $K$  – числовая константа,  $R$  – радиус сосуда,  $h$  – толщина свободного слоя плазмы у стенок сосуда, выраженного в доле от радиуса. Значение  $h$  зависит от радиуса сосуда и может быть определено из экспериментальных графиков [21]. Объединяя выражения (21) и (22), получим эмпирическую формулу, выражающую зависимость момента инерции от градиента скорости и координат

$$\begin{cases} J\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) = \frac{B}{C + \frac{\partial v}{\partial r}} + J_{min}, & \frac{r}{R} < 1 - h; \\ J\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) = \frac{1}{h} \left(\frac{B}{C + \frac{\partial v}{\partial r}} + J_{min}\right) \left(1 - \frac{r}{R(z)}\right), & \frac{r}{R} \geq 1 - h \end{cases} \quad (23)$$

где  $B, C$  – некоторые константы,  $J_{min}$  – минимальный момент инерции,  $R$  – радиус канала, в общем виде переменный, зависящий от положения поперечного сечения или, иначе, координаты  $z$ . Таким образом, составлено определяющее уравнение для момента инерции, замыкающее систему уравнений (20). Полученная система примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + (\nabla \mu(J(\nabla \underline{v}, r, z))) \cdot (\nabla \underline{v}) + \mu(J(\nabla \underline{v}, r, z)) \Delta \underline{v}; \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0; \\ \left\{ \begin{array}{l} J\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial r}, r, z\right) = \frac{B}{C + \frac{\partial \underline{v}}{\partial r}} + J_{min}, \quad \frac{r}{R} < 1 - h; \\ J\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial r}, r, z\right) = \frac{1}{h} \left( \frac{B}{C + \frac{\partial \underline{v}}{\partial r}} + J_{min} \right) \left( 1 - \frac{r}{R(z)} \right), \quad \frac{r}{R} \geq 1 - h \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (24)$$

Принимая во внимание корреляцию переменного характера вязкости с агрегацией, положим зависимость вязкости от момента инерции как линейную

$$\mu = C_1 J + \mu_0 \quad (25)$$

где  $\mu_0$  – вязкость плазмы крови. Тем самым, вязкость крови складывается из вязкости плазмы и влияния эритроцитов на вязкость.

Тем самым, такая постановка позволяет задавать вязкость плазмы  $\mu_0$  как параметр и, при необходимости, менять его. В данной работе при численном решении учитывается значение  $\mu_0$  равное

$$\mu_0 = 0,0014 \text{ Па}\cdot\text{с}$$

Следующим шагом необходимо определить все константы, присутствующие в системе, чтобы сделать возможным её численное решение. Минимальный момент инерции, как было указано ранее, численно равен моменту инерции единичного эритроцита в единицах  $\text{м}^2$ . Однако эритроцит имеет форму сфероида и его тензор инерции имеет две компоненты. Поскольку определяющее уравнение (23) составлено для гомогенизированного изотропного тензора инерции (точнее, его единственной компоненты), то за значение  $J_{min}$  следует принять компоненту усреднённого по пространству тензора инерции эритроцита, записанного в виде (2). Тогда, обозначая угловыми скобками среднюю величину, следует записать

$$\langle \underline{J_e} \rangle = J_1 \langle \underline{nn} \rangle + J_2 \left( \underline{I} - \langle \underline{nn} \rangle \right) \quad (26)$$

Учитывая, что полученный тензор должен быть изотропным, и вычисляя след обоих тензоров, получаем  $\langle \underline{nn} \rangle = \frac{1}{3} \underline{I}$ , что ведёт к равенству

$$\langle \underline{J_e} \rangle = \left( \frac{1}{3}J_1 + \frac{2}{3}J_2 \right) \underline{I} \quad (27)$$

где выражение в скобках принимаем за  $J_{min}$ .

Остальные коэффициенты, присутствующие в системе (24) находятся на основе зависимости вязкости от градиента скорости, измеренной экспериментально в [12], принятой при радиальной координате, равной половине радиуса просвета сосуда. Полученные значения констант системы (24) и равенстве (25) равны

$$\begin{aligned} B &= 8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}; \quad C = 1,2 \text{ с}^{-1}; \\ C_1 &= 4,5 \cdot 10^8 \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}; \quad \mu_0 = 0,0014 \text{ Па} \cdot \text{с}; \\ J_{min} &= 4,428 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, поставлена задача течения крови по сосуду переменного диаметра с вязкостью, зависящей от агрегации эритроцитов, характеризуемой изотропным моментом инерции.

### 2.3. Эффективная вязкость

Одной из самых распространённых задач теории гетерогенных (или, в широком смысле, многокомпонентных) сред является поиск так называемых эффективных свойств. Рассматривая некоторый объём гетерогенной среды, в котором находится такое количество неоднородностей, чтобы его можно было считать репрезентативным, можно ввести в нём, например, средние напряжения и деформации. Упругие константы, связывающие их, будут называться эффективными свойствами этого объёма. Нахождение эффективных параметров связано с гомогенизацией среды внутри репрезентативного объёма. Тем самым, осуществляется переход с микро- на макроуровень. Подробные исследования на эту тему можно найти, например, в [17] или в [18].



В контексте задачи, поставленной в данной выпускной квалификационной работе, интересно нахождение эффективной вязкости крови с учётом вклада отдельных эритроцитов в сопротивление течению плазмы. Эффективная вязкость течения жидкости связывает между собой тензор напряжений и тензор скоростей деформации согласно

$$\underline{\underline{\tau}} = 2 \mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (29)$$

Для определения эффективных свойств в теории гетерогенных сред вводят некоторый микроструктурный параметр (или параметры), представляющий реальный вклад отдельных неоднородностей в рассматриваемое свойство, что позволяет дать количественную характеристику микроструктуры [18]. Определение такого параметра в общем смысле нетривиальная задача. Наиболее часто в качестве микроструктурного параметра используется объёмная доля  $\phi$ , однако она подходит не для всех задач.

В данной работе эритроциты можно считать одинаковыми с точки зрения формы и объёма случайно ориентированными сфероидами, что позволяет рассматривать объёмную долю клеток как микроструктурный параметр, от которого зависит эффективная вязкость. Между тем, задача усложняется переменным характером этой объёмной доли. Действительно, образование и разрушение агрегатов можно описать не только изменением момента инерции, как это было сделано в предыдущем разделе данной главы, но и увеличением и уменьшением концентрации (или объёмной доли) эритроцитов в зависимости от координаты и скорости сдвига. В подходе с использованием момента инерции агрегаты характеризовались их размером, в то время как параметр объёмной доли даёт представление о количестве эритроцитов в одном агрегате. Тем самым, аналогично приведённым в разделе 2.2 рассуждениям, приходим к выводу о необходимости введения определяющего уравнения для объёмной доли эритроцитов, в контексте данной задачи, алгебраического:

$$\phi = X\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) \quad (30)$$

Тогда систему уравнений, описывающую течение крови, при описанном выше подходе можно записать в виде

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\mu_{eff}(\phi)}}: (\nabla \underline{v}); \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0; \\ \phi = X\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) \end{cases} \quad (31)$$

Поскольку объёмная доля эритроцитов характеризует их агрегацию, её определяющее уравнение можно составить в виде, аналогичном (23). Действительно, зависимость этой величины от градиента скорости и координат имеет смысл ввести, исходя из тех же самых эмпирических зависимостей, что и в предыдущем разделе данной главы. Тогда третье уравнение в системе (31) примет вид

$$\begin{cases} \phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) = \frac{A_1}{A_2 + \frac{\partial v}{\partial r}} + \phi_0, & \frac{r}{R} < 1 - h; \\ \phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) = \frac{1}{h} \left( \frac{A_1}{A_2 + \frac{\partial v}{\partial r}} + \phi_0 \right) \left( 1 - \frac{r}{R(z)} \right), & \frac{r}{R} \geq 1 - h \end{cases} \quad (32)$$

где  $A_1, A_2$  – числовые константы,  $R$  – радиус сосуда, в случае переменного сечения зависящий от координаты  $z$ ,  $\phi_0$  – минимальная объёмная доля эритроцитов в крови,  $h$  – толщина свободного слоя плазмы.

Открытым остаётся вопрос об определении эффективной вязкости в зависимости от объёмной доли эритроцитов. Вообще, на вклад отдельных неоднородностей в эффективное свойство имеет влияние их взаимодействие между собой. Однако, часто этим взаимодействием пренебрегают и рассматривают неоднородности как изолированные. Такой подход называется приближением невзаимодействия (NIA) и ставит своей основной задачей определение вклада отдельной неоднородности в общее свойство с учётом формы, ориентации и материальных констант, присущих этой неоднородности [17, 18].

В рамках NIA вводятся так называемые тензоры вклада различных свойств (например, тензор вклада жёсткости [18]), которые характеризуют вклад отдельных частиц в это эффективное свойство. Так, в [17] введён тензор вклада текучести, то есть величины, обратной вязкости. Действительно, удвоенный тензор скоростей деформации в репрезентативном объёме, содержащем изолированную частицу (в данном случае эритроцит), можно записать как

$$\underline{\underline{2\varepsilon}} = \underline{\underline{{}^4f_0}} : \underline{\underline{\tau_0}} + 2\underline{\underline{\Delta\varepsilon}} \quad (33)$$

где  $\underline{\underline{{}^4f_0}}$  – тензор текучести окружающей среды (в данном случае плазмы крови),  $\underline{\underline{\tau_0}}$  – тензор напряжений в рассматриваемом объёме,  $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}$  – дополнительный тензор скоростей из-за влияния эритроцита. Поскольку  $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}$  является функцией  $\underline{\underline{\tau_0}}$ , можно записать

$$\underline{\underline{2\varepsilon}} = \underline{\underline{{}^4f_0}} : \underline{\underline{\tau_0}} + \frac{V^*}{V} \underline{\underline{{}^4L}} : \underline{\underline{\tau_0}} = \left( \underbrace{\underline{\underline{{}^4f_0}} + \frac{V^*}{V} \underline{\underline{{}^4L}}}_{\underline{\underline{{}^4f_*}}} \right) : \underline{\underline{\tau_0}} \quad (34)$$

где  $\underline{\underline{{}^4L}}$  – тензор вклада текучести четвёртого ранга, отношение  $\frac{V^*}{V}$  характеризует объёмную долю эритроцита,  $\underline{\underline{{}^4f_*}}$  – эффективный тензор текучести. Тензор вклада зависит от формы эритроцита (то есть его сплюснутости  $\gamma$ ) и от вязкости плазмы крови. В [17] предложено провести аналогию между случаем вязкости и упругости, и положить

$$\underline{\underline{{}^4L}} = 2 \underline{\underline{{}^4H}}_{G_0=\mu_0, K_0=\infty}^{rigid} \quad (35)$$

где  $\underline{\underline{{}^4H}}$  – тензор вклада податливости абсолютно твёрдой частицы единичного объёма в несжимаемой упругой матрице, полученный для частицы той же формы заменой модуля сдвига  $G_0$  на вязкость фоновой жидкости  $\mu_0$ .

