

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
«___» _____ 2024 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМЕ ПЛАСТ-СКВАЖИНА

по направлению подготовки

01.04.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль)

01.04.03_01 Механика деформируемого твердого тела

Выполнил
студент гр. 5040103/20101

Г. К. Аюпова

Руководитель
профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

В. А. Кузькин

Консультант
по нормоконтролю

Е. А. Хайбулова

Санкт-Петербург – 2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Аюповой Галине Константиновне, гр. 5040103/20101

1. Тема работы: моделирование температурного поля в система «пласт-горизонтальная скважина»
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 30.05.2024
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации по теме работы, исследования в области течения газа в горизонтальной скважине. Основные балансовые соотношения. Параметры скважины и пласта.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): физико-математическая модель распределения температуры в стволе скважины; модель распределения температуры в изотропном пласте; модель распределения температуры в скважине с учетом втекания газа через боковую поверхность скважины
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания 26.02.2024

Руководитель ВКР _____ В. А. Кузькин, профессор ВШТМиМФ, д. ф.-м.н.

Задание принял к исполнению 26.02.2024

Студент _____ Г. К. Аюпова

РЕФЕРАТ

На 56с., 15 рисунков, 5 таблиц

МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА, СМЕШИВАНИЕ ГАЗОВ, УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ, УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ, БАЛАНС ЭНЕРГИИ, БАЛАНС ИМПУЛЬСА

Тема выпускной квалификационной работы: «Моделирование температурного поля в системе пласт-скважина».

Данная работа посвящена моделированию изменения температуры природного газа при его течении в однородном, изотропном пласте и в скважине.

Задачи, которые решались в ходе исследования:

1. Изучить основные уравнения, позволяющие описывать изменение температуры и давления газа при его движении в пласте и скважине. Проанализировать имеющиеся работы по данной тематике.
2. Создать модель течения газа в пласте и скважине.
3. Декомпонировать модель на составляющие: пласт и скважина.
4. Для каждой составляющей описать математическую модель изменения температуры, давления и скорости флюида.
5. Рассмотреть модельную задачу, в которой объединены все составляющие.

В результате были созданы три аналитические модели: для расчета температуры и давления в пласте; для расчета температуры и давления в скважине на участке без оттока и притока флюида через боковые стенки; смешивание газов в скважине на интервалах притока газа. Комбинируя полученные модели, можно смоделировать изменение температуры и давления для любой скважины.

ABSTRACT

56 pages, 15 figures, 5 tables

GAS FLOW MODEL, MIXING OF GASES, EQUATION OF STATE, CONTINUITY EQUATION, ENERGY BALANCE, MOMENTUM BALANCE

The subject of the graduate qualification work is «Temperature prediction modeling for the system reservoir - well».

This work is devoted to modeling of natural gas temperature change during its flow in a homogeneous, isotropic reservoir and in a well.

The research sets the following goals:

1. To study the basic equations that allow describing the change in temperature and pressure of gas during its movement in the reservoir and well. To analyze the available works on this subject.
2. Create a model of gas flow in the reservoir and well.
3. Decompose the model into components: reservoir and well.
4. For each component, describe the mathematical model of temperature, pressure and fluid velocity changes.
5. Consider a model problem in which all components are combined.

As a result, three analytical models were created: to calculate the temperature and pressure in the reservoir; to calculate the temperature and pressure in the well at the section without outflow and fluid inflow through the side walls; mixing of gases in the well at the intervals of gas inflow. By combining the resulting models, it is possible to simulate temperature and pressure changes for any well.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
ГЛАВА 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	8
ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ.....	10
2.1 Постановка задачи	10
2.2 Распределение поля давления	11
2.3 Распределение поля температуры.....	12
2.4 Пример расчета изменения давления и температуры газа в пласте	14
ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ В СКВАЖИНЕ	17
3.1 Постановка задачи	17
3.1.1 Баланс массы (уравнение неразрывности).....	17
3.1.2 Баланс импульса	18
3.1.3 Баланс энергии.....	19
3.2 Общая математическая модель нестационарного неизотермического течения природного газа в скважине.....	20
3.2.1 Уравнения состояния газовой смеси.....	21
3.2.2 Модель термодинамических процессов	23
3.3 Математическая модель стационарного неизотермического течения природного газа в скважине	25
3.3.1 Переход к безразмерным величинам	26
3.3.2 Расчет функций f_ρ, f_T, f^* для уравнения состояния Редлиха-Квонга ..	28
3.4 Расчет установившегося течения природного газа в скважине	29
3.4.1 Алгоритм расчета	30

3.4.2	Пример расчета установившегося течения газа в скважине	31	
ГЛАВА 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СМЕШИВАНИЯ ГАЗА В			
ИНТЕРВАЛАХ ПРИТОКА			36
4.1	Постановка задачи для точечного источника.....	36	
4.2	Пример расчета температуры в скважине с точечным источником	37	
4.3	Постановка задачи при распределенном притоке	39	
4.3.1	Уравнение неразрывности	40	
4.3.2	Баланс энергии.....	41	
4.4	Общая математическая модель распределенного притока газа через боковую поверхность скважины.....	42	
4.5	Пример расчета изменения температуры газа на интервале притока газа через боковую поверхность скважины	44	
ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМЕ ПЛАСТ-СКВАЖИНА			47
ЗАКЛЮЧЕНИЕ			53
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ			55

ВВЕДЕНИЕ

Природный газ – смесь углеводородов, в состав которого преимущественно входит метан CH_4 (75 – 98%). На него приходится четверть всех добываемых полезных ископаемых, а в список отраслей, использующих газ и/или его компоненты, входят не только топливная, химическая, энергетическая, но и многие другие. На сегодняшний день запасов легкодоступного газа, для добычи которого достаточно пробурить скважину, осталось счетное количество. Вследствие чего в добывающих странах стоят задачи в рациональной добыче газа и его использовании. Вместе с тем, строятся новые месторождения в тяжелых природных условиях, например, в условиях вечной мерзлоты (Республика Саха (Якутия), Арктика).

Одной из основных проблем добычи природного газа является выпадение гидратов. Это происходит из-за того, что в пластовых условиях природный газ находится вместе с насыщенными парами. При добыче газа происходит снижение давления, что влечет за собой и снижение температуры газа. При определенных термодинамических параметрах молекулы газа взаимодействуют с водой, в результате чего образуются твердые кристаллические частицы. Пары воды конденсируются и скапливаются на стенках скважины. Это приводит к уменьшению эффективного диаметра скважины или к полной ее закупорке, а значит и к снижению дебита добываемого газа.

Расчет изменения температуры и давления поможет предсказывать выпадение данных отложений.

Цель данной работы заключается в создании модели для описания изменения температуры, давления и плотности флюида при его течении в пласте и в скважине.

Вследствие чего можно выделить следующие основные задачи:

1. Создать модель течения газа;
2. Декомпонировать модель на составляющие: пласт и скважина;

3. Для каждой составляющей описать математическую модель изменения температуры, давления и скорости флюида, а также создать программу для расчетов.
4. Рассмотреть модельную задачу, в которой объединены все составляющие.

ГЛАВА 1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В задаче рассматривается температурная модель, которая состоит из двух компонент: пласта и ствола скважины. Каждая компонента описывается различными уравнениями для течения флюида и переноса энергии. На рис. 1.1. показано схематичное представление модели.

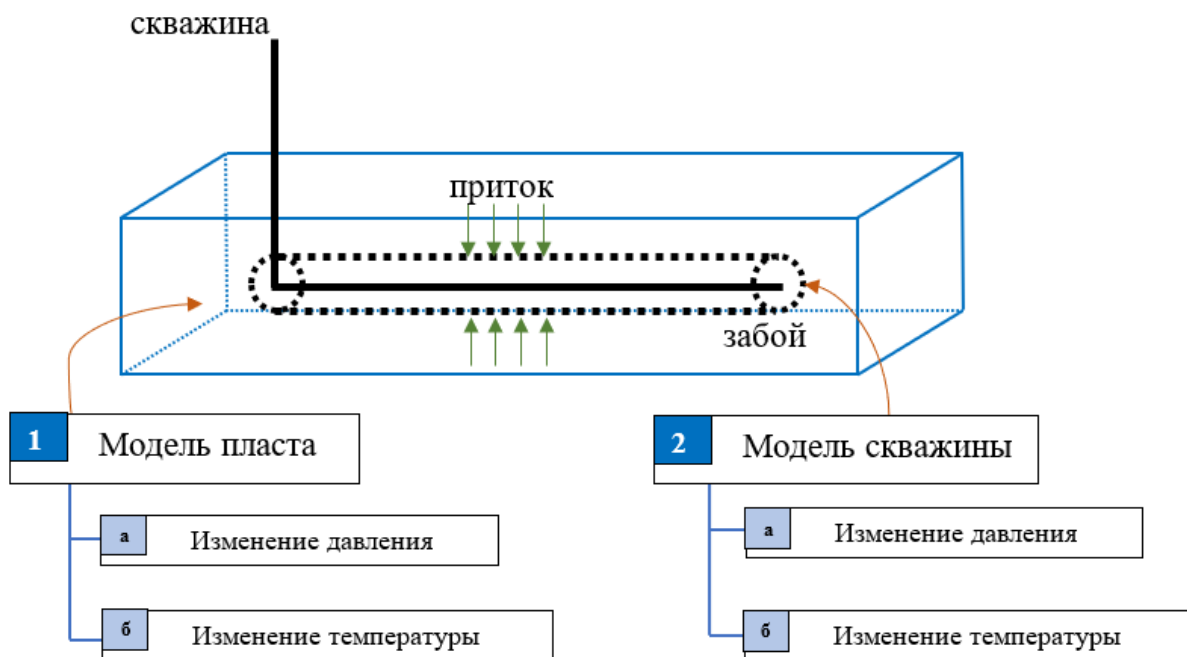


Рисунок 1.1 – Схематичное представление модели

С помощью уравнения пьезопроводности и уравнения Чекалюка в осесимметричных формах описывается изменение температуры и давление при течении газа в насыщенном пористом пласте. Тогда как для расчета изменения скорости флюида используется линейный закон Дарси.

Изменение температуры в скважине происходит вследствие двух процессов. Во время первого – течения по скважине – температура газа меняется из-за теплообмена с пластом. Во время второго – притока газа через перфорации на боковых стенках скважины – температура изменяется ввиду смешивания двух потоков с разными термодинамическими параметрами. Оба процесса описываются балансовыми соотношениями: уравнением неразрывности, уравнением потока импульса и уравнением энергии.

Декомпозируем задачу на три составляющие (рис. 1.2):

1. Аналитическая модель для расчета температуры и давления в пласте. Относится к модели пласта и описывается соответствующими уравнениями.
2. Аналитическая модель для расчета температуры и давления в скважине. Описывает течение газа по скважине без учета оттока и притока.
3. Аналитическая модель смешивания газа в интервалах притока. Также как и предыдущий пункт относится к модели скважины, описанной ранее.

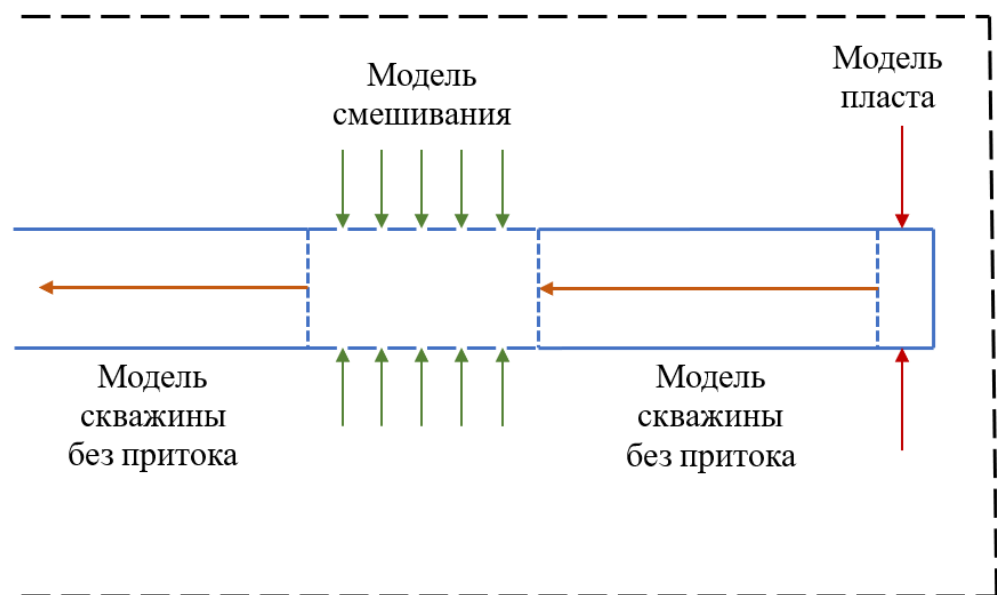


Рисунок 1.2 – Схематичное отображение декомпозиции задачи

Согласно данному подходу, можно универсально подойти к решению задач подобного рода. Например, рассматривая скважину без перфорации или с несколькими таковыми, необходимо и достаточно комбинировать соответствующие подзадачи, сопоставляя результаты одной как граничное условие следующей.

