

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ,

д. ф.-м. н., чл.-корр. РАН

А. М. Кривцов

«___» _____ 2022 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

СМЕНА ТИПА АКУСТИЧЕСКОГО МЕТАМАТЕРИАЛА ПОД ВЛИЯНИЕМ КОМБИНАЦИИ РОТАЦИОННОЙ И ТРАНСЛЯЦИОННОЙ ВЯЗКОСТИ НА ПРИМЕРЕ ИЗОТРОПНОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕДУЦИРОВАННОЙ СРЕДЫ КОССЕРА

По направлению подготовки

01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

Направленность

01.04.03_03 Механика и цифровое производство

Выполнил

студент гр. 5040103/00301

<подпись>

С. С. Барсуков

Руководитель

к.ф.-м.н., доцент ВШТМиМФ

<подпись>

Е. Ф. Грекова

Санкт-Петербург

2022

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

« » _____ 20_ г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы

студенту Барсукову Севастьяну Сергеевичу, группы 5040103/00301

1. Тема работы: Смена типа акустического метаматериала под влиянием комбинации ротационной и трансляционной вязкости на примере изотропной линейной редуцированной среды Коссера

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 1 июня 2022

3. Исходные данные по работе: Научные статьи по теме работы, балансовые соотношения, определяющие уравнения и дисперсионные соотношения для линейной изотропной вязкоупругой редуцированной среды Коссера

4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): _____

Проверка гипотезы отсутствия запрещенной зоны для бегущих плоских гармонических волн в линейной изотропной вязкоупругой редуцированной среде Коссера

Получение обезразмеренных дисперсионных соотношений для вещественной, мнимой частей волнового числа, а также логарифмического декремента

Получение асимптотических решений для вещественной, мнимой частей волнового числа, а также логарифмического декремента

Получение значений в критических точках

5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): _____

6. Консультанты по работе: _____

7. Дата выдачи задания 13 мая 2022

Руководители ВКР _____ Е. Ф. Грекова
(подпись) инициалы, фамилия

_____ инициалы, фамилия
(подпись)

Задание принял к исполнению 13 мая 2022
(дата)

Студент _____ С. С. Барсуков
(подпись) инициалы, фамилия

РЕФЕРАТ

50 с., 23 рисунка

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ВЯЗКОУПРУГАЯ РЕДУЦИРОВАННАЯ СРЕДА КОССЕРА, ТРАНСЛЯЦИОННАЯ ВЯЗКОСТЬ, РОТАЦИОННАЯ ВЯЗКОСТЬ, ЗАПРЕЩЕННАЯ ЗОНА.

Тема выпускной квалификационной работы: «Смена типа акустического метаматериала под влиянием комбинации ротационной и трансляционной вязкости на примере изотропной линейной редуцированной среды Коссера».

Данная работа посвящена исследованию поведения дисперсионных соотношений редуцированной среды Коссера при введении комбинации трансляционной и ротационной вязкости.

Задачи, которые решались в ходе исследования:

- Проверка гипотезы отсутствия запрещенной зоны для бегущих плоских гармонических волн в линейной изотропной вязкоупругой редуцированной среде Коссера
- Получение обезразмеренных дисперсионных соотношений, асимптотических решений, значений в критических точках для вещественной, мнимой частей волнового числа, а также логарифмического декремента
- Получение экстремумов вещественной части и волнового числа и логарифмического декремента.

Было получено аналитически дисперсионное соотношение для вещественной части волнового числа, которое показывает, что бегущие гармонические решения есть при любой частоте при введении в среду трансляционной и (или) ротационной вязкости.

Были сделаны следующие выводы: экстремум вещественной части волнового числа и логарифмического декремента при малой вязкости лежит в пределах бывшей запрещенной зоны, внутри бывшей полосы непропускания при увеличении малой диссипации волна становится короче, ее затухание зависит от частоты, диссипации и упругих параметров, вне запрещенной зоны увеличение диссипации увеличивает затухание волны.

ABSTRACT

50 pages, 23 figures

KEYWORDS: VISCOELASTIC REDUCED COSSERA MEDIUM, TRANSLATIONAL VISCOSITY, ROTATIONAL VISCOSITY, BAND GAP.

The theme of the graduate qualification work: "Change of the type of acoustic metamaterial under the influence of a combination of rotational and translational viscosity on the example of an isotropic linear reduced Cosserat medium."

This work is devoted to the study of the behavior of the dispersion relations of the reduced Cosserat medium with the introduction of a combination of translational and rotational viscosities.

Tasks that were solved in the course of the study:

- Verification of the hypothesis of the absence of a band gap for running plane harmonic waves in a linear isotropic viscoelastic reduced Cosserat medium
- Obtaining non-dimensional dispersion relations, asymptotic solutions, values at critical points for the real, imaginary parts of the wave number, as well as the logarithmic decrement
- Obtaining extremums of the real part and wavenumber and logarithmic decrement

An analytical dispersion relation was obtained for the real part of the wave number, which shows that there are running harmonic solutions at any frequency when translational and (or) rotational viscosity is introduced into the medium.