Согласно [1] для задачи упругости тензор  $\underline{\underline{4H}}$  представляется в виде

$$\underline{\underline{4H}} = \frac{v^*}{v} \left[ \left( \underline{\underline{4S_1}} - \underline{\underline{4S_0}} \right)^{-1} + \underline{\underline{4Q}} \right]^{-1} \quad (36)$$

где  $\underline{\underline{4S_0}}, \underline{\underline{4S_1}}$  – тензоры податливости матрицы и частицы,  $\underline{\underline{4Q}}$  – тензор Хилла. Так как эритроцит имеет форму сфероида, обладающего осевой симметрией, тензоры  $\underline{\underline{4L}}, \underline{\underline{4H}}, \underline{\underline{4S}}, \underline{\underline{4Q}}$  можно разложить в трансверсально-изотропном базисе (16) следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{4H}} &= \sum_{p=1}^6 h_p \underline{\underline{4T_p}}; \\ \underline{\underline{4L}} &= \sum_{p=1}^6 l_p \underline{\underline{4T_p}}, \quad l_p = 2h_p; \\ \underline{\underline{4S}} &= \sum_{p=1}^6 s_p(G, K) \underline{\underline{4T_p}}; \\ \underline{\underline{4Q}} &= \sum_{p=1}^6 q_p(G, \gamma) \underline{\underline{4T_p}} \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь  $G, K$  – модуль сдвига и объёмный модуль. Тогда, поставив тензора в виде (37) в равенство (36) и переходя к тензору вклада текучести, положив для абсолютно твёрдого эритроцита  $\mu_1 = K_1 = \infty$  и для несжимаемой плазмы крови  $K_0 = \infty$  получим компоненты тензора  $\underline{\underline{4L}}$ :

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{1}{36\mu_0 f_1}; & l_2 &= -\frac{1}{\mu_0(f_0 + f_1)}; & l_3 &= l_4 = \frac{1}{18\mu_0 f_1} \\ l_5 &= -\frac{2}{\mu_0(1 - f_0 - 4f_1)}; & l_6 &= -\frac{1}{9\mu_0 f_1} \end{aligned} \quad (38)$$

где функции  $f_0, f_1$  – функции сплюснутости эритроцита  $\gamma$  согласно формулам [1]:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{\gamma^2(1-g)}{2(\gamma^2-1)}, & f_1 &= \frac{\gamma^2}{4(\gamma^2-1)^2} ((2\gamma^2 + 1)g - 3) \\ g(\gamma) &= \frac{1}{\gamma\sqrt{1-\gamma^2}} \arctan \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}, \quad \gamma < 1 \end{aligned} \quad (39)$$

Принимая во внимание случайность ориентации эритроцитов в потоке крови, усредним тензор вклада текучести по пространству

$$\left\langle \underline{\underline{L}} \right\rangle = \left( \frac{6l_1 + 2l_2 + l_5}{5} \right) \left( \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{II}} \right) \quad (40)$$

Учитывая, что все коэффициенты в разложении тензора вклада в трансверсально-изотропном базисе представляют собой число, делённое на вязкость плазмы, получим для эффективного изотропного тензора текучести

$$\underline{\underline{f}}_* = f_0 \left( \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{II}} \right) + \frac{1}{\mu_0} \phi M \left( \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{II}} \right) \quad (41)$$

где  $M = \mu_0 \frac{6l_1 + 2l_2 + l_5}{5}$ . Тогда для каждой компоненты тензора текучести получим

$$f = f_0 + \frac{1}{\mu_0} M \phi \quad (42)$$

И, следовательно, для вязкости как обратной величины:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + M \phi} \quad (43)$$

Формула (43) была так же получена в [17]. Значение числового параметра  $M$  зависит только от формы сфероида, а точнее, от его сплюснутости  $\gamma$ . Иногда эритроциты грубо рассматривают как шары, что упрощает вычисления, но при этом ведёт к довольно сильному уменьшению точности результата. В рамках данной выпускной квалификационной работы будет проведено сравнение таких подходов между собой. В таблице 2.3.1 приведены числовые значения для функций  $f_0$ ,  $f_1$  и числа  $M$  для включений в виде сфер и сфероидов со значением  $\gamma$  как в принятой в главе 1 данной работы геометрии эритроцита. Видно, что при моделировании эритроцитов как сфер вычисления значительно упрощаются. Полученный в результате числовой параметр  $M$  не очень сильно отличается от своего значения для сфероидов, однако, как будет показано далее, такое допущение значительно влияет на результаты расчёта компоненты продольной скорости, вследствие чего упрощение необходимых вычислений ведёт к грубому уменьшению точности полученного решения.

Таблица 2.3.1 Значения числовых констант для разной формы включений

Форма включений	$\gamma$	$f_0$	$f_1$	$M$
Сферы	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{5}{2}$
Сфероиды	0.275	0.159	0.058	-3.07

Таким образом, задача течения крови по сосуду переменного диаметра с вязкостью, зависящей от переменной объёмной доли эритроцитов, описывается следующей системой уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\nabla p + \left( \nabla \left( \frac{\mu_0}{1+M\phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right)} \right) \right) \cdot (\nabla \underline{v}) + \frac{\mu_0}{1+M\phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right)} \Delta \underline{v}; \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0; \\ \left\{ \begin{array}{l} \phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) = \frac{A_1}{A_2 + \frac{\partial v}{\partial r}} + \phi_0, \quad \frac{r}{R} < 1 - h; \\ \phi\left(\frac{\partial v}{\partial r}, r, z\right) = \frac{1}{h} \left( \frac{A_1}{A_2 + \frac{\partial v}{\partial r}} + \phi_0 \right) \left( 1 - \frac{r}{R(z)} \right), \quad \frac{r}{R} \geq 1 - h \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (44)$$

Числовые константы  $A_1$ ,  $A_2$  и  $\phi_0$  принимаются такими, чтобы зависимость вязкости от градиента скорости при радиальной координате, равной половине радиуса сосуда, соответствовала экспериментальной кривой, полученной в [12]. Тем самым, перечисленные выше коэффициенты берутся равными

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,74 \text{ с}^{-1} \\ A_2 &= 6,34 \text{ с}^{-1} \\ \phi_0 &= 0,19 \end{aligned} \quad (45)$$

Значение константы  $\phi_0$  хорошо коррелирует с её физическим смыслом – это минимальное значение объёмной доли эритроцитов (или гематокрита) в человеческом организме.

Стоит отметить, что в данной постановке задача течения крови может быть в общем смысле решена и для неслучайных ориентаций эритроцитов. Тем самым, значительно повышается область применимости её решения. Например, в узких капиллярах эритроцитам свойственно выстраиваться вдоль оси сосуда так, что ось их симметрии перпендикулярна течению. При переходе более крупных сосудов в узкие для эритроцитов в зависимости от радиуса поперечного сечения характерна та или иная преимущественная ориентация. В таких ситуациях тензор вязкости четвёртого ранга будет трансверсально-изотропным, что при подстановке в (4) даст двумерную вязкость с компонентами, одна из которых отвечает за сопротивление течению по радиусу, а вторая оказывает сопротивление движению вдоль оси сосуда. В рамках данной выпускной квалификационной работы такое расширение реализовано не было, однако это открывает новые возможности для моделирования течения крови. Также, для описания кровотока в узких капиллярах могут быть написаны другие определяющие уравнения для момента инерции и объёмной доли эритроцитов.

## ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ОБЪЁМОВ

### 3.1. Обоснование выбора метода конечных объёмов для реализации задачи

Согласно предыдущей главе, имеем систему дифференциальных уравнений в частных производных, записанную, в зависимости от постановки задачи, в виде (24) или (44). Аналитическое решение таких систем, если оно существует, является обычно очень трудоёмким. Существует множество методов, позволяющих решать уравнения численно. Каждый метод имеет свои преимущества и недостатки и в большей или меньшей степени подходит для решения конкретной задачи. Основные методы, используемые для решения дифференциальных уравнений с определёнными граничными и начальными условиями, - это метод конечных разностей, метод конечных объёмов и метод конечных элементов. Для реализации задачи, поставленной в данной выпускной квалификационной работе, был выбран метод конечных объёмов. Однако возникает необходимость обозначить причины выбора этого численного метода для решения задачи течения крови.

Прежде всего, следует пояснить отказ от использования метода конечных элементов в контексте данной системы уравнений. Метод конечных элементов наиболее распространён среди всех численных методов решения краевых задач, так как он применим для моделирования широкого ряда процессов. Это связано с его универсальностью, поскольку он позволяет разбивать на элементы любую область, даже очень сложную по форме. Также этот метод хорош тем, что допускает измельчение сетки в нужных подобластях, тем самым повышая точность вычислений [11]. Однако, в данной работе нет очень сложной геометрии, ведь сосуд представляет собой цилиндр, пусть даже в общем виде переменного сечения. В этом случае, по причине своей трудоёмкости метод конечных элементов уступает методу конечных разностей.

Метод конечных объёмов, в основе которого лежит разделение расчётной области на контрольные объёмы со значением в них исследуемой величины, позволяет решать дифференциальные уравнения в интегральной формулировке. Для



каждого контрольного объёма записываются соотношения, которые учитывают поток величин, содержащихся в уравнении, через поверхность этого объёма. Аппроксимация интегральных уравнений позволяет составить разностные схемы для численного решения задачи [6]. Таким образом, можно считать метод конечных объёмов расширением метода конечных разностей, которое позволяет проводить расчёты для любой формы контрольного объёма [2]. Выбор этого численного метода мотивирован цилиндрической формой расчётной области поставленной задачи, для которой необходимо использовать криволинейную сетку.

Кроме того, задача течения крови является двумерной, что требует использования алгоритма с расщеплением уравнений по двум пространственным направлениям – радиусу и продольной координате [6]. В противном случае, разностная схема может оказаться слишком сложной для решения и трудоёмкость вычислений значительно возрастёт.

### 3.2. Решение уравнений в безразмерном виде

Использование численных методов для решения задач всегда связано с погрешностью вычислений, ведь эти методы основаны на приближении расчётных значений к истинным значениям с некоторой точностью, которая может задаваться в зависимости от требований. В таком случае встаёт вопрос о допустимости тех или иных погрешностей для величин, отличающихся на несколько порядков. Например, в контексте данной работы давление может иметь порядок  $10^5$  Па, а скорость –  $10^{-1}$  м/с, что на целых 6 порядков меньше. Тогда погрешность, незначительная для давления, будет недопустимо сильно влиять на точность скорости. Описанная выше проблема легко решается приведением уравнений к безразмерному виду.

Для начала заметим, что в обеих постановках (из разделов 2.2 и 2.3 данной работы) необходимо решить совокупность уравнения Навье-Стокса и уравнения несжимаемости с переменной вязкостью. Характер изменения вязкости в двух

постановках уже будет разным, но влиять на разностную схему не будет. Тем самым, задача сводится к решению первых двух уравнений систем (24) и (44) с вязкостью как параметром, заданным с помощью некоторой функции вне разностных схем для данных уравнений. Размерные и безразмерные переменные, участвующие в уравнениях, связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \underline{v} &= [V]\underline{v}'; & p &= [P]p'; \\ t &= [T]t'; & \nabla &= \frac{1}{[L]}\nabla'. \end{aligned} \quad (46)$$

где квадратные скобки обозначают размерные коэффициенты, а новые безразмерные переменные помечены штрихом.