В следующих главах подробнее рассмотрим каждую из подзадач.

ГЛАВА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ

В данной главе рассматривается аналитическая модель для описания изменения температуры и давления газа, который протекает в изотропном однородном пласте к скважине с заданным давлением.

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу о неизотермической фильтрации несжимаемого флюида в однородном пласте к скважине, на стенках которого задано давление (рис. 2.1)

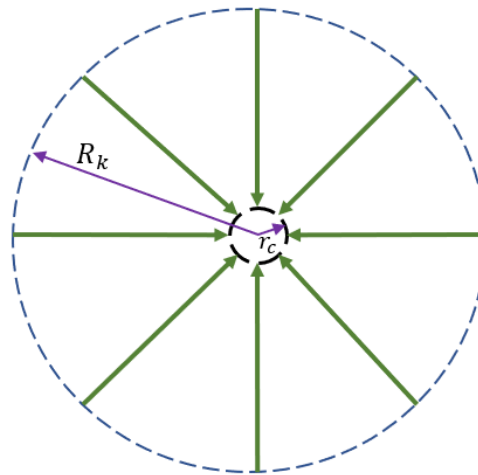


Рисунок 2.1 – Плоскорадиальный приток газа к скважине

Для описания поля давления в однородном пласте воспользуемся уравнением пьезопроводности в осесимметричной форме [15]:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} \\ p|_{r=r_c} = \phi, \\ p|_{r=R_k} = P_{\text{пл}}, \\ p|_{t=0} = P_{\text{пл}} \end{cases} \quad (2.1)$$

где k – проницаемость пласта, м^2 ; μ – вязкость, $\text{Па}\cdot\text{с}$; r_c и R_k – радиусы ствола скважины и контура питания соответственно, м ; $P_{\text{пл}}$ – давление на контуре питания (давление в пласте), Па ; ϕ – граничное условие на стенке скважины.

С помощью уравнения энергии Чекалюка [15] в осесимметричной форме опишем изменение поля температуры в насыщенном пористом пласте при фильтрации газа к скважине:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\text{пл}} \frac{\partial T}{\partial t} + C_{\phi} v(r, t) \left(\varepsilon \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \eta m C_{\phi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\lambda_{\text{пл}}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ T|_{t=0} = y(r), \\ T|_{r=R_k} = T_0, \\ \lambda_{\text{пл}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = q_0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Здесь $v(r, t)$ – скорость фильтрации, м/с; C_{ϕ} и $C_{\text{пл}}$ – объемная теплоемкость флюида и пласта соответственно, Дж/(м³·К); ε – коэффициент Джоуля-Томсона, К/Па; m – пористость; $\lambda_{\text{пл}}$ – теплопроводность пласта, Дж/(с·м·К); η – адиабатический коэффициент, К/Па; T_0 – температура на контуре питания (температура пласта), К; $y(r)$ – начальный профиль температуры в пласте; q_0 – тепловой поток на стенке скважины.

В представленной постановке система уравнений (2.1) и (2.2) не решается аналитически, поэтому будем считать, что давление и температура перераспределяются мгновенно в прискваженной зоне пласта ($\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$).

2.2 Распределение поля давления

Переходя к стационарной постановке, система уравнений (2.1) принимает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0 \\ p|_{r=r_c} = \phi, \\ p|_{r=R_k} = P_{\text{пл}}. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Общее решение (2.3) представимо в виде

$$p = C_1 \ln r + C_2. \quad (2.4)$$

Для поиска констант в общем решении подставим граничные условия:

$$\begin{cases} \phi = C_2 \ln r_c + C_2, \\ P_{\text{пл}} = C_1 \ln R_k + C_2; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{\phi - P_{\text{пл}}}{\ln\left(\frac{r_c}{R_k}\right)}, \\ C_2 = P_{\text{пл}} - \frac{\phi - P_{\text{пл}}}{\ln\left(\frac{r_c}{R_k}\right)} \ln R_k. \end{cases}$$

С учетом найденных констант получим:

$$p = P_{\text{пл}} + \frac{P_{\text{пл}} - \phi}{\ln\left(\frac{R_k}{r_c}\right)} \ln \frac{r}{R_k}. \quad (2.5)$$

Полученная формула (2.5) описывает распределения давления в пласте по r . Данная модель описывает распределение давления в пласте мгновенно при любом изменении давления на стенке скважины, заданном функцией ϕ .

2.3 Распределение поля температуры

Запишем систему уравнений (2.2) в стационарной постановке:

$$\begin{cases} C_\phi v(r, t) \left(\varepsilon \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\lambda_{\text{пл}}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\ \lambda_{\text{пл}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = 0, \\ T|_{r=R_k} = T_0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} C_\phi v(r, t) \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\lambda_{\text{пл}}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - C_\phi \varepsilon v(r, t) \frac{\partial p}{\partial r} \\ \lambda_{\text{пл}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = 0, \\ T|_{r=R_k} = T_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Данная модель учитывает эффект Джоуля-Томсона и радиальную теплопроводность.

По линейному закону Дарси определяется скорость фильтрации в пласте:

$$v(r, t) = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p(r)}{\partial r} \right) = -\frac{k P_{\text{пл}} - \phi}{\mu \ln \left(\frac{R_k}{r_c} \right)} \frac{1}{r}. \quad (2.7)$$

С учетом найденного выражения для поля давления (2.5), закона Дарси (2.7) и упрощений система (2.6) примет вид:

$$\begin{cases} C_\phi a \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_{\text{пл}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) - C_\phi \varepsilon a \frac{C_1}{r} \\ \lambda_{\text{пл}} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = 0, \\ T \Big|_{r=R_k} = T_0, \end{cases} \quad (2.8)$$

где для удобства введены следующие константы:

$$a = -\frac{k P_{\text{пл}} - \phi}{\mu \ln \left(\frac{R_k}{r_c} \right)}; \quad C_1 = \frac{\phi - P_{\text{пл}}}{\ln \left(\frac{r_c}{R_k} \right)}.$$

Общее решение полученной системы имеет вид:

$$T = C_3 + \frac{C_4 \lambda_{\text{пл}} r^{\frac{a C_f}{\lambda}} - C_\phi C_1 a \varepsilon \ln r}{a C_f}, \quad (2.9)$$

где константы C_3 и C_4 находятся из граничных условий и равны:

$$C_3 = T_0 + C_1 \varepsilon \ln R_k - \frac{C_1 \varepsilon \lambda_{\text{пл}}}{a C_\phi} \left(\frac{R_k}{r_c} \right)^{\frac{a C_\phi}{\lambda_{\text{пл}}}},$$

$$C_4 = C_1 \varepsilon r_c^{-\frac{a C_\phi}{\lambda_{\text{пл}}}}.$$

После подстановки найденных констант и упрощения решение системы (2.8) примет вид:

$$T = T_0 - C_1 \varepsilon \left[\frac{\lambda_{\text{пл}}}{a C_\phi} \left(\left(\frac{R_k}{r_c} \right)^{\frac{a C_\phi}{\lambda_{\text{пл}}}} - \left(\frac{r}{r_c} \right)^{\frac{a C_\phi}{\lambda_{\text{пл}}}} \right) + \ln \frac{r}{R_k} \right]. \quad (2.10)$$

Формулы (2.5) и (2.10) описывают изменение полей температуры и давления флюида в пласте при его стационарной фильтрации в однородном изотропном пласте.

Решение (2.10) можно интерпретировать как изменение температуры некоторого объема газа вследствие проявления радиальной теплопроводности и эффекта Джоуля-Томсона за счет движения газа с произвольного расстояния R_k до скважины.

Первый член в правой части формулы (2.10) есть начальная температура пласта. Из выражения видно, что изменение температуры определяется историческим и текущим положением газа.

2.4 Пример расчета изменения давления и температуры газа в пласте

Рассмотрим модельную задачу, в которой в качестве газа используется метан. Физические параметры газа и скелета пласта, а также граничные условия, указанные в таблицах 2.1 и 2.2:

Таблица 2.1

Параметры метана и скелета пласта

Параметр	Обозначение	Флюид	Скелет пласта
Проницаемость, 10^{-15} м^2	k	-	100
Вязкость, $10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$	μ	1.03	-
Теплопроводность пласта, $\text{Дж}/(\text{с}\cdot\text{м}\cdot\text{К})$	$\lambda_{\text{пл}}$	-	2.8
Коэффициент Джоуля-Томсона, $10^{-6} \text{ К}/\text{Па}$	ε	3	-
Объемная теплоемкость флюида, $\text{Дж}/(\text{м}^3\cdot\text{К})$	$C_{\text{ф}}$	1.6	-

Граничные условия и параметры пласта

Параметр	Обозначение	Скелет пласта
Давление на стенке скважины, Па	ϕ	0
Пластовая температура, К	T_0	282.15
Пластовое давление, 10^6 Па	$P_{пл}$	20
Радиус контура питания, м	R_k	10
Радиус скважины, м	r_c	0.1

На рисунках 2.2 и 2.3 представлены результаты расчетов изменения температуры (по формуле (2.10)) и давления (по формуле (2.5)) метана при его фильтрации через однородный изотропный пласт.

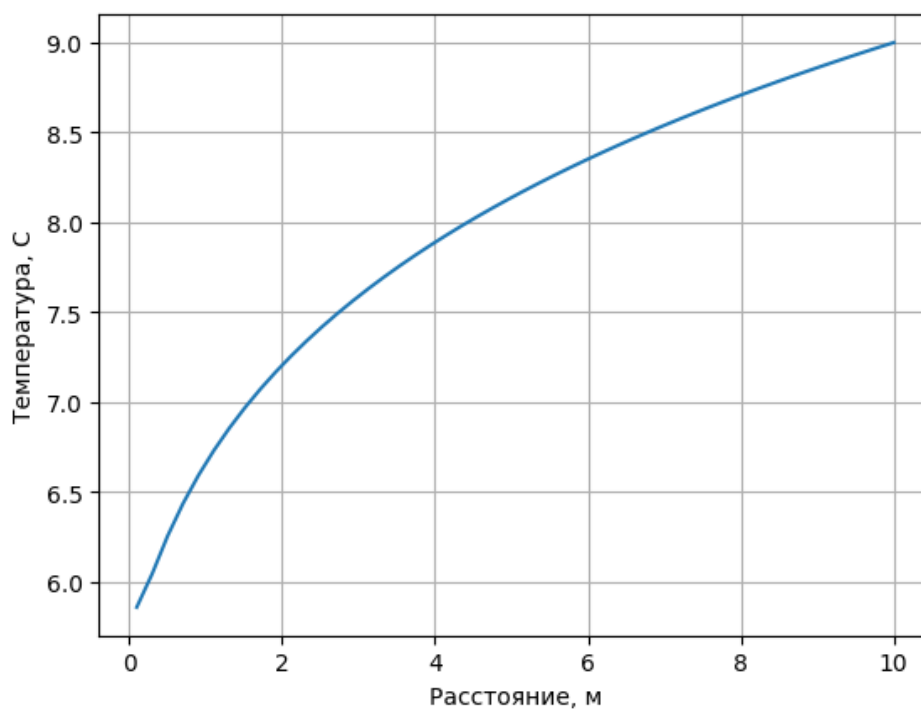


Рисунок 2.2 – Изменение температуры метана при фильтрации через пласт

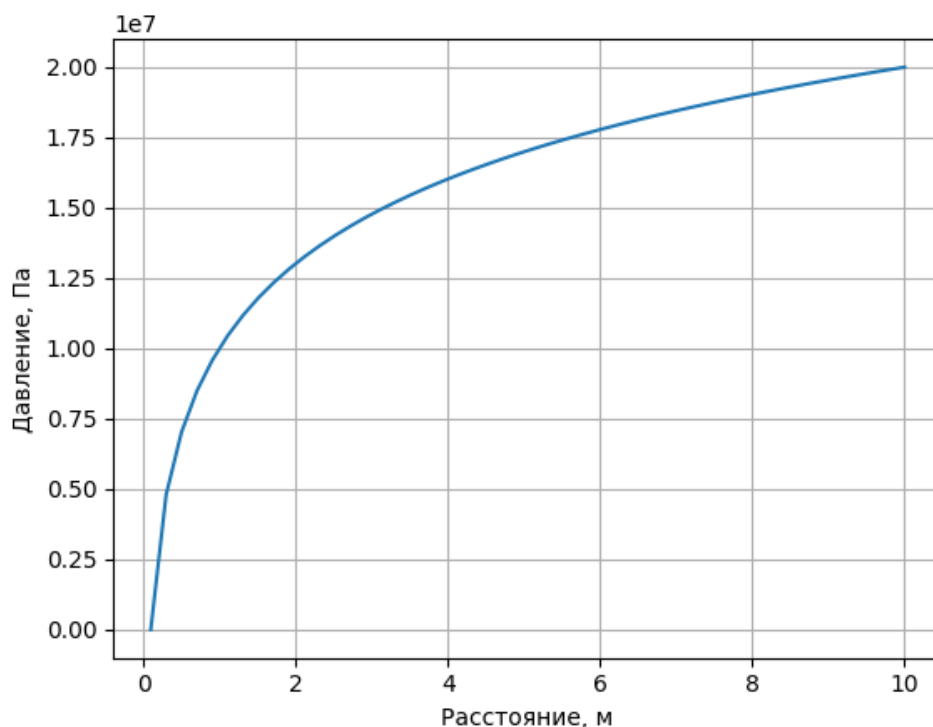


Рисунок 2.3 – Изменение давления метана при фильтрации через пласт

Из рисунков 2.2 и 2.3 видно, что при изменении давления на 20 МПа температура падает примерно на 3.3 °С. Это происходит за счет проявления эффекта Джоуля-Томсона, а также проявления радиальной теплопроводности.