The following conclusions were made: the extremum of the real part of the wave number and the logarithmic decrement at low viscosity lies within the former band gap; inside the former band of non-transmission, as small dissipation increases, the wave becomes shorter; its attenuation depends on the frequency, dissipation, and elastic parameters; outside the band gap, an increase dissipation increases the attenuation of the wave.

Содержание

Введение	6
Глава 1. Динамические уравнения и дисперсионные соотношения для линейной изотропной упругой и вязкоупругой редуцированной среды Коссера	9
Глава 2. Анализ дисперсионного соотношения	15
2.1 Асимптотика вещественной части волнового числа при малых значениях трансляционной и ротационной вязкости	24
2.1.1 Асимптотика $\operatorname{Re} k$ в бывшей запрещенной зоне при малой диссипации	25
2.1.2 Асимптотика $\operatorname{Re} k$ вне бывшей запрещенной зоны при малой диссипации	28
2.1.3 Обсуждение характера зависимости $\operatorname{Re} k$ от малой диссипации	29
2.2 Асимптотика мнимой части волнового числа при малых значениях трансляционной и ротационной вязкости	31
2.2.1 Асимптотика $\operatorname{Im} k$ вне бывшей запрещенной зоны при малой диссипации	33
2.2.2 Асимптотика $\operatorname{Im} k$ в бывшей запрещенной зоне при малой диссипации	34

2.2.3	Обсуждение характера зависимости $\text{Im } k$ от малой диссипации	34
2.3	Асимптотика логарифмического декремента волнового числа при малых значениях трансляционной и ротационной вязкости . . .	37
2.3.1	Асимптотика логарифмического декремента вне бывшей запрещенной зоны при малой диссипации	38
2.3.2	Асимптотика логарифмического декремента в бывшей запрещенной зоне при малой диссипации	38
2.3.3	Обсуждение характера поведения логарифмического декремента	42
2.4	Поведение среды на характерных частотах	42
	Заключение	47
	Список использованной литературы	50

Введение

В классической сплошной среде для описания континуума используются материальные точки, которые имеют лишь трансляционные степени свободы. Однако более точное описание поведения среды, в которой микроструктура влияет на динамические процессы, получается при моделировании частицы как тела-точки. Тела-точки помимо трансляционных степеней свободы имеют также и вращательные. Среда Коссера — это частный случай среды со сложной структурой. Её тело-точка — инфинитезимальное (бесконечно малое) твердое тело.

Многие работы посвящены механике сред Коссера. Впервые упругую трехмерную среду с ротационной динамикой частиц ввели братья Коссера [2]. В работе [1] был предложен способ получения определяющих уравнений двумерной упругой полярной среды, который можно применить и в трехмерном случае. Среди книг по упругим средам Коссера можно отметить [3], [5], [7]. Волны в одномерном нелинейном континууме Коссера исследованы в работе [21] и т.д.

Акустические метаматериалы, в частности, редуцированная среда Коссера — это материалы, имеющие запрещенные зоны частот, в пределах которых распространение некоторой гармонической волны запрещено, причем этот эффект не связан с диссипацией, или падающие участки дисперсионных кривых — зоны аномального преломления. Иногда говорят, что в данном диапазоне частот материал имеет отрицательные эффективные модули упругости и(или) плотность. С помощью таких материалов можно контролировать распространение волны на определенных частотах, запретить прохождение волны на одних частотах и разрешить на других. Акустические метаматериалы широко изучались

в течение последних 15 лет в связи с их способностью демонстрировать отрицательные эффективные свойства [17], [25], [26].

Впервые линейная изотропная упругая редуцированная среда Коссера рассматривалась в работе [22] как модель сыпучей среды. Редуцированная среда Коссера представляет собой континуум, тела-точки которого обладают вращательными степенями свободы, но напряжения при этом не работают на градиенте микровращений. Эта теория может быть полезна для моделирования горных пород и грунтов, содержащих неоднородности, сыпучей среды [4], некоторых композитов с включениями, а также сейсмических метаматериалов. Подробное исследование редуцированной среды Коссера проводилось в работе [11]. Она является единожды отрицательным акустическим метаматериалом, то есть имеет запрещенную зону для бегущих гармонических решений. Запрещенная зона — это участок на дисперсионной кривой, на частотах которого гармоническое решение убывает. В рассмотренной упругой среде в запрещенной зоне решение для волны сдвига–вращения являлось стоячим, экспоненциально убывающим. Продольная волна в редуцированной среде Коссера — такая же, как и в классической сплошной среде.

В классической однородной линейной безграничной упругой среде все гармонические волны являются бегущими синусоидальными решениями, то есть волновые векторы и частоты являются действительными. Наличие микроструктуры может изменить эту ситуацию даже в чисто упругом случае.