Подставляя (46) в первые два уравнения системы (24), получим

$$\begin{cases} \rho \frac{[V]\partial \underline{v}'}{[T]\partial t'} + \frac{\rho[V][V]}{[L]}\underline{v}' \cdot \nabla \underline{v}' = -\frac{[P]}{[L]}\nabla' p' + \frac{\mu[V]}{[L][L]}\Delta' \underline{v}'; \\ \frac{[V]}{[L]}\nabla' \cdot \underline{v}' = 0. \end{cases} \quad (47)$$

или

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{v}'}{[T]\partial t'} + \frac{[V]}{[L]}\underline{v}' \cdot \nabla \underline{v}' = -\frac{[P]}{\rho[L][V]}\nabla' p' + \frac{\mu}{\rho[L][L]}\Delta' \underline{v}'; \\ \nabla' \cdot \underline{v}' = 0. \end{cases} \quad (48)$$

Примем во внимание соотношения (49) для размерных коэффициентов

$$[T] = \frac{[L]}{[V]}; \quad [P] = \rho[V][V]. \quad (49)$$

Для удобства следует объединить все размерные коэффициенты в один параметр, от которого будет зависеть решение системы. Тем самым, значения физических величин будут эффективно учитываться посредством данного параметра. Для данной системы такой параметр соответствует числу Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho[L][V]}{\mu} \quad (50)$$

Тогда в безразмерном виде система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{v}'}{\partial t'} + \underline{v}' \cdot \nabla \underline{v}' = -\nabla' p' + \frac{1}{Re}\Delta' \underline{v}'; \\ \nabla' \cdot \underline{v}' = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Именно ввод числа Рейнольдса позволяет учитывать переменный характер вязкости отдельно от решения уравнений Навье-Стокса и несжимаемости. В случае постоянной вязкости число Рейнольдса будет общим для всей расчётной области, а для случая неньютоновского поведения может вычисляться отдельно в каждой элементарной ячейке сетки. В данной работе число Рейнольдса представляет из себя локальную характеристику, зависящую от координат и градиента скорости в соответствии с выбором постановки задачи (24) или (44).

Разумеется, адекватный анализ результатов возможен с величинами, не лишёнными размерностей, поэтому в конце расчётов требуется с помощью преобразований, обратных к (46), вернуться обратно к размерным величинам.

### 3.3. Интегральная запись уравнений и построение разностной схемы

Применение метода конечных объёмов в силу своего определения требует записи уравнений, которые необходимо решить, в интегральной форме. Перевести дифференциальные уравнения в интегральный вид позволяет применение теоремы Гаусса-Остроградского

$$\int_V \nabla \cdot F dV = \int_S \underline{n} \cdot F dS \quad (52)$$

где интеграл дивергенции некоторой скалярной, векторной или тензорной величины  $F$  по объёму  $V$  приравнивается к интегралу по поверхности площадью  $S$ , ограничивающей этот объём. Здесь  $\underline{n}$  – внешняя нормаль к поверхности.

Использование теоремы Гаусса-Остроградского преобразовывает систему (51) в (53):

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\oint \underline{n} \cdot (-v\underline{v} - p\underline{I} + \frac{1}{Re} \nabla v) ds}{V}; \\ \frac{\oint \underline{n} \cdot v ds}{V} = 0. \end{cases} \quad (53)$$

Для удобства разобьём первый интеграл системы (53) на три более простых интеграла  $\oint A$ ,  $\oint B$  и  $\oint C$ , чтобы в дальнейшем вычислять их отдельно.

$$\begin{aligned}
\oint A &= \oint -\underline{n} \cdot \underline{v} v \, ds; \\
\oint B &= \oint -\underline{n} p \, ds; \\
\oint C &= \oint \underline{n} \cdot \frac{1}{Re} \nabla \underline{v} \, ds.
\end{aligned}
\tag{54}$$

В методе конечных объёмов все интегралы должны быть вычислены в пределах контрольных объёмов, на которые разбивается расчётная область. Тем самым, требуется обозначить сетку, подходящую для решения поставленной задачи.

Осевая симметрия задачи позволяет исследовать течение крови в пределах одного любого осевого сечения цилиндрического канала, так как в других сечениях картина будет абсолютно идентичной. Тогда можно разбить расчётное сечение на прямоугольники со сторонами  $\Delta R$  и  $\Delta z$ . Однако метод конечных объёмов обязывает наделить элементарную ячейку объёмом, не оставляя её плоской. Для решения поставленной в данной работе задачи в качестве контрольного объёма был взят объём, в центре грани которого находится узел. В узлах сетки хранятся значения компонент скорости, а ячейкам сетки присваиваются значения давления. Каждая ячейка имеет форму, образованную вращением прямоугольника со сторонами  $\Delta R$  и  $\Delta z$  на некоторый угол  $\Delta\varphi$  (рисунок 3.3.1). Осевая симметрия задачи ведёт к выводу, что элементарная ячейка должна в трёхмерном пространстве представлять собой кольцо (то есть угол  $\Delta\varphi$  в общем виде равен  $2\pi$ ), однако для наглядности вычисления интегралов будем рассматривать малый сектор такого кольца. Это не вносит никакого противоречия в задачу, ведь содержание угла поворота как во всех формулах вычисления объёма, так и в формулах для вычисления площадей ведёт к сокращению этого угла в финальных вычислениях.

Следующим шагом будет вычисление интегралов  $\oint A$ ,  $\oint B$  и  $\oint C$  по поверхности введённого контрольного объёма. На рисунке 3.3.1 обозначены площади различных граней элементарной ячейки. Символами  $S_B$ ,  $S_{B1}$ ,  $S_{B2}$  обозначены площади вертикальных поверхностей;  $S_G$ ,  $S_g$ ,  $s_g$  – различные площади горизонтальных поверхностей;  $S_f$ ,  $s_f$  – площади передних (или задних) поверхностей.

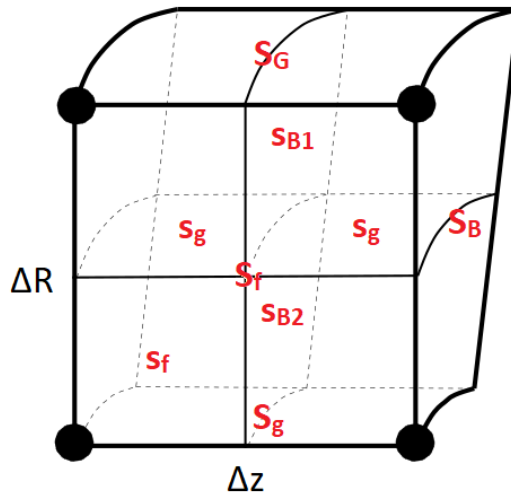


Рисунок 3.3.1. Элементарная ячейка расчётной области

Все обозначенные площади легко выражаются с помощью формул геометрии через характеристики элементарной ячейки  $\Delta R$ ,  $\Delta z$  и  $\Delta \varphi$ . Выберем для решения такую цилиндрическую систему координат, что орт  $\underline{i}$  совпадает с направлением оси канала, а орт  $\underline{j}$  направлен по радиусу.

Итак, для вычисления интегралов учитывается поток скоростей и давлений через границы контрольного объёма со стороны соседних контрольных объёмов. Тогда интеграл  $\oint A$  вычисляется следующим образом

$$\oint A = -u\underline{v}S_B - v\underline{v}S_g = \left( \frac{|\bar{u}| - \bar{u}}{2} \underline{v}_{\Delta z} - \frac{|\bar{u}| + \bar{u}}{2} \underline{v}_0 \right) S_B + \left( \frac{|\bar{v}| - \bar{v}}{2} \underline{v}_{\Delta R} - \frac{|\bar{v}| + \bar{v}}{2} \underline{v}_0 \right) S_g \quad (55)$$

где  $\underline{v}_0$  – скорость, хранящаяся в узле данного контрольного объёма,  $u, v$  – компоненты скорости течения вдоль оси сосуда и вдоль радиуса,  $\bar{u}, \bar{v}$  – их средние значения в соседних контрольных объёмах,  $\underline{v}_{\Delta z}, \underline{v}_{\Delta R}$  – скорости в узлах контрольных объёмов справа и сверху от рассматриваемого соответственно. Буквой  $S_B$  обозначена площадь, в зависимости от рассмотрения того или иного контрольного объёма равная  $S_{B1}$  или  $S_{B2}$ .

С целью учёта направления потока скорости между соседними контрольными объёмами, в (55) введены модули компонент скорости.

Выражение для интеграла  $\oint B$ , полученное с учётом потока давления, имеет вид (56):

$$\oint B = -\underline{i}ps_B - \underline{j}ps_g - (\underline{k} - \underline{k})ps_f = -\underline{i}ps_B - \underline{j}ps_g + \underline{j}ps_f \quad (56)$$

В цилиндрической системе координат ориентация орта  $\underline{k}$  зависит от поворота в пространстве, поэтому запись  $\underline{k} - \underline{k}$  в (56) обозначает разность повернутых друг относительно друга ортов  $\underline{k}$ .

Аналогично, равенство, полученное для интеграла  $\oint C$ :

$$\oint C = \oint \underline{n} \cdot \frac{1}{Re} \left( \underline{i} \frac{\partial v}{\partial z} + \underline{j} \frac{\partial v}{\partial R} + \underline{k} \underline{k} \frac{v}{R} \right) ds = \frac{1}{Re} \left( \frac{v_{\Delta z} - v_0}{\Delta z} S_B + \frac{v_{\Delta R} - v_0}{\Delta R} S_g - \underline{j} \frac{v}{R} S_f \right) \quad (57)$$

Выражение (57) содержит в себе число Рейнольдса, которое, как уже отмечалось ранее, не является постоянным в контексте поставленной задачи. Именно на этом этапе число Рейнольдса задаётся в контрольном объёме через соотношения, полученные из определяющих уравнений, содержащихся в системе (24) или (44) в зависимости от постановки. В рассматриваемом контрольном объёме вычисляется градиент скорости, радиальная координата и радиус поперечного сечения сосуда при данной координате  $z$ , тем самым задавая переменный характер вязкости согласно её зависимости от момента инерции или объёмной доли эритроцитов.

Интеграл, полученный применением теоремы Гаусса-Остроградского из уравнения несжимаемости равен

$$\oint \underline{n} \cdot \underline{v} ds = (u_{\Delta z} - u_0)S_B + (v_{\Delta R}S_g - v_0S_f) \quad (58)$$

где  $u_{\Delta z}$  и  $u_0$  – горизонтальные компоненты скорости на правой и левой стенках элементарной ячейки соответственно,  $v_{\Delta R}$  и  $v_0$  – радиальные компоненты скорости на верхней и нижней стенках элементарной ячейки соответственно.

На основе интегральных уравнений Навье-Стокса и несжимаемости, вычисленных в контрольном объёме, требуется построить разностную схему, которая позволит численно найти компоненты скорости в каждом узле и давление в каждой ячейке построенной сетки.