В результате второй главы разработана аналитическая модель, которая описывает фильтрацию газа в пласте к скважине с заданным давлением. Полученный результат будет использоваться как граничное условие для модели расчета температуры и давления в скважине.

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРЫ И ДАВЛЕНИЯ В СКВАЖИНЕ

В главе рассмотрена модель для описания изменения температуры, давления и плотности газа при его течении в скважине с помощью балансовых соотношений и уравнения состояния. Рассмотрен установившийся вариант общей модели и дан алгоритм решения системы уравнений.

3.1 Постановка задачи

Основные дифференциальные уравнения, описывающие неустановившееся движение природного газа по скважине без притока и оттока через боковые стенки, выводятся из законов сохранения массы, импульса и энергии. Движение газа одномерное, то есть вектор скорости считается направленным вдоль оси скважины, а величины температуры, давления, скорости, плотности и другие являются функциями времени и координаты x , которая направлена вдоль оси скважины. Площадь поперечного сечения скважины величина постоянная. Из сопротивлений рассматривается лишь сопротивление трения газа о стенку скважины.

3.1.1 Баланс массы (уравнение неразрывности)

Для любого объема V , который ограничен замкнутой поверхностью S , уравнение потока массы записывается в следующей интегральной форме [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho v_n dS = 0, \quad (3.1)$$

где ρ – плотность газа, кг/м³; v_n – проекция вектора скорости на внешнюю нормаль к ограничивающей поверхности.

Используя уравнение (3.1), рассмотрим изменения, которые происходят на участке скважины, ограниченном двумя бесконечно близкими поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на некоторое расстояние Δx . В рамках

данной задачи учитываем, что по длине участка через боковую поверхность отсутствуют оттоки или притоки флюида. Имеем

$$S \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho dx + (\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1) S = 0,$$

отсюда, деля на Δx и переходя к пределу при $x_2 \rightarrow x_1$, получаем уравнение неразрывности в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

3.1.2 Баланс импульса

Для того же объема V , ограниченного поверхностью S , уравнение баланса импульса имеет вид [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v dV + \int_S \rho v v_n dS = \int_V \rho F dV + \int_S P_n dS, \quad (3.3)$$

где F – вектор ускорения внешних массовых сил, P_n – вектор напряжения поверхностных сил на ограничивающей поверхности S .

Перейдем к дифференциальной форме этого уравнения. Для этого учтем одномерность течения, т.е. спроецируем уравнение (3.3) на ось трубы. Для бесконечно малого по длине участка скважины получим:

$$S \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dx + (\rho_2 v_2^2 - \rho_1 v_1^2) S = -S \int_{x_1}^{x_2} \left(\rho g \frac{dy}{dx} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx - \int_{x_1}^{x_2} \tau \pi D dx,$$

где g – ускорение свободного падения, м/с²; y – ордината оси x , D – диаметр скважины, м.

Из гидравлической формулы Дарси-Вейсбаха касательное напряжение τ на стенках скважины представлено в виде [5]:

$$\tau = \frac{\lambda \rho |v| v}{8},$$

где λ – коэффициент гидравлического сопротивления, которое, вообще говоря, зависит от числа Рейнольдса, относительной шероховатости и диаметра труб [1].

В результате получаем баланса импульса в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho v^2) = -\rho \frac{\lambda|v|v}{2D} - \rho g \frac{dy}{dx}. \quad (3.4)$$

3.1.3 Баланс энергии

Уравнение баланса энергии записывается в виде [10]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \int_S \rho E v_n dS = \int_V \rho F v dV + \int_S P_n v dS + Q_0, \quad (3.5)$$

где E – полная энергия единицы массы, которая складывается из кинетической и внутренней энергии ($E = \varepsilon + v^2/2$): Q_0 – приток тепла извне за единицу времени.

С учетом всех вышеизложенных предположений для участка длиной Δx получим:

$$\begin{aligned} S \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} dx + (\rho_2 v_2 E_2 - \rho_1 v_1 E_1) S = \\ = -S \int_{x_1}^{x_2} \rho g v \frac{dy}{dx} dx + (p_1 v_1 - p_2 v_2) S + Q_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Приток тепла Q в выражении (3.6) можно разложить на два слагаемых:

$$Q_0 = \int_{x_1}^{x_2} q \pi D dx + \left(k S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 - \left(k S \frac{\partial T}{\partial x} \right)_1. \quad (3.7)$$

Первое слагаемое описывает поток тепла через стенку скважины, а второе – разность тепловых потоков, которые обусловлены теплопроводностью флюида.

Энергетическое уравнение также записывается в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right) = \pi D q - \rho g v \frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (3.8)$$

однако последним слагаемым обычно пренебрегают, т.к. передача тепла в газе за счет теплопроводности мала по сравнению с конвективной составляющей.

Запишем закон Ньютона для описания теплопередачи от газа, текущего в скважине, к внешней среде с некоторой температурой $T_{\text{внеш}}$ [2]:

$$q = \alpha(T_{\text{внеш}} - T),$$

где α – суммарный коэффициент теплопередачи, Вт/(К·м²); T – температура газа в скважине, К.

С учетом закона Ньютона баланс энергии приобретает вид:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right) = \pi D \alpha (T_{\text{внеш}} - T) - \rho g v \frac{dy}{dx}.$$

3.2 Общая математическая модель нестационарного неизотермического течения природного газа в скважине

Для описания нестационарного неизотермического течения газа в цилиндрической скважине постоянного диаметра уравнение неразрывности (3.2), балансы импульса (3.4) и энергии (3.8) записываются в следующем виде [4, 13, 14]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2) = -\rho \frac{\lambda |v| v}{2D} - \rho g \frac{dy}{dx}; \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho v \left(E + \frac{p}{\rho} \right) \right) = \frac{4\alpha(T_{\text{внеш}} - T)}{D} - \rho g v \frac{dy}{dx}. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Полученная система уравнений (3.9) должна быть дополнена граничными и начальными условиями, соответствующими рассматриваемой задаче. Также для замыкания системы уравнений необходимо выбрать

уравнение состояния, моделирующее связь температуры, давления и плотности газовой смеси в диапазоне изменения термодинамических параметров.

3.2.1 Уравнения состояния газовой смеси

Уравнение состояния – функциональное соотношение, связывающее термодинамические характеристики газа в состоянии термодинамического равновесия. Простейшим уравнением состояния является уравнение Менделеева -Клапейрона, которое описывает идеальный газ.

Поведение реальных газов можно описывать уравнением состояния идеального газа, но в ограниченном диапазоне давления и температуры.

Для описания «неидеальности» газа используют коэффициент сжимаемости (z -фактор):

$$z = \frac{pV_m}{RT},$$

где V_m – мольный объем газа, м³/моль; R – универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К); T – температура газа, К; p – давление газа, Па.

На сегодняшний день предложено большое количество уравнений состояний для расчета свойств природного газа. Несмотря на это уравнения постоянно модифицируются. Взяв за основу уравнения Ван-дер-Ваальса, ученые такие как Редлих, Соаве, Квонг [18, 19], Пенг, Робинсон [17], и другие предложили свои вариации уравнения состояния.

Уравнения состояния условно делятся на две группы: кубические и многокоэффициентные.

Классическими примерами многокоэффициентных уравнений являются уравнение Бенедикта-Вебба-Руббина [16] и GERG. Однако эти уравнения сложны для практического использования.

Поэтому для инженерных расчетов чаще всего используют кубические уравнения состояния, т.к. они имеют аналитическое решение и превосходят многокоэффициентные по точности расчета.

Кубические уравнения состояния можно представить в общем виде следующим образом [12]:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{(V_m + c)(V_m + d)},$$

где a, b, c, d – некоторые константы, описывающие газ.

Из кубических уравнений состояний чаще всего используют уравнение Пенга-Робинсона, уравнение Редлиха-Квонга и его модификацию – уравнение Соаве-Редлиха-Квонга. Брусилковский А. И. [3], Ширковский А. И. и Гуревич Г. Р. [6, 7] и другие анализировали применимость уравнений состояний в зависимости от состава газа и термобарических условий.

Для нашей задачи было выбрано уравнение Редлиха-Квонга, т.к. оно позволяет достаточно точно описывать связь давления, температуры и плотности в широком диапазоне их изменений. Также оно дает наиболее пессимистичный прогноз по падению температуры и давления, а это значит, что можно оценить максимальное изменение характеристик потока.

Двухпараметрическое уравнение Редлиха-Квонга было предложено в 1949г. и записывается в следующем виде [3]:

$$p(\rho, T) = \frac{hT\rho}{1 - \delta\rho} - \frac{c\rho^2}{(1 + \delta\rho)T^{0.5}}, \quad (3.10)$$

$$h = \frac{R}{M}, \quad M = \sum_1^n \gamma_k m_k, \quad \sum_1^n \gamma_k = 1,$$

$$\delta = \frac{\Omega_b T_c R}{M p_c}, \quad c = \frac{\Omega_a R^2 T_c^{2.5}}{M^2 p_c}$$

$$\Omega_a = 0.42748, \quad \Omega_b = 0.08664.$$

Здесь M – молярная масса газа, кг/кмоль; m_k – молярная масса k -й составляющей смеси газа, кг/кмоль; γ_k – доля k -й составляющей смеси газа;

Ω_a, Ω_b – безразмерные константы; T_c – критическая температура смеси газа, К;
 p_c – критическое давление смеси газа, Па.

3.2.2 Модель термодинамических процессов

В приведенной выше системе уравнений (3.9) уравнение полной энергии можно представить в терминах температуры. Сперва запишем последнее слагаемое правой части уравнения как

$$-\rho g v \frac{dy}{dx} = \rho g v \cos(\beta),$$

где β – угол между осью скважины и направлением силы тяжести. Для горизонтальной скважины $\beta(x) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \beta = 0$, на подъеме $\cos \beta < 0$, на спуске $\cos \beta > 0$.

Далее уравнение полной энергии необходимо записать в терминах внутренней энергии, а уравнение движения (3.4) домножим на v :

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} (p + \rho v^2) = -\rho \frac{\lambda |v| v^2}{2D} + \rho g v \cos(\beta), \quad (3.11)$$

уравнение полной энергии запишем с учетом равенства $E = \varepsilon + v^2/2$:

$$\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(v \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right) = \frac{4\alpha(T_{\text{внеш}} - T)}{D} + \rho g v \cos(\beta). \quad (3.12)$$

Из полученного уравнения (3.12) вычтем (3.11), в результате получаем уравнение баланса внутренней энергии:

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4\alpha(T_{\text{внеш}} - T)}{D} + \rho \frac{\lambda |v| v^2}{2D}, \quad (3.13)$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}$ – полная материальная производная.

Существует два подхода к моделированию термодинамических процессов в газовом потоке:

1 подход: в качестве независимых термодинамических переменных выбираются температура и плотность газа;

2 подход: в качестве независимых термодинамических переменных выбираются температура и давление газа.

Воспользуемся 1 подходом, т.к. неудобство 2 подхода заключается в том, что для коэффициента сверхсжимаемости $z(p, T)$ необходимо использовать разные виды зависимости [11]. Это значит, что нет универсальной зависимости z -фактора в широком диапазоне изменений термобарических условий.

Уравнение состояния Редлиха-Квонга имеет вид (3.10):

$$p(\rho, T) = \frac{hT\rho}{1 - \delta\rho} - \frac{c\rho^2}{(1 + \delta\rho)T^{0.5}}.$$

Калорическое уравнение записывается через внутреннюю энергию:

$$\varepsilon(T, V) = \varepsilon(T, V_0) + \int_{V_0}^V T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T} \right)_V \right) dV,$$

А коэффициент удельной теплоемкости при постоянном объеме c_V имеет вид:

$$c_V = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_V.$$

Тогда уравнение баланса внутренней энергии (3.13) принимает вид:

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4\alpha(T_{\text{внеш}} - T)}{D} + \rho \frac{\lambda |v| v^2}{2D}. \quad (3.14)$$

Для вывода уравнения (3.14) дополнительно использовались следующие равенства [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)_V \frac{dT}{dt} + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T \frac{dV}{dt}; \\ \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V} \right)_T &= -p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V; \quad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Вывод первого равенства из (3.15) приведен в книге [9], а $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$ вычисляется по соответствующему уравнению состояния. В нашем случае с учетом (3.10)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{h\rho}{1 - \delta\rho} + \frac{1}{2} \frac{c\rho^2}{(1 + \delta\rho)T^{1.5}}.$$

3.3 Математическая модель стационарного неизотермического течения природного газа в скважине

В предыдущем параграфе была получена модель неустановившегося неизотермического течения газа. Запишем модель установившегося течения газа в скважине с учетом следующих допущений:

1. скважина горизонтальна, т.е. $\cos(\beta) = 0$;
2. коэффициенты гидравлического сопротивления λ , суммарной теплопередачи α и удельной теплоемкости c_V – постоянные величины.