В первой главе данной выпускной квалификационной работы уже упоминалось, что несмотря на то, что в рамках поставленной задачи интерес представляет течение крови, установившееся по времени и пространству, составленный алгоритм будет учитывать зависимость от времени. Эта дополнительная зависимость не сильно усложняет задачу, но может помочь при дальнейших исследованиях, в которых нестационарность течения, возможно, будет играть большую роль. Для учёта сходимости решения по времени к обоим уравнениям Навье-Стокса и несжимаемости следует приписать производные по фиктивному времени  $\tau$  [6].

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{v}}{\partial \tau} = -\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \frac{\phi \underline{n} \cdot (-\underline{v}\underline{v} - p\underline{E} + \frac{1}{Re}\nabla \underline{v}) ds}{V}; \\ \frac{\partial p}{\partial \tau} = -\frac{\phi \underline{n} \cdot \underline{v} ds}{V}. \end{cases} \quad (59)$$

Так, на каждом шаге по реальному времени  $t$  ведётся установление по фиктивному времени  $\tau$ . В пределах одного временного шага происходит несколько этапов приближения значений величин давления и скоростей к значениям, удовлетворяющим основным уравнениям задачи. Тогда, вводя вспомогательные величины  $\xi_{\underline{v}}^k$  и  $\xi_p^k$ , которые будут характеризовать точность вычисленных скоростей и давления на  $k$ -м этапе приближения соответственно, запишем систему в виде

$$\begin{cases} \xi_{\underline{v}}^k = \tau \left[ -\frac{\underline{v} - \underline{v}^n}{\Delta t} + \frac{\phi \underline{n} \cdot (-\underline{v}\underline{v} - p\underline{E} + \frac{1}{Re}\nabla \underline{v}) ds}{V} \right]; \\ \xi_p^k = -\tau_p \frac{\phi \underline{n} \cdot \underline{v} ds}{V}. \end{cases} \quad (60)$$

где  $\underline{v}^n$  – значение скорости на  $n$ -м шаге по времени,  $\tau_p$  – фиктивное время для давления.

Заметим, что фиктивное время для скоростей и давления будет разным, что позволяет считать эти величины с разной установленной точностью. Вычисления внутри одного шага по времени можно считать законченными, если выполняются следующие условия сходимости

$$\begin{cases} \frac{\xi_v}{\tau} \rightarrow 0; \\ \frac{\xi_p}{\tau_p} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (61)$$

Каждый этап приближения значений скорости и давления состоит из трёх шагов. Сперва необходимо разбить уравнения по двум пространственным направлениям. Потoki скоростей и давления в рассматриваемый контрольный объём из соседних объёмов по оси сосуда следует отделить от потоков из соседних объёмов, происходящих по радиальной координате. Тогда на первом шаге приближения будем рассматривать часть интегралов, которая отвечает за изменение физических величин вдоль оси  $z$ :

$$\begin{cases} \xi_v^k = \tau \left[ -\frac{v-v^n}{\Delta t} + \frac{1}{V} \left[ \left( \frac{|\bar{u}|-\bar{u}}{2} v_{\Delta Z} - \frac{|\bar{u}|+\bar{u}}{2} v_0 \right) - ip + \frac{1}{Re} \frac{v_{\Delta Z}-v_0}{\Delta z} \right] S_B \right]; \\ \xi_p^k = -\tau_p \frac{(u_{\Delta Z}-u_0)S_B}{V}. \end{cases} \quad (62)$$

С целью упрощения построения разностной схемы для таких объёмных интегралов, удобно применять схему расщепления. Суть этой схемы заключается во введении двух параметров  $\xi_u$  и  $\xi_v$  вместо одного  $\xi_v$ . Каждый из этих параметров будет отвечать за точность только одной компоненты скорости. Тогда первое уравнение системы (62) требуется расщепить на два отдельных уравнения, характеризующих установление по радиальным и горизонтальным компонентам скорости независимо друг от друга. Итак, чтобы найти  $\xi_u$ ,  $\xi_v$  и  $\xi_p$  на  $(k+1)$ -м этапе приближения, запишем:

$$\begin{cases} \frac{\xi_u - \xi_u^k}{\tau} = -\frac{\xi_u}{2\Delta t} + \frac{1}{V} \left( \frac{|\bar{u}|-\bar{u}}{2} \xi_{u\Delta Z} - \frac{|\bar{u}|+\bar{u}}{2} \xi_{u_0} - \xi_p^k + \left( \frac{1}{Re} + \tau_p \right) \frac{\xi_{u\Delta Z} - \xi_{u_0}}{\Delta z} \right) S_B; \\ \frac{\xi_v - \xi_v^k}{\tau} = -\frac{\xi_v}{2\Delta t} + \frac{1}{V} \left( \frac{|\bar{u}|-\bar{u}}{2} \xi_{v\Delta Z} - \frac{|\bar{u}|+\bar{u}}{2} \xi_{v_0} + \frac{1}{Re} \frac{\xi_{v\Delta Z} - \xi_{v_0}}{\Delta z} \right) S_B; \\ \xi_p = \xi_p^k - \tau_p \frac{(\xi_{u\Delta Z} - \xi_{u_0})S_B}{V} = \xi_p^k - \tau_p \frac{\partial \xi_u}{\partial z}. \end{cases} \quad (63)$$

Из системы (63) можно найти значения  $\xi_u$ ,  $\xi_v$  и  $\xi_p$  на  $(k+1)$ -ом этапе приближения. Однако, если  $\xi_p$  выражается явно, то для вычисления  $\xi_u$  и  $\xi_v$  становится необходимым применение метода прогонки.



Значения  $\xi_{u_0}$ ,  $\xi_u$  и  $\xi_{u\Delta Z}$  соответствуют соседним по оси горизонтали узлам. Тогда для реализации метода прогонки записывается рекуррентное соотношение (64)

$$\xi_u^i = \alpha_{i+1}\xi_u^{i+1} + \beta_{i+1} \quad (64)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - некоторые прогоночные коэффициенты, которые находятся из соотношений (65)

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i\beta_i}{C_i - A_i\alpha_i}. \quad (65)$$

где  $A_i, B_i, C_i$  – коэффициенты перед переменными  $\xi_{u_0}$ ,  $\xi_{u\Delta Z}$  и  $\xi_u$  в первом уравнении системы (63) соответственно. Тем самым, коэффициенты  $A_i, B_i, C_i$  сначала находятся с учётом граничных условий, после чего согласно (65) проводится прямая прогонка и определяются прогоночные коэффициенты, а затем по формулам обратной прогонки (64) находятся требуемые величины. Значения  $\xi_v$  можно определить аналогично.

Второй шаг приближения учитывает радиальные части интегралов, тем самым в полученные на первом шаге значения  $\xi$  будет внесена корректировка

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi_v^k}{\tau} = -\frac{v-v^n}{\Delta t} + \frac{1}{V} \left[ \left( \frac{|\bar{v}|-\bar{v}}{2} v_{\Delta R} - \frac{|\bar{v}|+\bar{v}}{2} v_0 - \underline{j}p + \frac{1}{Re} \frac{v_{\Delta R}-v_0}{\Delta R} \right) S_g + \underline{j} \left( p - \frac{1}{Re} \frac{v}{R} \right) S_f \right]; \\ \xi_p^k = -\tau_p \frac{v_{\Delta R} S_G - v_0 S_g}{V}. \end{array} \right. \quad (66)$$

Аналогично предыдущему шагу, снова применяется схема расщепления и решается система уравнений вида (67)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi_u - \xi_u^k}{\tau} = -\frac{\xi_u}{2\Delta t} + \frac{1}{V} \left( \frac{|\bar{v}|-\bar{v}}{2} \xi_{u\Delta R} - \frac{|\bar{v}|+\bar{v}}{2} \xi_{u_0} + \mu \frac{\xi_{u\Delta R} - \xi_{u_0}}{\Delta R} \right) S_G; \\ \frac{\xi_v - \xi_v^k}{\tau} = -\frac{\xi_v}{2\Delta t} + \frac{1}{V} \left[ \left( \frac{|\bar{v}|-\bar{v}}{2} \xi_{v\Delta R} - \frac{|\bar{v}|+\bar{v}}{2} \xi_{v_0} - \xi_p^k + \tau_p \frac{1}{R} \frac{\partial R \xi_v}{\partial R} + \mu \frac{\xi_{v\Delta R} - \xi_{v_0}}{\Delta R} \right) S_G + \underline{j} \left( p - \frac{1}{Re} \frac{v}{R} \right) S_f \right]; \\ \xi_p = \xi_p^k - \tau_p \frac{v_{\Delta R} S_G - v_0 S_g}{V} = \xi_p^k - \tau_p \frac{1}{R} \frac{\partial R \xi_v}{\partial R}. \end{array} \right. \quad (67)$$

Значения  $\xi_u$  и  $\xi_v$  также находятся с помощью прогонки, а  $\xi_p$  выражается явным образом из третьего уравнения системы.

Наконец, на третьем шаге найденные значения  $\xi_u$ ,  $\xi_v$  и  $\xi_p$  складываются с приближениями скоростей и давления  $k$ -го этапа и их сумма представляет собой новые  $(k+1)$ -е приближения.

$$\begin{aligned}u^{k+1} &= \xi_u^{k+1} + u^k; \\v^{k+1} &= \xi_v^{k+1} + v^k; \\p^{k+1} &= \xi_p^{k+1} + p^k.\end{aligned}\tag{68}$$

Шаг по времени считается завершённым, если значения  $\max\left\{\frac{\xi_u}{\tau}; \frac{\xi_v}{\tau}\right\}$  и  $\frac{\xi_p}{\tau}$  с достаточной точностью близки к нулю. В противном случае, необходимо провести ещё один этап приближения скоростей и давления.

### 3.4. Основные детали реализации алгоритма

Алгоритм, описанный в данной главе, был реализован в Microsoft Visual Studio на языке программирования C++.

Входными параметрами задачи являются такие размерные величины как радиус сосуда, граничное условие в виде горизонтальной скорости на входе в канал, длина рассматриваемого участка сосуда. Для удобства предусмотрена возможность ввода этих параметров с диалоговой панели. В случае сосуда переменного радиуса граница канала задаётся функцией в теле программы. В данной работе рассмотрено течение крови по сосуду с сужением, задаваемым синусоидальной функцией. Также, можно регулировать количество узлов сетки и значения фиктивного времени для скоростей и давления с целью улучшения сходимости и точности решения.

В качестве выходных данных в программе выводятся значения компонент скорости и давления в каждом узле сетки в зависимости от их горизонтальной и радиальной координат. В программе предусмотрено как графическое представление информации, так и возможность записи в файл для удобства построения двумерных графиков на основе полученных массивов данных.

В программе использованы три основных класса, такие как Calculus, CNode и CCell. Класс Calculus используется для хранения наиболее общих параметров задачи, таких как количество узлов сетки, шаг по времени, предельные значения, при которых вычисления можно считать достаточно точными, а также параметры, используемые для графического изображения результатов.