Тогда система уравнений (3.9) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v = \frac{4Q}{\pi D^2}; \\ \rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \rho \frac{\lambda |v| v}{2D}; \\ \rho c_V \frac{dT}{dz} = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4\alpha(T_{\text{внеш}} - T)}{D} + \rho \frac{\lambda |v| v^2}{2D}; \\ p = p(\rho, T) \end{array} \right. \quad (3.16)$$

где Q – массовый расход газа, кг/с.

Граничные условия:

$$x = 0: \quad p = p_{x0}, \quad T = T_{x0}.$$

Полученная система уравнений (3.16) моделирует широкий класс реальных течений природного газа по скважине. Она справедлива для любого уравнения состояния. Решить ее можно численно, например, методом Рунге-Кутты.

Решение системы (3.16) можно свести к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом граничных условий. Алгоритм выглядит следующим образом:

1. привести систему (3.16) к безразмерному виду;

2. в уравнении движения и тепловом уравнении выразить давление через плотность и температуру с помощью выбранного уравнения состояния;
3. Полученная в результате система из двух однородных дифференциальных уравнений решается относительно первых производных плотности и температуры по x .
4. Давление рассчитывается по найденным плотности и температуре из уравнения состояния.

3.3.1 Переход к безразмерным величинам

Проведем обезразмеривание для любого уравнения состояния. Зададим характерные значения длины l_x , давления p_x и температуры T_x . Характерную плотность ρ_x можно определить из уравнения состояния

$$p_x = p(\rho_x, T_x).$$

Характерная скорость v_x определяется из уравнения потока массы

$$v_x = \frac{4Q}{\pi R^2 \rho_x}.$$

Введем безразмерные функции и переменные:

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{z}{l_x}; & \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_x}; & \tilde{T}_{\text{внеш}} &= \frac{T_{\text{внеш}}}{T_x}; \\ \tilde{T} &= \frac{T}{T_x}; & \tilde{v} &= \frac{v}{v_x}; & \tilde{p} &= \frac{p}{p_x}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения системы (2.16) в безразмерном виде имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\rho} \tilde{v} &= 1; \\ \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} &= -m_1 \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} - m_2 \tilde{v}; \\ \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{x}} &= -m_5 \tilde{T} \left(\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{T}} \right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} + m_6 (\tilde{T}_{\text{внеш}} - \tilde{T}) + m_4 \tilde{v}^2; \\ \tilde{p} &= p(\tilde{\rho}, \tilde{T}), \end{aligned} \right. \quad (3.17)$$

где m_k – безразмерные комплексы, значения которых будут приведены ниже.

Безразмерные граничные условия:

$$x = 0: \quad p_0 = p_{x0}/p_x, \quad T_0 = T_{x0}/T_x.$$

В полученной системе уравнений выразим скорость через плотность следующим соотношением:

$$\tilde{v} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \rightarrow \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{x}} = -\frac{1}{\tilde{\rho}^2} \frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{x}}.$$

Для облегчения записи, если это не вызывает разночтений, безразмерные величины будут обозначаться также, как соответствующие им размерные величины. В результате получается замкнутая система двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно безразмерных плотности $\tilde{\rho} = \rho$ и температуры $\tilde{T} = T$, которая дополнена уравнением состояния для связи функций T, p, ρ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v = 1; \\ \frac{d\rho}{dx} = m_1 \rho^2 \frac{dp}{dx} + m_2 \rho; \\ \frac{dT}{dx} = m_{11} \frac{T}{\rho^2} \left(\frac{dp}{dT} \right) \frac{d\rho}{dx} + m_6 (T_{\text{внеш}} - T) + \frac{m_4}{\rho^2}; \\ p = f_p(\rho, T), \\ x = 0: \quad p_0 = \frac{p_{x0}}{p_x}, \quad T_0 = \frac{T_{x0}}{T_x}. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Производную $\frac{dp}{dx}$ из уравнения движения выразим через производные $\frac{d\rho}{dx}, \frac{dT}{dx}$ следующим образом:

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{d\rho}{dx} + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) \frac{dT}{dx}.$$

Безразмерные комплексы m_k , входящие в тепловое уравнение и уравнение движения, выражаются через характерные величины $\rho_x, T_x, p_x, l_x, v_x$, коэффициент гидравлического сопротивления λ , диаметр скважины D , суммарный коэффициент теплопередачи α и удельный коэффициент теплоемкости c_V :

$$m_1 = \frac{p_x}{\rho_x v_x^2}; \quad m_2 = \frac{\lambda l_x}{2D}; \quad m_4 = \frac{\lambda v_x^2 l_x}{2DT_x c_V}; \quad m_5 = \frac{p_x}{\rho_x c_V T_x}; \quad m_6 = \frac{4\alpha l_x}{D\rho_x v_x c_V}. \quad (3.19)$$

После всех преобразований получаем систему из двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которую можно решить относительно $\frac{d\rho}{dx}, \frac{dT}{dx}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dx} = F_1(T, \rho) = \frac{f_2 + f_1 f_T f_3}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_T f_*}; \\ \frac{dT}{dx} = F_2(T, \rho) = \frac{f_3 + f_* f_2 - f_1 f_\rho f_3}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_T f_*}; \\ p = f_p(T, \rho); \\ v = \frac{1}{\rho}; \\ \rho(0) = \rho_0; \quad T(0) = T_0. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Безразмерные функции f_k , входящие в систему уравнений (3.20), выражаются через безразмерные комплексы m_k (3.19) и через безразмерные температуру T и плотность ρ по формулам:

$$f_1 = m_1 \rho^2; \quad f_2 = m_2 \rho; \quad f_3 = \frac{m_4}{\rho^2} + m_6 (T_{\text{внеш}} - T);$$

$$f_T = \frac{\partial f_p}{\partial T}; \quad f_\rho = \frac{\partial f_p}{\partial \rho}; \quad f_* = m_5 \frac{T f_T}{\rho^2}.$$

Полученная система уравнений описывает изменение температуры и плотности природного газа для любых уравнений состояний $p = f_p(T, \rho)$. При этом вид функций f_1, f_2, f_3 остается неизменным, а определению подлежат только f_p, f_T, f_ρ, f_* , вид которых зависит от выбора уравнения состояния.

3.3.2 Расчет функций f_ρ, f_T, f_* для уравнения состояния Редлиха-Квонга

Запишем уравнение состояния Редлиха-Квонга (3.10) в безразмерном виде:

$$p = f_p = m_8 \frac{T\rho}{1 - m_3\rho} - \frac{m_9\rho^2}{(1 + m_3\rho)T^{0.5}},$$

где безразмерные комплексы m_k имеют вид:

$$m_3 = \delta\rho; \quad m_8 = \frac{h\rho_x T_x}{p_x}; \quad m_9 = \frac{c\rho_x^2}{p_x T_x^{0.5}}.$$

Тогда функции f_ρ, f_T, f_* записываются как

$$f_\rho = \frac{\partial f_p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} = m_8 \frac{T\rho}{(1 - m_3\rho)^2} - m_9 \frac{2\rho + m_3\rho^2}{(1 + m_3\rho)^2 T^{0.5}};$$

$$f_T = \frac{\partial f_p}{\partial T} = \frac{\partial p}{\partial T} = m_8 \frac{\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9}{2} \frac{\rho^2}{(1 + m_3\rho) T^{1.5}};$$

$$f_* = m_5 \frac{T f_T}{\rho^2} = m_{11} \frac{T}{\rho^2} \left(m_8 \frac{\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9}{2} \frac{m_9 \rho^2}{(1 + m_3\rho) T^{1.5}} \right)$$

3.4 Расчет установившегося течения природного газа в скважине

В безразмерной форме модель стационарного неизотермического течения природного газа в скважине при постоянных коэффициентах гидравлического сопротивления λ , суммарной теплопередачи α и удельной теплоемкости c_V имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dx} = F_1(T, \rho) = \frac{f_2 + f_1 f_T f_3}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_T f_*}; \\ \frac{dT}{dx} = F_2(T, \rho) = \frac{f_3 + f_* f_2 - f_1 f_\rho f_3}{1 - f_1 f_\rho - f_1 f_T f_*}; \\ p = f_p = m_8 \frac{T\rho}{1 - m_3\rho} - \frac{m_9 \rho^2}{(1 + m_3\rho) T^{0.5}}; \\ v = \frac{1}{\rho}; \\ \rho(0) = \rho_0; \quad T(0) = T_0, \end{array} \right. \quad (3.21)$$

где безразмерные комплексы m_k и функции f_k выражаются по формулам:

$$m_1 = \frac{p_x}{\rho_x v_x^2}; \quad m_2 = \frac{\lambda l_x}{2D}; \quad m_3 = \delta \rho_x; \quad m_4 = \frac{\lambda v_x^2 l_x}{2DT_x c_V};$$

$$m_5 = \frac{p_x}{\rho_x c_V T_x}; \quad m_6 = \frac{4\alpha l_x}{D\rho_x v_x c_V}; \quad m_8 = \frac{h\rho_x T_x}{p_x}; \quad m_9 = \frac{c\rho_x^2}{p_x T_x^{0.5}};$$

$$f_1 = m_1 \rho^2; \quad f_2 = m_2 \rho; \quad f_3 = \frac{m_4}{\rho^2} + m_6 (T_{\text{внеш}} - T);$$

$$f_\rho = m_8 \frac{T\rho}{(1 - m_3\rho)^2} - m_9 \frac{2\rho + m_3\rho^2}{(1 + m_3\rho)^2 T^{0.5}};$$

$$f_T = m_8 \frac{\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9}{2} \frac{\rho^2}{(1 + m_3\rho) T^{1.5}};$$

$$f_* = m_5 \frac{T}{\rho^2} \left(m_8 \frac{\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9}{2} \frac{m_9 \rho^2}{(1 + m_3\rho) T^{1.5}} \right).$$

3.4.1 Алгоритм расчета

Расчет распределения температуры $T(x)$, давления $p(x)$ и плотности $\rho(x)$ проводится по следующему алгоритму:

1. Задание параметров задачи: диаметра D и длины l скважины, объемного расхода природного газа Q , коэффициента гидравлического сопротивления λ , суммарного коэффициента теплопередачи α , температура окружающей среды (температура пласта) $T_{\text{внеш}}$, задание граничных условий – давления p_{x0} и температуры T_{x0} на забое скважины.
2. Задание характерных величин: температуры T_x , длины l_x и давления p_x .
3. Задание состава газа и характеристик ее компонент (критические температура T_{ck} , давление p_{ck} и мольный объем V_{ck} , фактор ацентричности ω_{ck} , коэффициент сверхсжимаемости z_{ck} , молярная масса m_k и доли (в процентах) γ_k).

4. Выбор уравнения состояния $p = f_p(T, \rho)$. По выбранному уравнению состояния для смеси газов заданного состава рассчитывается значение характерной плотности $\rho_x = \rho(T_x, p_x)$.
5. Расчет безразмерных комплексов m_k , зависящих от перечисленных в пункте 1 параметров, а также от величины c_V , термодинамических характеристик газовой смеси из пункта 4 и от характерных величин из пункта 2.
6. Задание явного вида зависимостей безразмерных функций $f_1, f_2, f_3, f_T, f_*, f_\rho, f_p$ от безразмерных температуры T и плотности ρ флюида.
7. Задание безразмерных граничных условий ρ_0, T_0 .
8. Задание правых частей $F_1(\rho, T), F_2(\rho, T)$ в системе уравнений (3.21) безразмерной модели.
9. Численное решение (например, методом Рунге-Кутты 4-го порядка) системы уравнений (3.21).
10. Графическое представления рассчитанных распределений температуры, давления и плотности.

3.4.2 Пример расчета установившегося течения газа в скважине

Рассмотрим следующую модельную задачу. По горизонтальному участку скважины длиной L движется природный газ, в составе которого преимущественно преобладает метан. На забое скважины поддерживаются постоянные температура T_{x0} и давление p_{x0} . Температура пласта $T_{\text{внеш}}$ неизменна на всей длине скважины.