Класс CNode нужен для записи информации об узлах сетки. В нём хранятся такие переменные как значения скоростей, фиктивное время для скорости, объёмы и др. Прогоночные коэффициенты из (64) и (65) также хранятся в CNode, поскольку прямая и обратная прогонка реализуются как раз в пределах этого класса. Кроме того, для расчётов требуются значения не только в узлах, но и в ячейках сетки. Для этого нужен класс CCell, в котором хранятся, например, давление и соответствующее ему фиктивное время, геометрические характеристики для расчёта интегралов, коэффициенты (28) и (45), нужные для учёта переменного характера вязкости и др. Класс CCell содержит указатели на узлы из CNode, чтобы связать конкретную ячейку с её вершинами. Кроме того, основной алгоритм приближения скоростей и давления реализуется с помощью функций, которые содержатся в классе CCell. Функция, учитывающая переменный характер вязкости, также принадлежит этому классу. Фрагмент программы с расчётом вязкости по формулам (23), (25) в случае сосуда переменного сечения, можно видеть на рисунке 3.4.1.

```
DBL CCell::MU(DBL GRAD)
{
    VecF2 r = 0.25*(N0->rr+N1->rr+N2->rr+N3->rr);
    DBL R = Calc->SIZE.y;
    if (r.y/R<1-h) return BB/(GRAD+CC)+Jmin;
    else return -(BB/(GRAD+CC)+Jmin-mu0)*r.y/R/h+mu0+(BB/(GRAD+CC)+Jmin-mu0)/h;
}
```

Рисунок 3.4.1 Фрагмент кода C++, учитывающий переменную вязкость

## ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

### 4.1. Сравнение с экспериментальными данными

В медицине произведено множество экспериментальных исследований по определению характеристик течения крови по сосудам различного радиуса. Однако, такие исследования невозможно с достаточной точностью провести в условиях сосуда переменного сечения. Таким образом, математическая модель течения крови способна расширить область для оценивания кровотока в организме человека. Тем не менее, чтобы оценить эффективность предложенной модели, прежде всего нужно сравнить полученные результаты с существующими экспериментальными данными.

В третьей главе данной выпускной квалификационной работы был представлен алгоритм, с помощью которого можно решить системы уравнений (24) и (44) при заданной геометрии сосуда, скорости на входе в канал и числовых коэффициентах, определяющих характер зависимости вязкости от различных параметров течения. Необходимо сравнить полученные компоненты скорости и давления с экспериментом при одинаковых вводных условиях. В работе [19] представлены результаты измерения профиля скорости течения крови по узкому капилляру радиусом 27 мкм. При этом среднее значение гематокрита составляло 33,5%, что чуть ниже, чем у большинства людей. Также в рамках эксперимента определялся осевой градиент давления, который составлял 3736 дин/см<sup>3</sup> (или 37360 Па/м в СИ). Поскольку в постановке задачи имеем заданную скорость на входе в канал, а не градиент давления, как в эксперименте, то для сравнения результатов будем подбирать значение входной скорости, при которой в сосуде радиусом 27 мкм возникает соответствующий эксперименту перепад давления. Значение гематокрита влияет на выбор коэффициентов (28) и (45), ведь они подобраны с учётом экспериментальной зависимости вязкости от градиента скорости (рисунок 2.2.1, [12]), которая для разных значений среднего гематокрита в некоторой степени отличается. Значения (28) и (45) в данной работе соответствуют гематокриту 30%, что близко к параметру эксперимента [19]. Толщина

свободного слоя  $h$  для сосуда такого размера составляет около 0.2 от радиуса, что можно видеть из экспериментальных данных работы [21].

На рисунке 4.1.1 представлены графики зависимости горизонтальной компоненты скорости течения крови от радиальной координаты или, иначе, профили скорости. Синей сплошной линией обозначен профиль скорости, который получается при применении подхода с зависимостью вязкости от агрегации, выражаемой моментом инерции. Оранжевая линия соответствует профилю скорости, рассчитанному в рамках подхода с эффективной вязкостью, зависящей от объёмной доли эритроцитов. Чёрная пунктирная линия совпадает с экспериментальными данными, полученными в [19].

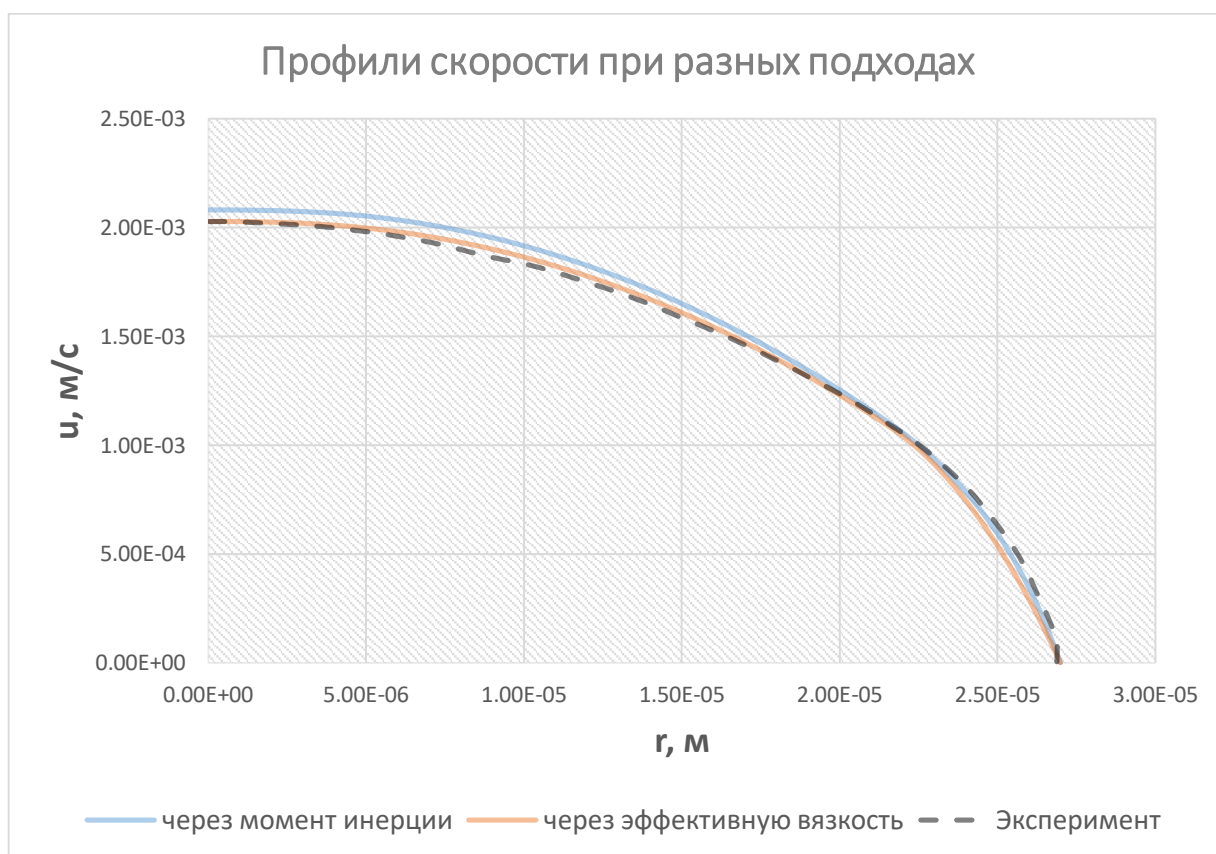


Рисунок 4.1.1. Профили скорости при разных подходах моделирования в сравнении с экспериментом [19]

По графикам рисунка 4.1.1 можно сделать вывод о том, что оба подхода к моделированию течения крови хорошо описывают реальную картину, полученную в эксперименте. При этом модель с учётом момента инерции даёт лучшее

схождение вблизи стенок сосуда, хорошо описывая форму профиля скорости, в то время как подход через эффективную вязкость даёт лучшие результаты у оси канала, но хуже описывает течение крови вдоль его стенок. С целью количественной оценки расхождения с экспериментом можно построить также графики ошибки в зависимости от радиальной координаты (рисунок 4.1.2). Здесь цвета графиков, соответствующих тому или иному подходу, совпадают с цветами, выбранными на графиках рисунка 4.1.1.

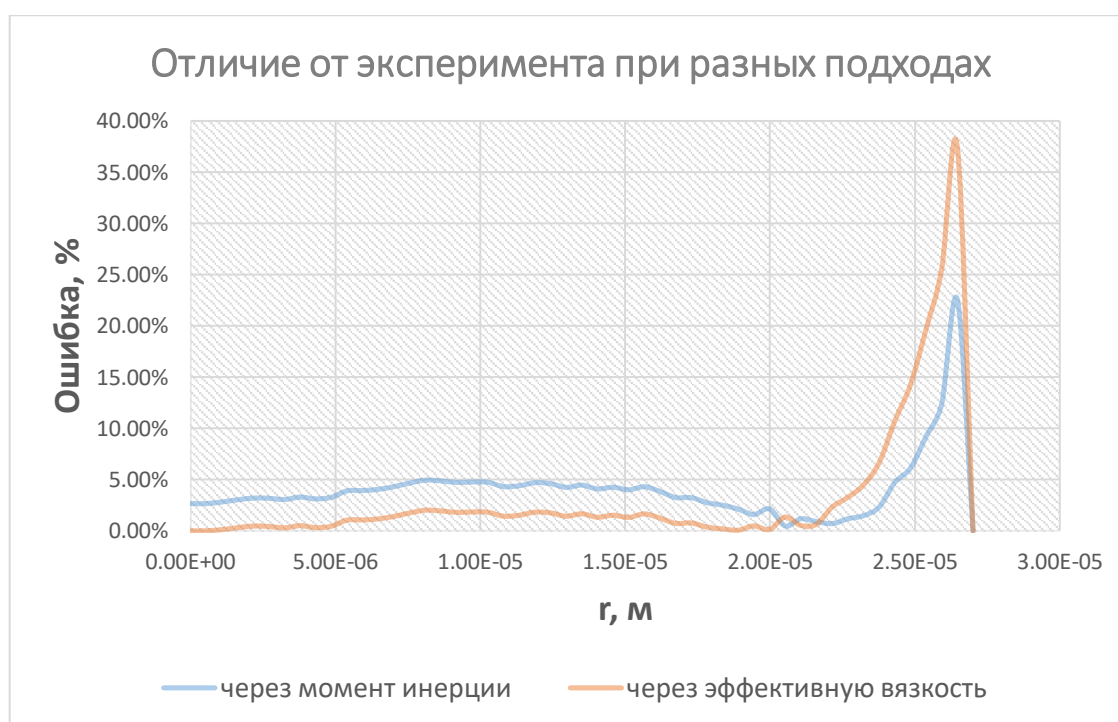


Рисунок 4.1.2. Отличие профиля скорости от экспериментальных данных [19] для двух подходов в зависимости от радиальной координаты

Из графиков (рисунок 4.1.2) видно, что расхождение с экспериментальными данными в случае задания зависимости эффективной вязкости от объёмной доли эритроцитов не превышает 3% вблизи оси канала, но даёт существенное расхождение у стенок. В рамках подхода с заданием агрегации в виде момента инерции расхождение с экспериментом у центра канала чуть выше, но не превышает 5%, зато вблизи стенок сосуда расхождение становится сильно меньше, чем у подхода с эффективной вязкостью. Учитывая полностью эмпирический характер составленных определяющих уравнений для микроструктурных

параметров (23) и (32), такой результат можно считать хорошим. Однако, следует обозначить, с чем могут быть связаны расхождения, заметные по большей части у стенок канала, с экспериментом. Отличия могут быть обусловлены следующими факторами.

Во-первых, в рамках модели эритроциты считаются ориентированными случайным образом. Как видно из графиков (рисунок 4.1.1), даже в достаточно узких сосудах такое допущение приводит к хорошим результатам, однако по мере уменьшения радиуса сосуда расхождение будет увеличиваться, поскольку эритроциты будут стремиться направить свою ось симметрии перпендикулярно течению. Тем самым, кровь нельзя будет рассматривать как изотропную, поскольку появится трансверсальная изотропия с отличием свойств в направлении радиальной координаты. В таком случае в постановке с моментом инерции придётся вводить два определяющих уравнения для двух неравных компонент тензора инерции, а эффективную вязкость также рассчитывать для случая трансверсальной изотропии с двумя компонентами вязкости.

Во-вторых, эффект Фареуса-Линдквиста [4] остаётся в задаче не в полной мере учтённым. Этот факт напрямую связан с уже упомянутым ранее отличием в течении, возникающим для очень узких капилляров. Ведь эффект снижения вязкости в сосудах радиуса, сравнимого с размером эритроцита, объясняется как раз выстраиванием клеток крови в ряд вдоль течения, что способствует образованию вдоль стенок сосуда бесклеточного слоя плазмы, за счёт которого вязкость и снижается. Допущения, взятые в расчёт при составлении эмпирической формулы для момента инерции или объёмной доли эритроцитов, учитывают образование свободного слоя вдоль стенок сосуда, однако деформация и ориентация эритроцитов вдоль оси канала могут вносить в толщину свободного слоя свои коррективы.

В-третьих, подбор коэффициентов (28) и (45), осуществлённый на основе аппроксимации экспериментальных зависимостей [12] гиперболической функцией, не лишён погрешности. Кроме того, зависимость вязкости от градиента

скорости для скоростей сдвига, меньших единицы, и гематокрита 33,5% остаётся неизвестной. Точно так же, минимальное значение момента инерции эритроцита посчитано из допущения о его сфероидальной форме, что также является упрощением. Тем самым, корректировка коэффициентов определяющих уравнений может достаточно сильно повлиять на точность решения.

В-четвёртых, в рамках данной работы не учитывается ряд факторов, оказывающих пусть малое, но заметное влияние на течение крови. Это такие факторы, как температура, деформация эритроцитов, содержание в крови тромбоцитов, лейкоцитов, а также других элементов, изменения в свойствах плазмы крови [4, 10]. Последние два фактора имеют очень индивидуальный характер, поэтому их учёт важен только для моделирования течения крови у людей с некоторыми особенностями состава крови, в остальных случаях их значения можно считать среднестатистическими.

Таким образом, модель достаточно хорошо описывает реальное течение крови по тонким сосудам, но погрешность в значениях скорости у стенок сосуда сильно больше, чем у оси канала. Подход с расчётом эффективной вязкости при этом даёт худшие результаты у границ, чем модель с рассмотрением момента инерции. Моделирование течения крови у стенок сосуда при образовании свободного плазменного слоя значительно сложнее, чем расчёт скоростей у центра канала. Тем самым, имеет место предположение о том, что для крупных сосудов, в которых толщина бесклеточного слоя становится пренебрежимо мала, погрешность решения значительно снижается.

#### 4.2. Влияние учёта формы эритроцита

В случае использования для моделирования течения крови постановки задачи с использованием зависимости эффективной вязкости от объёмной доли эритроцитов (44), существенным фактором, влияющим на течение, становится



форма эритроцита, используемая в модели. Расчёты (35)-(43) сделаны из предположения, что эритроцит имеет форму сфероида с геометрией, описанной в разделе 1.3 данной выпускной квалификационной работы. При этом при значении параметра сплюснутости сфероида  $\gamma = 0.275$ , значение числового параметра  $M$ , входящего в формулу (43), приблизительно равно -3. Однако, следует показать, насколько важен учёт формы эритроцита для описания течения крови системой уравнений (44).

С целью упрощения модели, эритроциты иногда представляют, как шарики. Это допущение, во-первых, обеспечивает изотропию, а во-вторых, значительно ускоряет расчёты. Для сферической формы сплюснутость  $\gamma = 1$ , а числовой параметр  $M = -2,5$ . О преимуществах и недостатках такой формулы говорится, например, в [17]. В рамках данной работы было построено решение системы уравнений (44) с учётом сфероидальной формы эритроцита, и без неё. Результаты, полученные в обоих случаях, были сравнены с экспериментальными данными [19]. Все прочие параметры модели, такие как осевой градиент давления, толщина свободного слоя и т. д., были взяты аналогично предыдущему разделу данной главы. На рисунке 4.2.1 представлены полученные профили скорости для сферической и сфероидальной формы эритроцита. Чёрной пунктирной линией обозначены данные эксперимента [19].

Из графиков (рисунок 4.2.1) видно, что учёт формы эритроцита практически не важен при моделировании течения вдоль стенок сосуда, однако профиль скорости при остальных радиальных координатах значительно отличается для различных форм эритроцита. Это во многом обусловлено тем, что на границах сосуда моделируется свободный плазменный слой, в котором содержание эритроцитов практически равно нулю, что делает форму клеток бесполезным параметром. В то же время, форма эритроцита играет существенную роль вблизи центра сосуда. Упрощение модели в виде принятия красных кровяных клеток за шарики даёт близкое значение числового параметра  $M$  к вычисленному для сфероидов, однако профиль скорости при таком упрощении значительно вытягивается.

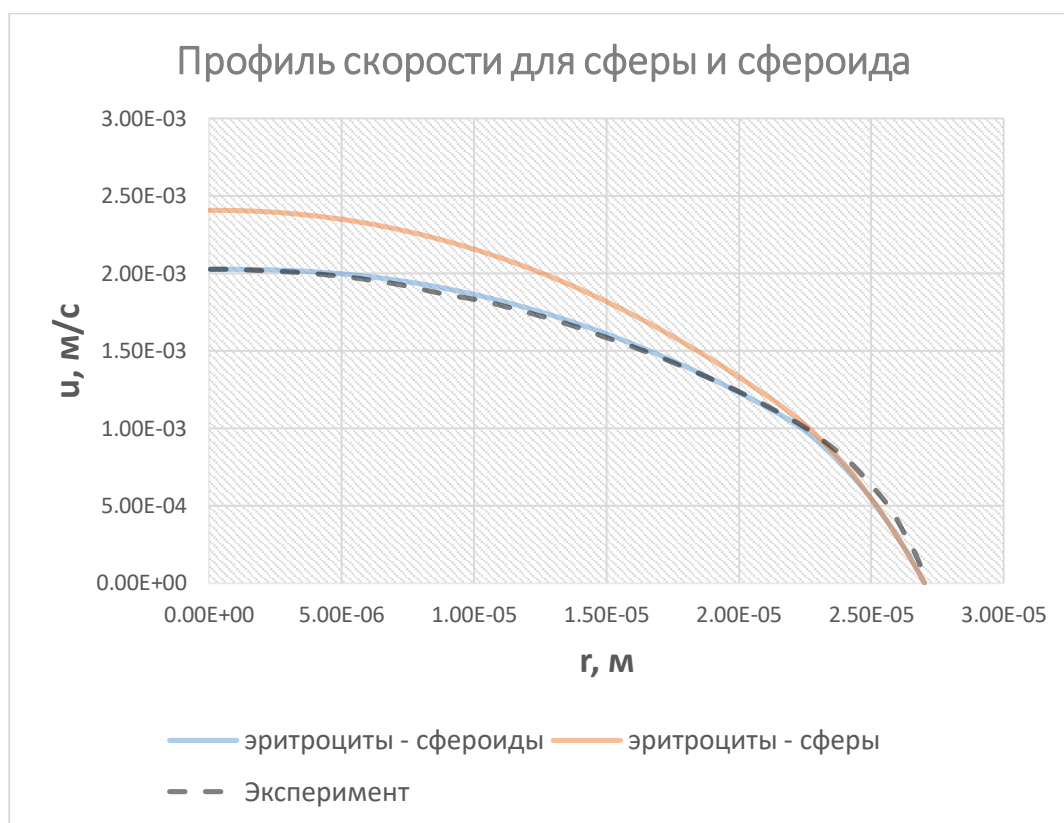


Рисунок 4.2.1. Профили скорости с учётом формы эритроцита

Таким образом, при моделировании течения крови важным фактором становится принимаемая форма эритроцита. Различие в решениях видно даже для случая изотропии, в то время как возникающая вследствие изменения ориентации эритроцитов в очень узких сосудах трансверсальная изотропия становится непреодолимым обстоятельством для моделей, упрощающих форму эритроцита до шара.

### 4.3. Течение в сосуде с переменным сечением

Кровеносная система человека имеет сложное строение, в рамках которого радиус кровеносных сосудов меняется при переходе более крупных сосудов в более мелкие и наоборот. Кроме того, при таких патологиях как аневризма, атеросклероз, тромбоз и других, связанных с уменьшением просвета сосуда, радиус тоже становится величиной переменной. В сосудах переменного радиуса гораздо

сложнее оценивать кровоток экспериментально, поэтому важно, чтобы модель течения крови работала и в случае переменного сечения.

В рамках данной работы построено решение системы (24) с учётом зависимости вязкости крови от переменной агрегации в случае частичного закупоривания сосуда (рисунок 4.3.1). Начальный радиус сосуда составляет 27 мкм, а минимальный просвет равен приблизительно 20% от начального диаметра. При таких радиусах толщина свободного слоя достаточно большая и достигает значения 0.3 от радиуса канала. Скорость на входе в канал была взята такая же, как в первом разделе данной главы при сравнении с экспериментом [19].

Рассмотрим участок сосуда переменного радиуса с геометрией сужения, описываемой для простоты синусоидой. Графическое представление такого сосуда изображено на рисунке 4.3.1.

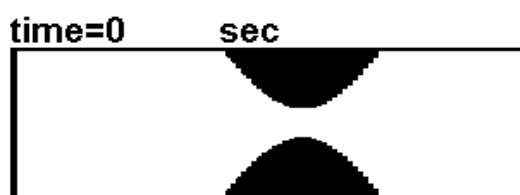


Рисунок 4.3.1. Геометрия сужающегося сосуда

С целью анализа общего характера течения для горизонтальной скорости была построена цветовая диаграмма (рисунок 4.3.2). Переход от фиолетового цвета к красному показывает увеличение модуля скорости. Видно, что до и после сужения течение ведёт себя одинаковым образом. Это значит, что значение имеет кровоток только в области сужения сосуда, так как при дальнейшем расширении характер течения крови восстанавливается.