1. Зададим следующие постоянные величины $Q, L, R, \lambda, T_{\text{внеш}}, \alpha, c_V$, а также граничные условия на забое:

$$Q = 10000 \text{ м}^3/\text{сут}; \quad L = 1000 \text{ м}; \quad R = 0.1 \text{ м}; \quad \lambda = 0.008756;$$

$$T_{\text{внеш}} = 282.15 \text{ К}; \quad \alpha = 14 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}); \quad c_V = 1654.14 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$$

$$T_{x0} = 283.15 \text{ К}; \quad p_{x0} = 13.2 \text{ МПа}.$$

- Выбираем характерные значения температуры T_x , длины l_x и давления p_x . В нашей задаче можно принять $T_x = 283.15$ К, $l_x = 1000$ м, $p_x = 15$ МПа.
- Зададим состав природного газа и характеристики его компонент. В рассматриваемой задаче будем считать, что газ состоит только из метана CH_4 .

- Критические температура T_c и давление p_c , универсальная газовая постоянная R , молярная масса M имеют следующие значения:

$$T_c = 190.56 \text{ К}; \quad p_c = 4.5779 \text{ МПа};$$

$$R = 8.31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}; \quad M = 0.016 \text{ кг/моль}.$$

- Параметры h, δ, c из уравнения состояния Редлиха-Квонга (3.10) равны:

$$h = 519.375 \text{ м}^2/(\text{К}\cdot\text{с}^2); \quad \delta = 0.00187312 \text{ м}^3/\text{кг};$$

$$c = 12626.731 \text{ м}^5\cdot\text{К}^{0.5}/(\text{с}^2\cdot\text{кг}).$$

- По уравнению состояния Редлиха-Квонга вычислим величину характерной плотности $\rho_x = \rho(T_x, p_x)$, а также величину плотности на забое $\rho_{x0} = \rho(T_{x0}, p_{x0})$. Решая кубическое уравнение (3.10) относительно плотности, находим

$$\rho_x = 129.362 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_{x0} = 114.08 \text{ кг/м}^3$$

Также можно найти характерную скорость v_x потока:

$$v_x = \frac{4Q}{\pi D^2} = 3.68 \text{ м/с}$$

- Рассчитываются безразмерные комплексы m_k из системы уравнений (3.21). В данной модельной задаче они равны:

$$m_1 = 8562.270; \quad m_2 = 21.89; \quad m_3 = 0.242; \quad m_4 = 0.00063;$$

$$m_5 = 0.248; \quad m_6 = 0.3556; \quad m_8 = 1.268; \quad m_9 = 0.837.$$

- Задается явный вид безразмерных функций $f_1, f_2, f_3, f_\rho, f_T, f_*$:

$$f_1 = m_1 \rho^2; \quad f_2 = m_2 \rho; \quad f_3 = \frac{m_4}{\rho^2} + m_6 (T_{\text{внеш}} - T);$$

$$f_\rho = m_8 \frac{T\rho}{(1 - m_3\rho)^2} - m_9 \frac{2\rho + m_3\rho^2}{(1 + m_3\rho)^2 T^{0.5}} ;$$

$$f_T = m_8 \frac{\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9}{2} \frac{\rho^2}{(1 + m_3\rho) T^{1.5}} ;$$

$$f_* = m_{11} \frac{T}{\rho^2} \left(m_8 \frac{\rho}{1 - m_3\rho} + \frac{m_9}{2} \frac{m_9\rho^2}{(1 + m_3\rho) T^{1.5}} \right),$$

где все величины безразмерные.

9. Записываются правые части $F_1(\rho, T), F_2(\rho, T)$ системы уравнений (3.21) и безразмерные граничные условия ρ_0, T_0 .
10. Полученная система уравнений с постоянными λ, α, c_V решается численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка. В расчетах был принят шаг $dx = 0.01$.
11. По рассчитанным безразмерным температуре, плотности и давлению определяются соответствующие размерные величины.

На рисунках 3.1-3.3 представлены изменение температуры $T(x)$, плотности $\rho(x)$ и давления $p(x)$ метана соответственно для параметров, посчитанных выше.

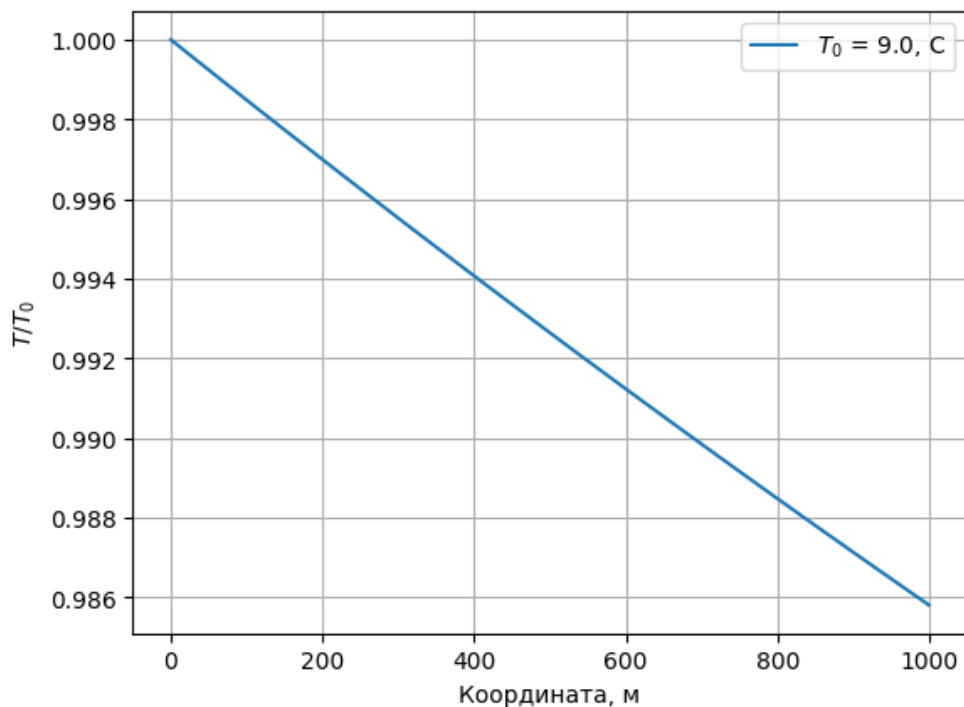


Рисунок 3.1 – Изменение температуры метана вдоль скважины

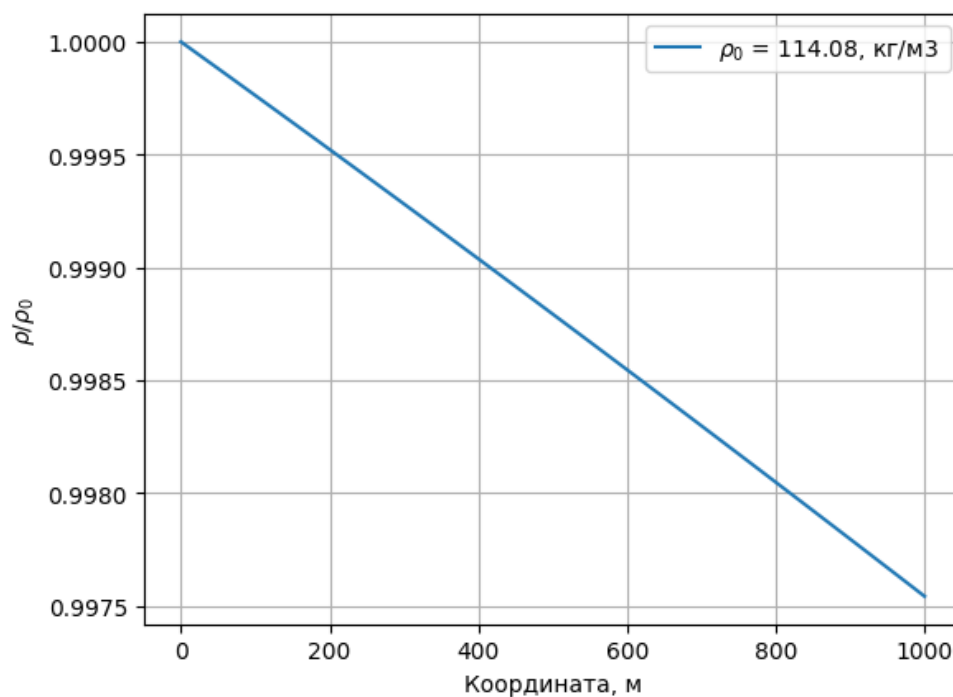


Рисунок 3.2 – Изменение плотности метана вдоль скважины

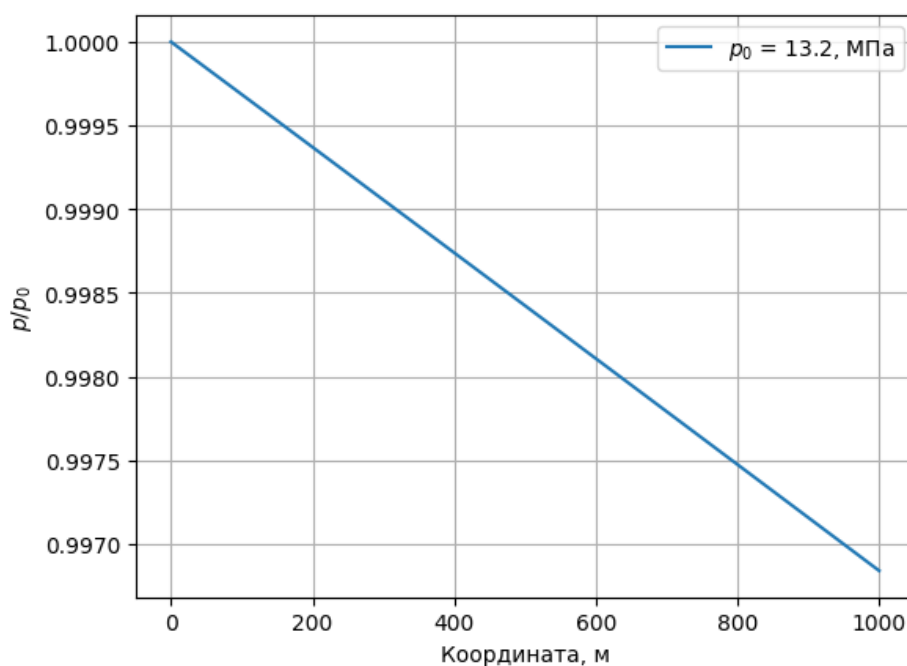


Рисунок 3.3 – Изменение давления метана вдоль скважины

Из рисунков 3.1-3.3 видно, что температура, плотность и давление газа уменьшается линейно. Температура снизилась примерно на 0.126 градус, плотность – на 0.2852 кг/м³, а давление упало 0.04 МПа.

В результате третьей главы разработана аналитическая модель изменения давления и температуры в скважине на участке без перфораций. Для этого записываются балансовые соотношения (уравнение неразрывности, баланс импульса и баланс энергии), а для замыкания системы уравнений выбрано уравнение состояния Редлиха-Квонга. В результате температура газа в скважине может как увеличиваться, так и уменьшаться, в зависимости от температуры пласта вокруг скважины, а также от значения коэффициента теплопередачи, гидравлического сопротивления и т.д. Полученные результаты являются граничными условиями для математической модели смешивания газа на интервале притока газа через боковые стенки.

ГЛАВА 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СМЕШИВАНИЯ ГАЗА В ИНТЕРВАЛАХ ПРИТОКА

В главе рассмотрены модели смешивания газа в интервалах притока. Первая модель описывает приток как точечный источник, вторая – распределенный участок с несколькими перфорациями на некоторой длине. В обоих случаях записываются балансовые соотношения и приведены примеры тестовых задач.

4.1 Постановка задачи для точечного источника

Рассмотрим течение, возникающее при смешении двух однородных потоков несжимаемой жидкости. Предположим, что зона смешения – область резкого изменения параметров течения.

В процессе смешения двух потоков, имеющих разные термодинамические параметры, объемный расход (дебит) получаемого потока нельзя найти суммой объемных расходов смешивающихся газов:

$$Q_3 \neq Q_1 + Q_2,$$

где Q_1, Q_2, Q_3 – объемные расходы газа, протекающего по скважине, втекающего в скважину и общий соответственно, м³/сут.

Масса же является величиной аддитивной, поэтому необходимо рассматривать закон сохранения массового расхода:

$$m_3 = m_1 + m_2$$

где m_1, m_2, m_3 – массовые расходы газа, протекающего по скважине, втекающего в скважину и общий соответственно, кг/сут.

Будем считать, что смешение газа будет проходить мгновенно, т.к. источник притекающего газа точечный. В данном случае необходимо перейти к массовому расходу, который можно найти следующим образом:

$$m_1 \approx Q_1 \rho_1,$$

$$m_2 \approx Q_2 \rho_2.$$

где ρ_1, ρ_2 – плотности флюида, протекающего в скважине, и втекающего через боковую стенку соответственно, кг/м³.

Тогда общий объемный расход можно найти следующим образом:

$$Q_3 = \frac{m_3}{\rho_3}. \quad (4.1)$$

Чтобы найти плотность газа после смешения воспользуемся формулой

$$\rho_3 = r_1\rho_1 + r_2\rho_2,$$

где r_1, r_2 – массовые доли газа, протекающего в скважине и втекающего в нее, которые находятся как:

$$r_i = \frac{m_i}{m_3}.$$

Подставляя все в формулу (4.1), получим итоговое выражение для общего объемного расхода:

$$Q_3 = \frac{m_3}{\rho_3} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{m_3}\rho_1 + \frac{m_2}{m_3}\rho_2} = \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1\rho_1 + m_2\rho_2}. \quad (4.2)$$

Температуру же будем находить как

$$T_3 = \frac{m_1T_1 + m_2T_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.3)$$

где T_1, T_2, T_3 – температуры газа, протекающего по скважине, втекающего в скважину и общий соответственно, К.

4.2 Пример расчета температуры в скважине с точечным источником

Рассмотрим первую модельную задачу, для которой используются формулы из предыдущей главы (3.21). В данном случае проверим, как изменяется температура газа после смешивания, если параметры втекающего и протекающего газов одинаковы:

$$Q_1 = Q_2 = 10000 \text{ м}^3/\text{сут};$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 114.08 \text{ кг/м}^3;$$

$$T_1 = T_2 = 282.14 \text{ К.}$$

Ожидается, что при таких параметрах температура газа не изменится. Рассчитав по формуле (4.3), температура после смешивания $T_3 = 282.1364 \text{ К} = 8.9864 \text{ }^\circ\text{С}$. На рис. 4.1 видно, что полученная температура равна расчетной.

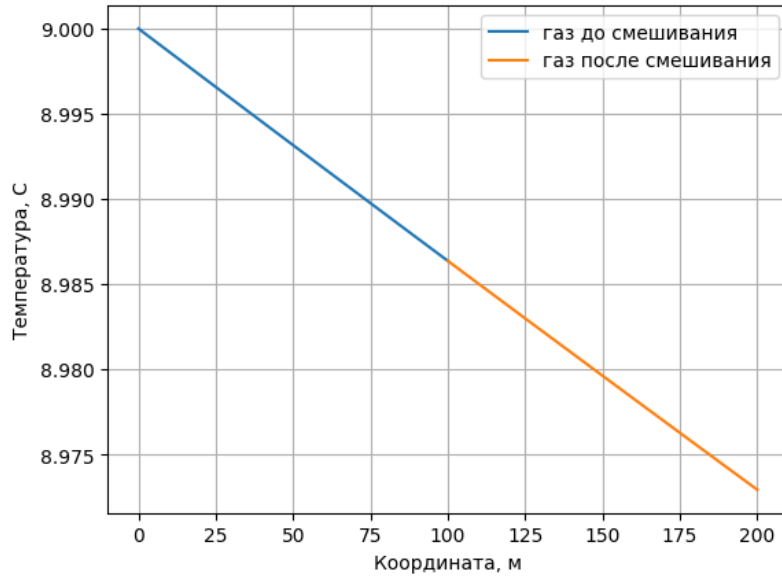


Рисунок 4.1 – Изменение температуры газа в модельной задаче 1

Рассмотрим следующую модельную задачу, когда параметры газов отличаются. Физические данные газов представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

Параметры метана и скелета пласта

Параметр	Обозначение	Значение
Объемный расход протекающего газа, м ³ /сут	Q_1	10000
Объемный расход втекающего газа, м ³ /сут	Q_2	10000
Плотность протекающего газа, кг/м ³	ρ_1	114.05
Плотность втекающего газа, кг/м ³	ρ_2	110
Температура протекающего газа, К	T_1	282.14
Температура втекающего газа, К	T_2	280.14

Ожидаем, что температура газа после смешивания уменьшится, т.к. значение температуры втекающего газа меньше.

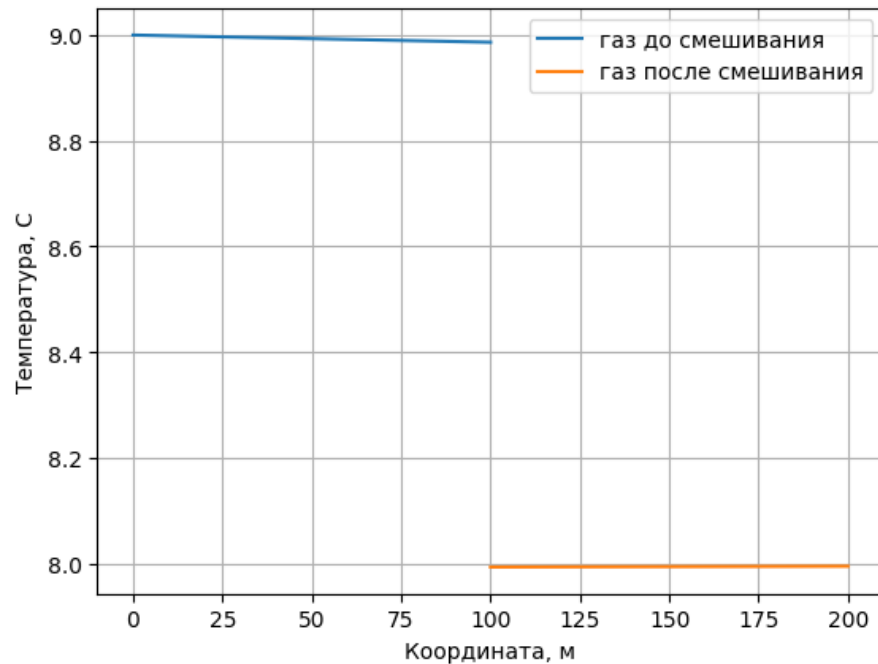


Рисунок 4.2 – Изменение температуры газа в модельной задаче 2

На рис. 4.2 температура газа после смешивания уменьшилась примерно на 1 градус. Значение совпадает с формулой (4.3).

4.3 Постановка задачи при распределенном притоке

На рис. 4.3 показан некоторый интервал скважины длины l , на всей длине которого втекает природный газ через боковую стенку скважины.

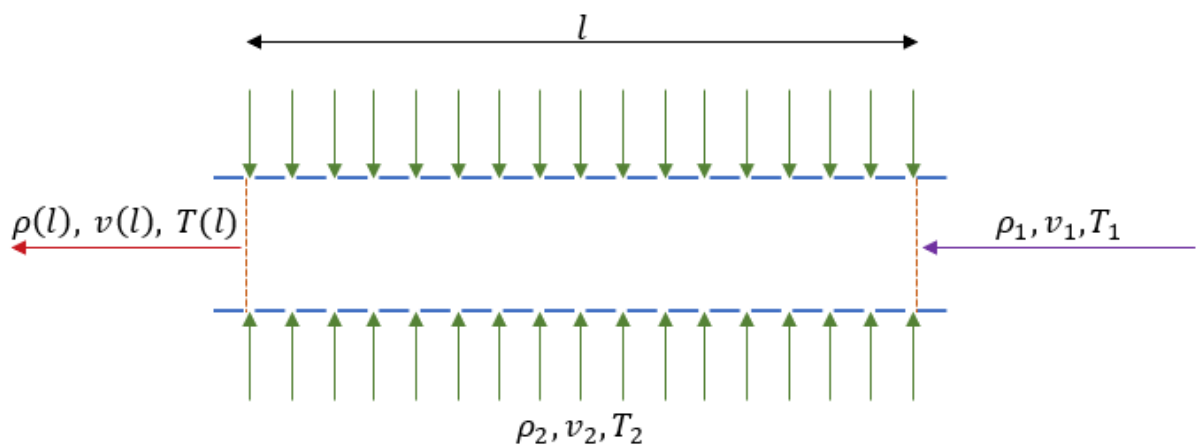


Рисунок 4.3 – Интервал скважины с перфорациями

Запишем основные балансовые соотношения для данного участка скважины.

4.3.1 Уравнение неразрывности

Для любого объема V , который ограничен замкнутой поверхностью S , уравнение потока массы записывается в интегральной форме (2.1). Используя его, рассмотрим изменения, которые происходят на участке скважины, ограниченном двумя бесконечно близкими поперечными сечениями, отстоящими друг от друга на некоторое расстояние Δx . Считаем, что по длине скважины через боковую поверхность происходит приток газа (рис. 4.3). Имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho dx + (\rho(x_2)v(x_2) - \rho_1 v_1) = \frac{1}{S_{\text{СКВ}}} \int_{x_1}^{x_2} \pi D \eta \rho_2 v_2 dx \quad (4.4)$$

где $S_{\text{СКВ}}$ – площадь поперечного сечения скважины, м^2 ; ρ_1 – плотность газа, протекающего в скважине, $\text{кг}/\text{м}^3$; ρ_2 – плотность газа, втекающего через перфорации скважины, $\text{кг}/\text{м}^3$; v_1 – скорость газа, протекающего в скважине, $\text{м}/\text{с}$; v_2 – скорость, с которой газ втекает в скважину через перфорации, $\text{м}/\text{с}$; η – параметр открытости трубы.

$$\eta = \frac{S_{\text{пер}}}{S}, \quad (4.5)$$

где S – площадь поверхности скважины, на которой расположены перфорации, м^2 . Находится как:

$$S = \pi D l, \quad (4.6)$$

где D – диаметр скважины, м ; l – длина участка с перфорациями, м .

Суммарная площадь перфораций высчитывается как:

$$S_{\text{пер}} = n \frac{\pi D_{\text{пер}}^2}{4}, \quad (4.7)$$

где n – количество перфораций на длине l ; $D_{\text{пер}}$ – диаметр перфорации, м .

Тогда параметр открытости скважины (4.5) с учетом (4.6) и (4.7) рассчитывается как:

$$\eta = \frac{n\pi D_{\text{пер}}^2}{4\pi D l} = \frac{nD_{\text{пер}}^2}{4D l}, \quad (4.8)$$

а суммарную площадь перфораций $S_{\text{пер}}$ с учетом (4.8) принимает вид:

$$S_{\text{пер}} = \pi D l \eta.$$

Уравнение неразрывности (4.4) в дифференциальной форме с учетом выражений, полученных ранее:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = \frac{4\eta}{D} \rho_2 v_2 \quad (4.9)$$

где скорость $v_2 = v_2(\eta)$ и выражается следующим образом:

$$v_2 = \frac{Q_2}{S_{\text{пер}}} = \frac{Q_2}{\pi D l \eta}.$$

4.3.2 Баланс энергии

На любом малом объеме скважины, показанной на рис. 4.3 сохранение энергии можно представить как:

Уравнение баланса энергии записывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho E dV + \int_S \rho E v_n dS = Q_0, \quad (4.10)$$

где Q_0 – приток тепла извне за единицу времени.

$$Q_0 = \int_{x_1}^{x_2} q \pi D dx = \int_{x_1}^{x_2} c_V \rho_2 T_2 v_2 \pi D dx$$

Тогда уравнение энергии в локальной форме записывается как:

$$\frac{\partial(c_V \rho T S_{\text{СКВ}})}{\partial t} = - \frac{\partial(c_V \rho T v S_{\text{СКВ}})}{\partial x} + c_V \rho_2 T_2 \pi D l \eta v_2. \quad (4.11)$$

4.4 Общая математическая модель распределенного притока газа через боковую поверхность скважины

Запишем систему уравнений, которые описывают изменение температуры и плотности на интервале притока газа через боковую поверхность скважины длины l :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{4\eta}{D} \rho_2 v_2, \\ \frac{\partial(c_V \rho T S_{\text{СКВ}})}{\partial t} = -\frac{\partial(c_V \rho S_{\text{СКВ}} T v)}{\partial x} + T_2 c_V \pi D l \eta \rho_2 v_2. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Считаем, что c_V величина постоянная и одинакова для обоих газов. Также процесс стационарный, т.е. $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, т.к. изменение температуры и плотности происходит мгновенно. Учитывая данные предположения, система уравнений (4.12) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{4\eta}{D} \rho_2 v_2, \\ 0 = -\frac{\partial(\rho S_{\text{СКВ}} T v)}{\partial x} + T_2 \pi D \eta \rho_2 v_2. \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(l)v(l) - \rho_1 v_1 = \frac{4\eta}{D} \int_0^l \rho_2 v_2 dx, \\ \rho(l)T(l)v(l) - \rho_1 T_1 v_1 = \frac{1}{S_{\text{СКВ}}} \int_0^l T_2 \pi D \eta \rho_2 v_2 dx. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

В полученной системе уравнений (4.13) три неизвестных: $\rho(l)$, $T(l)$ и $v(l)$. Уравнение баланса масс используется для поиска плотности $\rho(l)$, энергетическое уравнение – для поиска $T(l)$. Для того, чтобы замкнуть систему, необходимо дополнительное уравнение баланса импульса, с помощью которого найдем $v(l)$.

Баланс импульса для нашей задачи будет записывать в виде:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v(l).$$

где m_1 – масса протекающего газа в скважине, кг; m_2 – масса втекающего газа, кг.