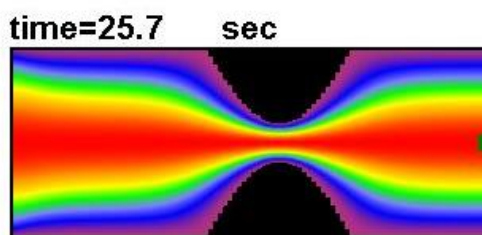


Рисунок 4.3.2. Диаграмма горизонтальных скоростей в сужающемся сосуда

В рамках более детального изучения кровотока в случае сужения сосуда, построим профили скорости в различных сечениях (рисунок 4.3.3). Видно, что в местах сужения профиль скорости вытягивается в зависимости от величины просвета. При этом в промежуточном сечении профиль скорости деформируется по краям. Это связано с появлением радиальной компоненты скорости вследствие течения крови от стенок к центру по мере сужения. В самом узком месте профиль скорости опять имеет характерный вид, так как радиальные скорости снова исчезают. Увеличение модуля максимальной горизонтальной скорости по мере сужения сосуда хорошо согласуется с условием неразрывности струи, при котором произведение скорости сосуда на его площадь остаётся одинаковым. Этим объясняется такое сильное вытягивание профиля скорости в месте максимального сужения.

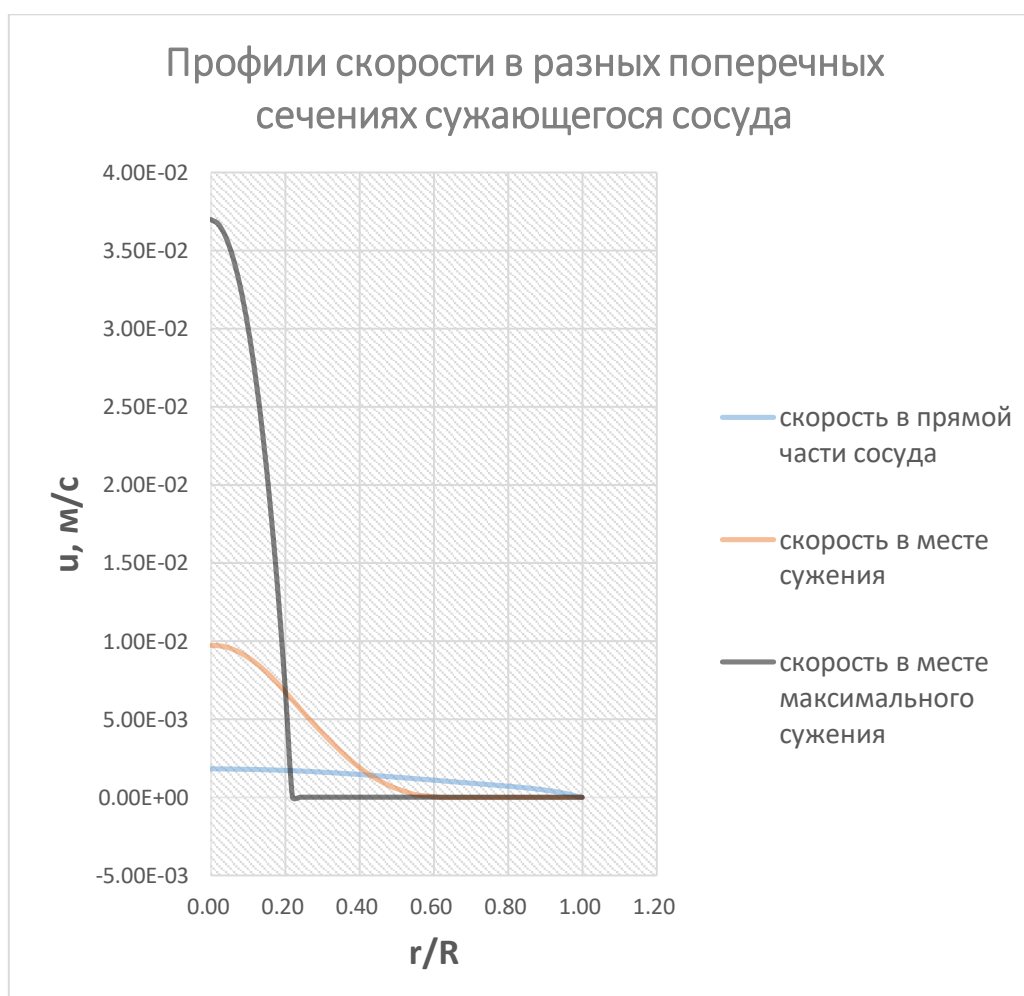


Рисунок 4.3.3. Профиль скорости в разных сечениях сужающегося сосуда

Интересно также посмотреть на изменение скоростей и давления вдоль оси канала. Графики зависимости горизонтальной и радиальной скорости, а также давления, от сечения сужающегося сосуда, характеризуемого продольной координатой  $z$ , представлены на рисунке 4.3.4.

Видно, что горизонтальная скорость увеличивается с уменьшением диаметра и уменьшается с расширением сосуда, возвращаясь к первоначальному значению. Радиальная скорость колеблется около нуля в прямой части канала, затем появляется по мере уменьшения радиуса просвета сосуда (кровь течёт от стенок к центру). В месте максимального сужения радиальная скорость достигает нуля и начинает расти в противоположном направлении по мере расширения сосуда (кровь течет от центра к стенкам). Давление в прямой части канала падает равномерно и медленно по сравнению с сильным падением давления в месте сужения просвета сосуда.

Таким образом, системы уравнений (24) и (44) хорошо работают для случая сужения и расширения сосуда.

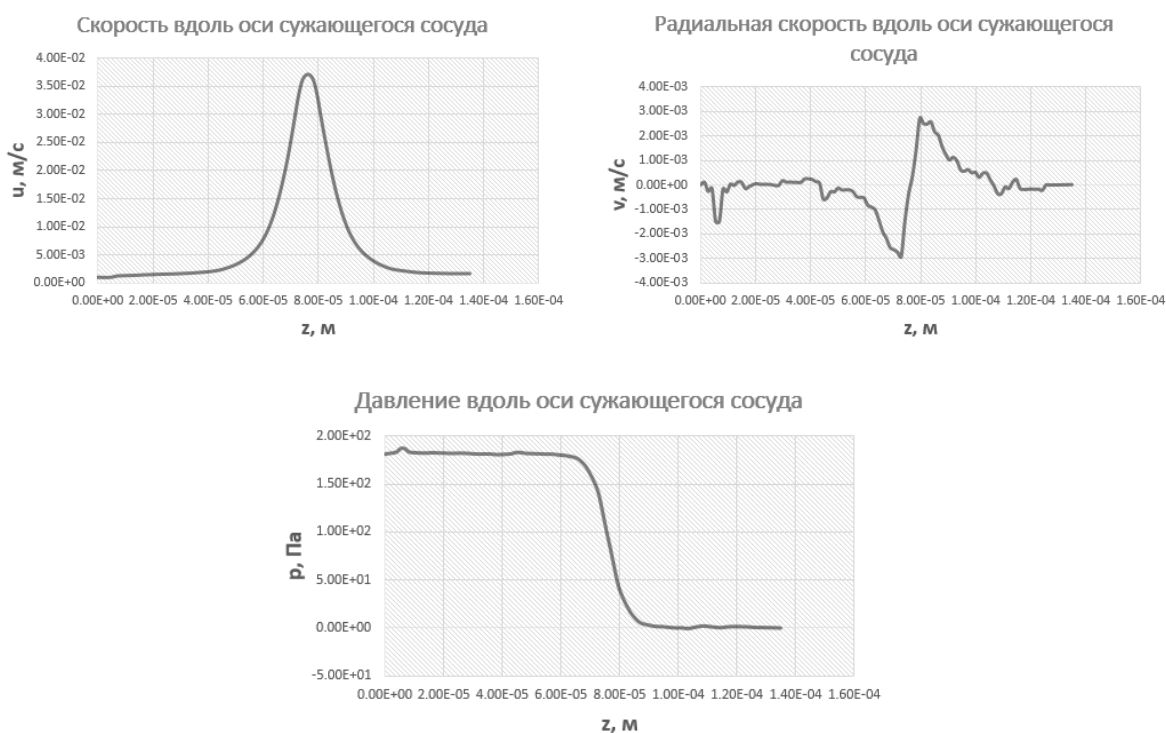


Рисунок 4.3.4. Горизонтальная скорость (слева), радиальной скорость (справа) и давление (внизу) в зависимости от сечения сужающегося сосуда

#### 4.4. Профиль скорости в различных сосудах

Полученная в рамках данной выпускной квалификационной работы модель течения крови может быть применена для описания течения крови по различным сосудам человеческого организма. К примеру, можно построить профиль скорости течения крови по нижней полой вене. Согласно [4], диаметр нижней полой вены составляет около 2-3 см, а скорость принимает максимальное значение около 0,25 м/с. При расчётах значение радиуса взято 1,35 см, а толщина свободного слоя в таких крупных сосудах незначительна и принимается за 0,01 от радиуса сосуда. Полученный профиль скорости представлен на рисунке 4.4.1.

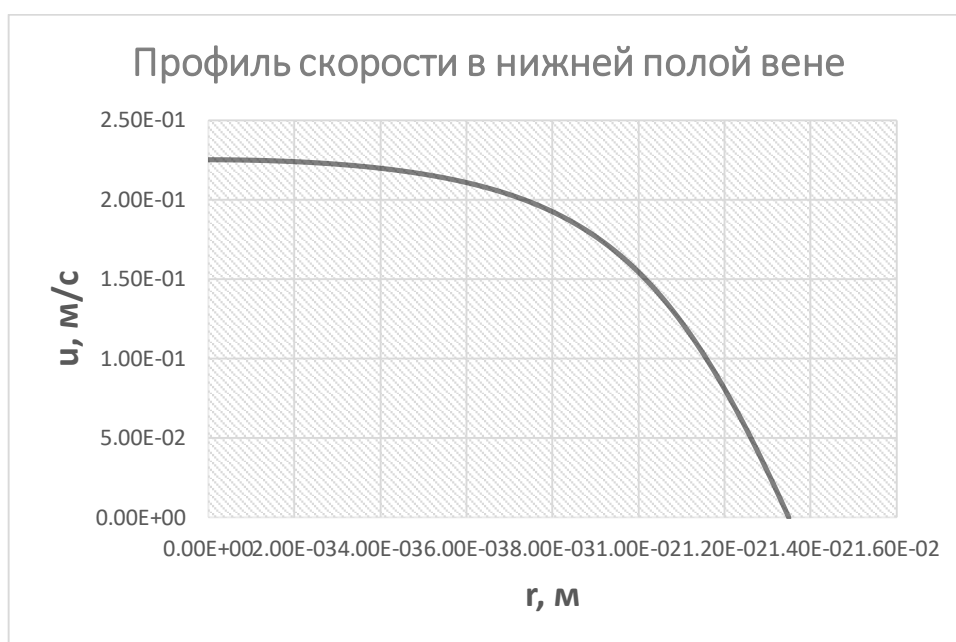


Рисунок 4.4.1. Профиль скорости течения крови по нижней полой вене

Видно, что профиль скорости не сильно отличается от параболы у краёв сосуда (в отличии от капилляра в [19]). Это связано с очень малой толщиной бесклеточного слоя, образующегося в нижней полой вене.