Как говорилось ранее:

$$\begin{aligned} m_1 &\approx Q_1 \rho_1, \\ m_2 &\approx S_{\text{пер}} \rho_2 v_2. \end{aligned}$$

Тогда формула для оценки скорости потока после смешивания выглядит следующим образом:

$$v(l) = \frac{Q_1 \rho_1 v_1 + S_{\text{пер}} \rho_2 v_2^2}{Q_1 \rho_1 + S_{\text{пер}} \rho_2 v_2}. \quad (4.14)$$

Замкнутая система уравнений, описывающая изменение температуры и плотности в интервале притока газа, имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho(l)v(l) - \rho_1 v_1 &= \frac{4\eta}{D} \int_0^l \rho_2 v_2 dx, \\ \rho(l)T(l)v(l) - \rho_1 T_1 v_1 &= \frac{1}{S_{\text{СКВ}}} \int_0^l T_2 \pi D \eta \rho_2 v_2 dx, \\ v(l) &= \frac{Q_1 \rho_1 v_1 + S_{\text{пер}} \rho_2 v_2^2}{Q_1 \rho_1 + S_{\text{пер}} \rho_2 v_2}, \end{aligned} \right. \quad (4.15)$$

откуда можно выразить неизвестные температуру $T(l)$, плотность $\rho(l)$ и скорость $v(l)$:

$$\left\{ \begin{aligned} v(l) &= \frac{Q_1 \rho_1 v_1 + S_{\text{пер}} \rho_2 v_2^2}{Q_1 \rho_1 + S_{\text{пер}} \rho_2 v_2}, \\ \rho(l) &= \frac{1}{v(l)} \left(\frac{4\eta}{D} \int_0^l \rho_2 v_2 dx + \rho_1 v_1 \right), \\ T(l) &= \frac{1}{\rho(l) S_{\text{СКВ}} v(l)} \left(\int_0^l T_2 \pi D \eta \rho_2 v_2 dx + \rho_1 S_{\text{СКВ}} T_1 v_1 \right). \end{aligned} \right. \quad (4.16)$$

Ввиду того что, перфорации находятся на некотором расстоянии друг от друга, правильнее считать изменение параметров не один раз на всей длине перфораций, а от перфорации к перфорации, т.е. итерационным подходом. Считаем интеграл не от 0 до l , а от x_1 до x_2 – начала и конца промежутка,

рассматриваемого в рамках одной итераций. Значение параметров в конце промежутка являются граничными условиями для следующего. Количество итерации возьмем равным количеству перфораций плюс одна.

4.5 Пример расчета изменения температуры газа на интервале притока газа через боковую поверхность скважины

Рассмотрим модельную задачу для расчета изменения температуры газа в интервале притока. В данном случае проверим, как изменяется температура газа после смешивания, если параметры втекающего и протекающего газов одинаковы:

$$Q_1 = Q_2 = Q = 10000 \text{ м}^3/\text{сут} = 0.1157 \text{ м}^3/\text{с};$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho = 114.05 \text{ кг/м}^3;$$

$$T_1 = T_2 = T = 282.14 \text{ К}$$

Считаем, что плотность ρ_2 , температура T_2 и скорость v_2 величины постоянные. Остальные значения физических величин приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Параметры метана и скважины

Параметр	Обозначение	Значение
Длина участка с перфорациями, м	l	10
Количество перфораций	n	10
Диаметр перфораций, м	$D_{\text{пер}}$	0.012
Диаметр скважины, м	D	0.1
Скорость газа, протекающего в скважине, м/с	v_1	4.174

При данных параметрах значение параметра открытости трубы η , суммарной площади перфораций $S_{\text{пер}}$ и скорость газа через перфорации скважины v_2 равны:

$$\begin{aligned}\eta &= 0.00036; \\ S_{\text{пер}} &= 0.00113 \text{ м}^2; \\ v_2 &= 0.5 \text{ м/с}.\end{aligned}$$

Анализируя систему (4.16) с учетом принятых допущений и параметров, получим:

$$\left\{ \begin{aligned} v(l) &= \frac{\rho(Qv_1 + S_{\text{пер}}v_2^2)}{\rho(Q + S_{\text{пер}}v_2)} = \frac{Qv_1 + S_{\text{пер}}v_2^2}{Q + S_{\text{пер}}v_2} = 4.15 < v_1, \\ \rho(l) &= \frac{\rho}{v(l)} \left(\frac{4\eta}{D} v_2 l + v_1 \right), \\ T(l) &= \frac{\rho T}{\rho(l)v(l)S_{\text{СКВ}}} (\pi D \eta v_2 l + S_{\text{СКВ}} v_1) = \frac{\rho T}{\rho(l)v(l)} \left(\frac{4\eta}{D} v_2 l + v_1 \right). \end{aligned} \right. \quad (4.17)$$

При добавлении метана через перфорации скорость протекающего газа в скважине $v(l)$ уменьшается, потому что масса суммарного газа увеличивается, а скорости газов не сонаправлены. Это подтверждается первым уравнением системы (4.17). В результате увеличения массы суммарного газа на промежутке скважины с перфорациями, т.е. на неизменяемом объеме, плотность суммарного газа также увеличивается. Чтобы получить математическое подтверждение этому, сравним порядок слагаемых:

$$\left\{ \begin{aligned} 4\eta \frac{l}{D} v_2 &\sim 10^{-5} \\ v_1 &\sim 10^0 \end{aligned} \right. \rightarrow \left(\frac{4\eta}{D} v_2 l + v_1 \right) \approx v_1$$

Учитывая, что $v_1 > v(l)$, из второго уравнения получим:

$$\rho(l) \approx \rho \frac{v_1}{v(l)} \rightarrow \rho(l) > \rho; \quad \frac{\rho(l)}{\rho} \approx \frac{v_1}{v(l)}. \quad (4.18)$$

Из третьего уравнения и выражений (4.18) нельзя точно определить характер изменения температуры. Для этого сравним полученные отношения, подставив параметры, указанные выше:

$$\frac{\rho(l)}{\rho} > \frac{v_1}{v(l)}.$$

Из этого следует, что температура газа после смешивания увеличится. На рис. 4.4 изображено изменение температуры, рассчитанной программой, при параметрах из таблицы 4.2, что доказывает выводы, полученные ранее.

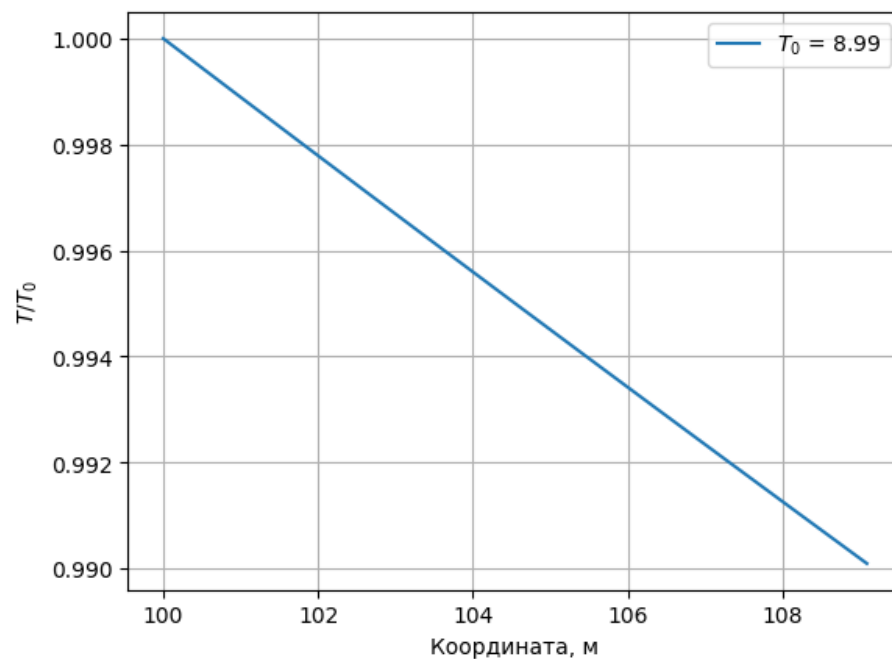


Рисунок 4.4 – Изменение температуры газа на интервале притока

В результате четвертой главы разработано две математические модели (точечный источник притока и распределенный интервал с перфорациями). Для каждой модели рассмотрена модельная задача. Результаты данной главы являются граничными условиями для расчета температуры и давления в стволе скважины.

ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СИСТЕМЕ ПЛАСТ-СКВАЖИНА

В данной главе рассмотрим пример задачи, которая объединяет все аналитические стационарные модели предыдущих глав:

1. Аналитическая модель для расчета температуры и давления в пласте.

Распределение полей давления и температуры описываются уравнениями энергии Чекалюка и пьезопроводности в осесимметричной форме соответственно, решения которых выглядят как:

$$p = P_{\text{пл}} + \frac{P_{\text{пл}} - \phi}{\ln\left(\frac{R_k}{r_c}\right)} \ln \frac{r}{R_k}, \quad (5.1)$$

$$T = T_0 - C_1 \varepsilon \left[\frac{\lambda_{\text{пл}}}{a C_\phi} \left(\left(\frac{R_k}{r_c} \right)^{\frac{a C_\phi}{\lambda_{\text{пл}}}} - \left(\frac{r}{r_c} \right)^{\frac{a C_\phi}{\lambda_{\text{пл}}}} \right) + \ln \frac{r}{R_k} \right], \quad (5.2)$$

где

$$a = -\frac{k P_{\text{пл}} - \phi}{\mu \ln\left(\frac{R_k}{r_c}\right)}; \quad C_1 = \frac{\phi - P_{\text{пл}}}{\ln\left(\frac{r_c}{R_k}\right)}.$$

2. Аналитическая модель для расчета температуры и давления в скважине.

Система уравнений для описания изменения температуры, давления и плотности выглядит как:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho v = \frac{4Q}{\pi D^2}; \\ \rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \rho \frac{\lambda |v| v}{2D}; \\ \rho c_v \frac{dT}{dz} = -T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4\alpha (T_{\text{внеш}} - T)}{D} + \rho \frac{\lambda |v| v^2}{2D}; \\ p(\rho, T) = \frac{hT\rho}{1 - \delta\rho} - \frac{c\rho^2}{(1 + \delta\rho)T^{0.5}} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

3. Аналитическая модель смешивания газа на интервале притока с несколькими перфорациями.

Замкнутая система уравнений, описывающая изменение температуры и плотности в интервале притока газа, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(l) = \frac{Q_1 \rho_1 v_1 + S_{\text{пер}} \rho_2 v_2^2}{Q_1 \rho_1 + S_{\text{пер}} \rho_2 v_2}, \\ \rho(l) = \frac{1}{v(l)} \left(\frac{4\eta}{D} \int_0^l \rho_2 v_2 dx + \rho_1 v_1 \right), \\ T(l) = \frac{1}{\rho(l) S_{\text{СКВ}} v(l)} \left(\int_0^l T_2 \pi D \eta \rho_2 v_2 dx + \rho_1 S_{\text{СКВ}} T_1 v_1 \right). \end{array} \right. \quad (5.4)$$

На рисунке 5.1 изображена модель задачи, а в таблице 5.1 представлены необходимые параметры для всех подзадач. В качестве граничных условий для подзадачи используются результаты предыдущего этапа.