В случае сонной артерии, диаметр которой равен в среднем 1 см, а максимум скорости достигает значения 0,2 м/с [4, 5], профиль скорости так же мало отличается от параболы (рисунок 4.4.2). Толщина свободного слоя в сонной артерии также, как и в случае нижней полой вены, слишком мала, чтобы оказывать хоть сколько-нибудь заметное влияние на скорости от стенок сосуда.

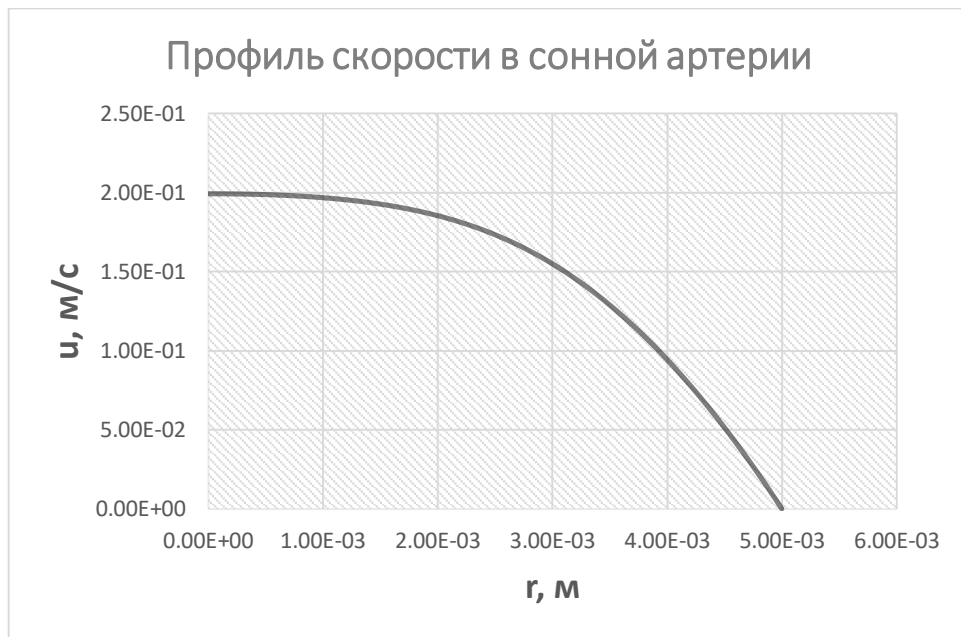


Рисунок 3.5.1. Профиль скорости течения крови в сонной артерии

За счёт отсутствия выраженного бесклеточного слоя в описанных сосудах кровеносной системы человека, точность расчётов должна увеличиваться. Однако, стоит принять во внимание тот факт, что стенки крупных сосудов являются более упругими. Тем самым, из-за наличия пульсовых волн, идущих по сосудам от сердца во время выбрасывания из него крови [4], диаметры нижней полой вены и сонной артерии могут существенно колебаться. Такие колебания не учтены в рамках поставленной задачи и могут вносить существенную погрешность в представленные результаты.

Таким образом, в рамках данной работы была представлена модель, позволяющая оценить кровоток в различных сосудах кровеносной системы человека, зная их диаметр и скорость крови (или осевой градиент давления).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Характер течения крови по сосудам во многом обусловлен переменным характером вязкости крови. Вязкость крови зависит от множества параметров, которые сложным образом меняются в кровотоке. Важность оценивания и предсказания процессов, происходящих в различных сосудах человеческого организма, ведёт к необходимости математического моделирования течения крови. В рамках данной выпускной квалификационной работы были изучены характерные особенности течения крови по сосудам в зависимости от различных гемодинамических параметров и была разработана модель кровотока, учитывающая зависимость вязкости от агрегации частиц. Были предложены два подхода к учёту агрегации эритроцитов – в виде момента инерции клеток и их агрегатов и в виде объёмной доли эритроцитов как характеристики размера агрегата.

На первом этапе работы были изучены существующие научные статьи, касающиеся выбранной темы. Среди них были как медицинские статьи, несущие информацию об эмпирических зависимостях параметров течения крови друг от друга, так и технические статьи, в которых предлагалось описать кровоток тем или иным способом. В ходе работы были изучены и систематизированы процессы, определяющие течение крови по сосудам. Так, были выявлены факторы, оказывающие наибольшее влияние на вязкость, – агрегация эритроцитов и их организация в потоке крови, зависящая от диаметра сосуда. Тем самым, были выбраны основополагающие параметры гемодинамики, которые необходимо учитывать в будущей модели течения крови. Кроме того, были изучены существующие подходы к моделированию течения крови, берущие за основу те или иные зависимости вязкости, возникающие в организме.

В рамках второго этапа выпускной квалификационной работы была разработана математическая модель, позволяющая получить скорости и давление в сосудах разного диаметра на основании свойства эритроцитов создавать агрегаты и мигрировать к оси сосуда. Система уравнений Навье-Стокса и несжимае-



мости была дополнена третьим определяющим уравнением для нового микроструктурного параметра, характеризующего агрегацию. Было предложено два подхода к моделированию, в одном из которых учитывался момент инерции как характеристика агрегации, а в другом – объёмная доля эритроцитов. Кровь при этом была представлена как суспензия плазмы со сфероидальными эритроцитами, ориентированными случайным образом. Был получен алгоритм, позволяющий численно решить составленные системы уравнений. В качестве метода численного решения был выбран метод конечных объёмов, имеющий ряд преимуществ по сравнению с другими методами в контексте поставленной задачи. Полученный алгоритм был реализован на языке программирования C++ с учётом обоих представленных постановок задачи.

В целях демонстрации эффективности разработанной модели было проведено сравнение полученного решения с экспериментальными данными [19], представленными для узкого капилляра. Тем самым, было показано, что предложенная модель хорошо описывает реальное течение крови по достаточно тонким сосудам. Однако, при радиальных координатах, близких к значению радиуса, модель показывает менее точные результаты, чем при приближении к оси сосуда. Это объясняется во многом пренебрежением влиянием на течение крови таких факторов, как деформация эритроцитов, температура и др. Также, задача была решена только для случая изотропии, что ограничивает возможности такой модели в рамках описания течения крови по экстремально узким сосудам, сравнимыми диаметром с размером эритроцита. Два предложенных подхода к описанию агрегации эритроцитов были сравнены между собой, что позволило сделать выводы о применимости обоих подходов. Кроме того, в рамках данной работы была показана важность учёта сфероидальной формы эритроцита: задача была решена для сферических и сфероидальных частиц, и сравнение решений показало резкое возрастание погрешности при представлении эритроцитов в виде шариков.

С целью демонстрации возможностей предложенной модели, задача была решена для сосуда с переменным сечением. Было показано, как меняются компоненты скорости и давление в зависимости от просвета сужающегося сосуда, а также были сравнены между собой полученные профили скорости в разных сечениях сосуда переменного радиуса. Тем самым, область применимости разработанной модели была существенно расширена. Также, в рамках работы была продемонстрирована возможность описания течения крови по различным сосудам кровеносной системы человека, в частности, по сонной артерии и нижней полой вене. Таким образом, в рамках данной выпускной квалификационной работы были реализованы все поставленные задачи.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антипов С.Т., Овсянников В.Ю., Корчинский А.А., Смирных А.А. Исследование реологических и теплофизических характеристик крови крупного рогатого скота // Вестник ВГУИТ. 2017. Т. 79. № 3. С. 26–30
2. Войтович Т. В. Технологии метода конечных объёмов/конечных элементов на симплициальных сетках для задач конвективно-диффузионного типа: автореферат диссертации, 2000. – 6с.
3. Всемирная организация здравоохранения: официальный сайт. – URL: <https://www.who.int/ru> (дата обращения: 14.05.2022).
4. Гайтон А. К., Холл Дж. Э. – Медицинская физиология – Москва: «Логосфера», 2008
5. Гуревич М.И., Берштейн С.А. Основы гемодинамики, 1979
6. Ковеня В. М., Чирков Д. В. Методы конечных разностей и конечных объёмов для решения задач математической физики: учебное пособие – Новосибирск, 2013. – с. 70-84.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М: Наука, 1978
8. Медведев А. Е., Двухфазная модель течения крови в крупных и мелких кровеносных сосудах, Матем. биология и биоинформ., 2011, том 6, выпуск 2, с. 228–249
9. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
10. Рахимов А. А., Бурдюк Ю. В., Ахметов А. Т. Особенности течения крови в капиллярах при малых перепадах давления – Современные проблемы науки и образования 3 (2012)
11. Смирнов Е. М., Зайцев Д. К. Метод конечных объёмов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии - Научно-технические ведомости 2 (2004)
12. Cho Y. I., Jung J. M. New method of hematocrit correction of whole blood viscosity // International Communications in Heat and Mass Transfer. - 06.2014. - 226 с.

13. Dłu`zewski, P.H.: Finite deformations of polar elastic media. *Int. J. Solids Struct.* 30(16), 2277–2285 (1993)
14. Eringen, A.C., Kafadar, C.B.: Polar field theories. In: *Continuum physics IV*. Academic Press, London (1976)
15. Global Health Data Exchange: официальный сайт. – URL: <https://ghdx.healthdata.org/> (дата обращения: 15.05.2022).
16. Ivanova, E.A., Vilchevskaya, E.N.: Micropolar continuum in spatial description. *Continuum Mech. Thermodyn.* 28(6), 1759–1780 (2016)
17. Kachanov M., Abedian B. – On the isotropic and anisotropic viscosity of suspensions containing particles of diverse shapes and orientations – *International Journal of Engineering Science* 94 (2015) 71–85
18. Kachanov M., Sevostianov I. *Micromechanics of Materials, with Applications*, 2018
19. Long D. S., Smith M. L., Pries A. R., et al., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 101 (27), 10060 (2004)
20. Qiao H., Zhao H., Jaron D. – Non-uniform viscosity caused by red blood cell aggregation may effect NO concentration in the microvasculature (2017)
21. Sharan M., Popel A.S. A two-phase model for flow of blood in narrow tubes with increased effective viscosity near the wall. *Biorheology*. 2001. V. 38. P. 415–428.
22. Stroobach M., Haya L., Fenech M. – Effects of red blood cell aggregation on microparticle wall adhesion in circular microchannels – *Medical Engineering and Physics* 69 (2019), p. 100-108
23. Vilchevskaya, E.: Micropolar theory with inertia production. In: H. Altenbach, A. Öchsner (eds.) *Advanced Structured Materials*. Vol. 100, pp. 421–442. Springer Nature, Cham (2019)
24. Westerhof N., Stergiopulos N., Noble M. I. M. – *Snapshots of Hemodynamics* – USA, 2005

25. Zhang J., Johnson P. C., Popel A. S. – Effects of erythrocyte deformability and aggregation on the cell free layer and apparent viscosity of microscopic blood flows // *Microvascular Research* 77 (2009) – p. 265-272