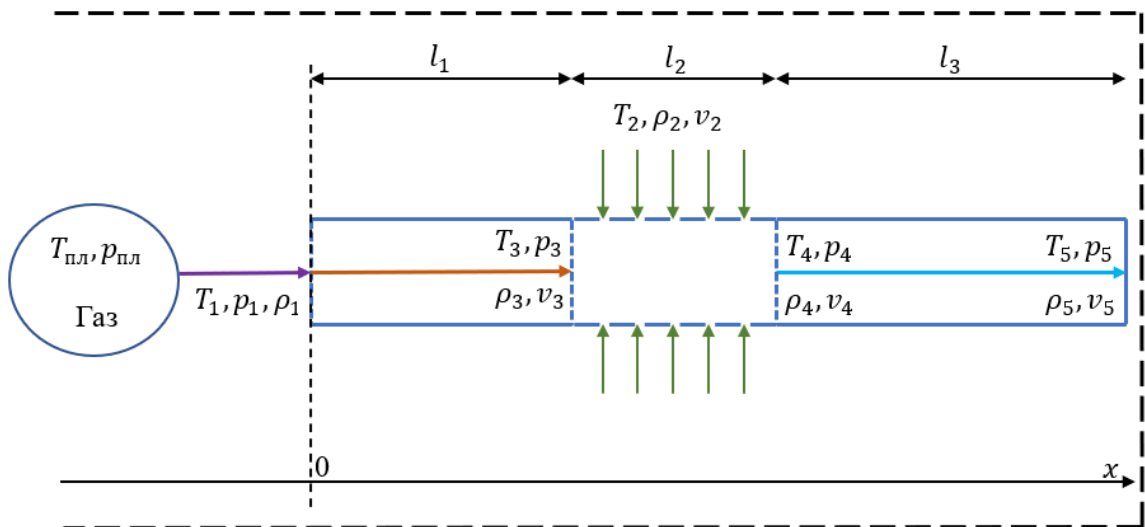


Рисунок 5.1 – Схематичное представление задачи

Таблица 5.1

Параметры задачи

Параметр	Обозначение	Значение
Проницаемость, 10^{-15} м^2	k	100
Вязкость, $10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$	μ	1.03
Теплопроводность пласта, $\text{Дж}/(\text{с}\cdot\text{м}\cdot\text{К})$	$\lambda_{\text{пл}}$	2.8
Коэффициент Джоуля-Томсона, $10^{-6} \text{ К}/\text{Па}$	ε	3
Объемная теплоемкость флюида, $\text{Дж}/(\text{м}^3\cdot\text{К})$	$C_{\text{ф}}$	1.6
Давление на стенке скважины, 10^6 Па	ϕ	13.6
Пластовая температура, К	T_0	283.15
Пластовое давление, 10^6 Па	$P_{\text{пл}}$	20
Радиус контура питания, м	R_k	100
Радиус скважины, м	r_c	0.05
Объемный расход газа, $\text{м}^3/\text{сут}$	Q	500000
Длина скважины до перфорации, м	l_1	380
Длина скважины после перфорации, м	l_3	600
Диаметр скважины, м	D	0.1
Коэффициент гидравлического сопротивления	λ	0.008756
Суммарный коэффициент теплопередачи, $\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$	α	15
Удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$	c_V	1654.14
Характерная температура	T_x	283.15
Характерная длина	l_x	1000
Характерное давление, 10^6 Па	p_x	15

Параметр	Обозначение	Значение
Критическое давление, 10^6 Па	p_c	4.5779
Критическая температура, К	T_c	190.56
Универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К)	R	8.31
Молярный объем, кг/моль	M	0.016
Длина участка с перфорациями, м	l_2	20
Количество перфораций	n	30
Диаметр перфораций, м	$D_{\text{пер}}$	0.0012
Плотность газа, втекающего через перфорации на боковой поверхности скважины, кг/м ³	ρ_2	80
Температура газа, втекающего через перфорации на боковой поверхности скважины, К	T_2	280.15
Объемный расход газа, втекающего через перфорации на боковой поверхности скважины, м ³ /сут	Q_2	10000

Параметры $h, \delta, c, v_x, \rho_x, v_2,$ безразмерные комплексы $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_8, m_9$ и функции $f_1, f_2, f_3, f_\rho, f_T, f_*$ высчитываются на основе параметров из таблицы 5.1 по соответствующим формулам.

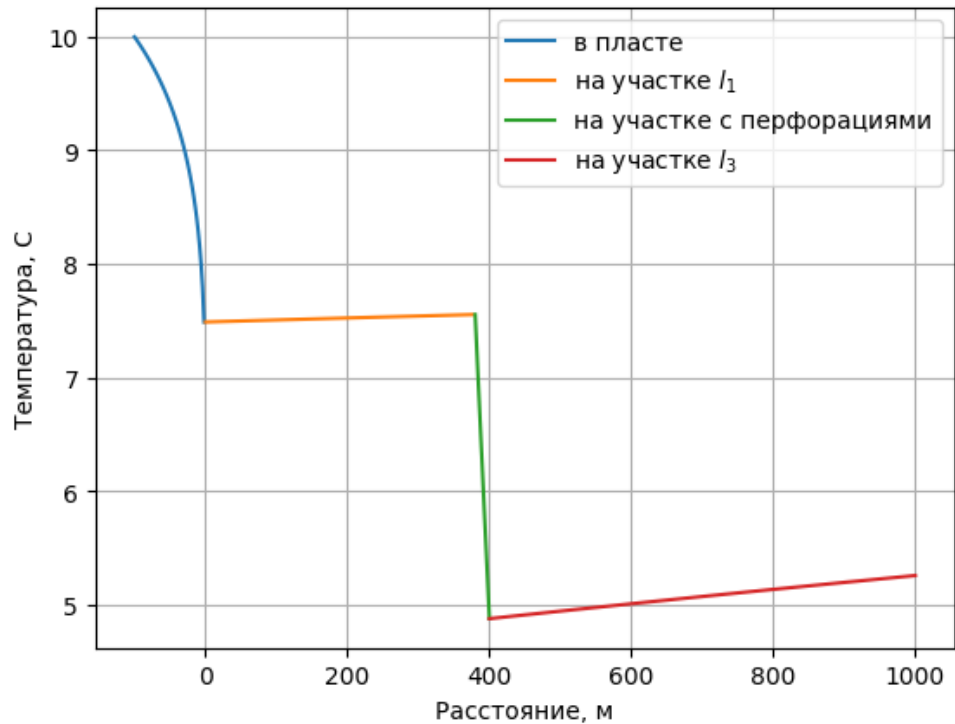


Рисунок 5.2 – Изменение температуры газа

На рис. 5.2 видно, что газ при течении в пласте остывает примерно на 2.5 градуса. На участке, когда газ течет в скважине, где нет перфораций, газ незначительно нагревается (рис. 5.3). Это объясняется тем, что температура

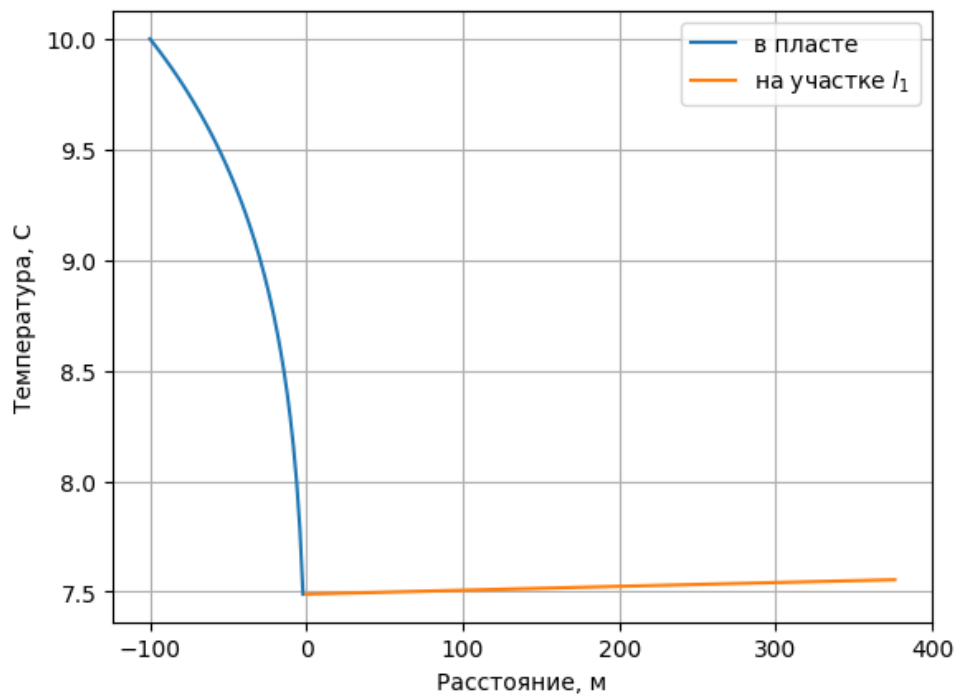


Рисунок 5.3 – Увеличенный график на интервале до перфораций

пласта вокруг скважины больше, чем температура газа в скважине, вследствие чего происходит нагрев. Далее на участке с перфорациями l_2 газ остывает. Это связано с тем, что через перфорации притекает газ с температурой меньше, чем температура протекающего газа в скважине. На следующем участке l_3 температура газа снова возрастает, т.к. температура пласта выше, чем температура газа в скважине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе реализуется программа на языке программирования Python для математического моделирования температурного поля в системе пласт-скважина. Исходная задача разбивается на три подзадачи: изменение температуры газа при его течении в пласте, изменение температуры газа при его течении в скважине без учета притоков и оттоков через боковые стенки, изменение температуры газа на интервале смешивания потоков газа. Для каждой из подзадач создана аналитическая модель на основе балансовых соотношений. Такое разбиение позволяет универсально подойти к решению задач подобного рода.

Во второй главе описывается аналитическая модель изменения термобарических условий в пласте. Для этого используется уравнение пьезопроводности и уравнение Чекалюка в осесимметричных формах. В результате температура газа уменьшается из-за проявления эффекта Джоуля-Томсона, а также проявления радиальной теплопроводности.

В третьей главе рассматривается аналитическая модель изменения давления и температуры в скважине на участке без перфораций. Для этого записываются балансовые соотношения (уравнение неразрывности, баланс импульса и баланс энергии). Для замыкания системы уравнений необходимо выбрать уравнение состояния, которое моделирует связь температуры, давления и плотности на интервале термодинамических условий исходной задачи. Было выбрано уравнение Редлиха-Квонга, т.к. оно наиболее точно описывает связь параметров в широком диапазоне изменения температуры и давления. В результате температура газа в скважине может как увеличиваться, так и уменьшаться, в зависимости от температуры пласта вокруг скважины, а также от значения коэффициента теплопередачи, гидравлического сопротивления и т.д.

В четвертой главе рассматривается учет притока газа через боковые стенки скважины. Это может быть как точечный источник, так и несколько

источников на некотором промежутке. В модели также используются балансовые соотношения для вычисления изменения температуры. В результате скорость газа на выходе из перфорированного участка уменьшается, а плотность увеличивается. Изменение температуры прямо пропорционально уменьшению скорости и обратно пропорционально увеличению плотности. Поэтому для оценки изменения температуры необходимо сравнить изменение плотности и скорости.

В пятой главе рассмотрена общая модельная задача, которая комбинирует соответствующие подзадачи, сопоставляя результаты одной как граничное условие следующей.

В качестве дальнейшего развития данной работы можно рассмотреть нестационарность моделей, модификацию модели на интервале притока газа и влияние гидроразрыва пласта на температуру и давление в скважине.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления. – М.: Недра. – 1970. – 215 с.
2. Бондарев Э. А., Красовицкий Б. А. Температурный режим нефтяных и газовых скважин. – Новосибирск.: Наука. – 1974. – 88 с.
3. Брусиловский А. И. Фазовые превращения при разработке нефти и газа. – М.: Грааль, 2002. – 575 с.
4. Васильев О. Ф., Бондарев Э.А., Воеводин А. Ф., Каниболотский М. А. Неизотермическое течение газа в трубах. – Новосибирск.: Наука, 1978. – 132 с.
5. Гинзбург И. П. Прикладная гидродинамика. – Л.: ЛГУ. – 1958. – 338 с.
6. Гуревич Г.Р., Ширковский А.И. Аналитические методы исследования парожидкостного состояния природных углеводородных газов // ОИ, сер.: Добыча. – М.: ВНИИОЭНГ. – 1975. – 135 с.
7. Гуревич Г. Р., Ширковский А. И. Справочное пособие по расчету фазового состояния и свойств газоконденсатных смесей. – М.: Недра, 1984. – 264 с.
8. Курбатов Г. И., Ермолаева Н. Н., Филиппов В. Б., Филиппов К. Б. Проектирование газопроводов в северных морях. – СПб.: Лань, 2020. – 345 с.
9. Курбатова Г. И., Попова Е. А., Филиппов Б. В., Филиппов В. Б., Филиппов К. Б. Модели морских газопроводов. — СПб: Изд-во С. - Петерб. ун-та, 2005. — 156 с.
10. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М: Наука, 1973. – 847 с.
11. Лурье М. В., Пятакова О. А. Особенности теплового расчета магистральных газопроводов с учетом инверсии эффекта Джоуля–Томпсона // Газовая промышленность. — 2010. — №2. — С. 16-19.

12. Рид. Р. Свойства газов и жидкостей /Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд; пер. с англ.; под ред. Б.И. Соколова. 3-е изд., перераб. и доп. — Л.: Химия, Ленингр. отд., 1982. — 592 с.
13. Страхович К. И. Прикладная газодинамика. — М.: ОНТИ, 1937. — 298 с.
14. Чарный И. А. Основы газовой динамики. — М.: Гостоптехиздат, 1961. — 200 с.
15. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. — М.: Недра, 1965. — 238 с.
16. Benedict, M. An Empirical Equation for Thermodynamic Properties of Light Hydrocarbons and Their Mixtures: I. Methane, Ethane, Propane, and n-Butane / M. Benedict, G. B. Webb, L. C. Rubin // Journal of Chemical Physics. — 1940. — V. 8, №4. — С. 334-345.
17. Peng D. Y., Robinson D.B. A New Two-Constant Equation of State //Ind. Eng. Chem. Fundamental.- 1976.- T-15.- № 1- С. 59-64
18. Redlich O., Kwong J.N.S. On the thermodynamics of solutions. 5. An equation of state fugacities of gaseous solutions. Chem. Review. — 1949 — T. 44 - №1 — P . 233-244.
19. Soave, G. Equilibrium constants from a modified Redlich–Kwong equation of state. // Chemical Engineering Science. 1972. — V. 27. — P. 1197–1203.