Существуют различные упругие акустические метаматериалы. Однако некоторые материалы, такие как эпоксидная смола и каучук, которые широко используются в качестве компонентов акустического метаматериала [13], [17], [14], обычно демонстрируют диссипативное вязкоупругое поведение [8]. В этом случае либо волновой вектор, либо частота имеют действительную и мнимую части, что представляет соответственно пространственное или временное зату-

хание бегущей волны [13], [15]. Таким образом, все волны становятся бегущими, хотя по-прежнему затухают в запрещенной зоне, и необходимо проводить анализ дисперсионных кривых волн сдвига-вращения. Как будет показано, рассматриваемый нами континуум — линейная вязкоупругая редуцированная среда Коссера — ведет себя как дважды отрицательный акустический метаматериал для волн сдвига–вращения, то есть наблюдается убывающий участок дисперсионной кривой для определенной полосы частот. Заметим также, что затухание в таком континууме не обязательно увеличивается с частотой, как это происходит в классической вязкоупругой среде. Оно может иметь один максимум на определенной частоте или иметь максимум и минимум.

В данной работе рассматривается влияние вязкости в линейной изотропной редуцированной среде Коссера на распространение поперечных волн и доказывается, что при введении в линейную упругую изотропную редуцированную среду Коссера вязкости происходит смена типа акустического материала.

Глава 1

Динамические уравнения и дисперсионные соотношения для линейной изотропной упругой и вязкоупругой редуцированной среды Коссера

В данной главе приведены динамические уравнения и дисперсионное соотношение для линейной изотропной вязкоупругой редуцированной среды Коссера, полученные в предыдущих работах [6], [10], проведено его обезразмеривание, а также проанализировано дисперсионное соотношение для упругого случая.

Редуцированная среда Коссера — это среда, где частицы имеют независимые вращательные и поступательные степени свободы, но среда не реагирует на градиент микровращения, то есть тензор моментных напряжений равен нулю. Эта модель имеет приложения, поскольку в гранулированных материалах повороты частиц играют важную роль во многих процессах, в частности, при реструктуризации среды и возникновении неустойчивости [9], [18], [19], [22], [23], [24]. В таком материале не наблюдается взаимодействие, уменьшающее градиент вращения частиц, отсутствует упорядоченная структура поворотов. Действительно, соседние частицы часто имеют тенденцию вращаться в противоположных направлениях, а не уменьшать свое относительное вращение. Однако существует среднее сопротивление вращению тела-точки относительно всей среды. В таком случае можно рассмотреть модель, в которой напряжения зависят от градиента поступательного перемещения ∇u и тензора вра-

щения P , но не зависят от градиента микровращений ∇P , как на рис. 1.1. Для редуцированной среды Коссера вместо энергии деформации $U(\nabla \mathbf{u}, P, \nabla P)$ имеем функцию $U(\nabla \mathbf{u}, P)$. Редуцированная среда Коссера – частный случай среды Коссера с отсутствием некоторых упругих связей.

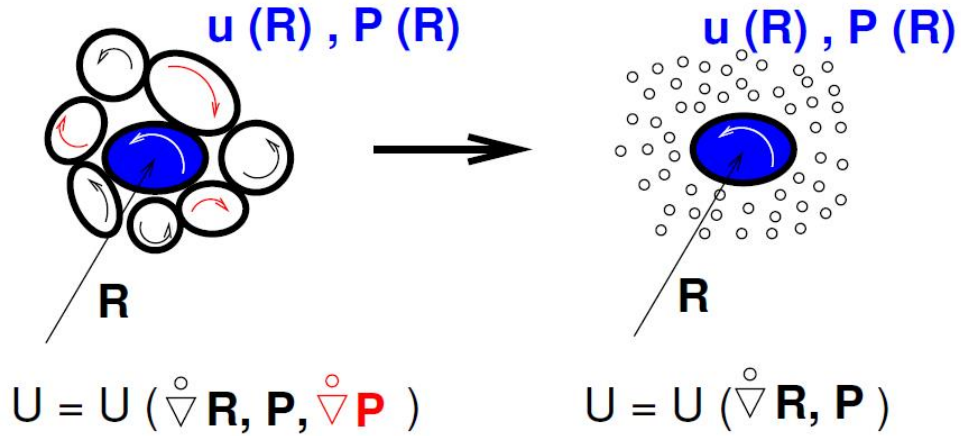


Рис. 1.1. Редуцированная среда Коссера [10]

Пусть τ – тензор напряжений Коши, $\mu \equiv 0$ – тензор моментных напряжений, тождественно равный нулю в случае редуцированной среды Коссера, \mathbf{u} – вектор трансляционных перемещений тел-точек, $\boldsymbol{\theta}$ – инфинитезимальный вектор микровращений, $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ – угловая скорость для бесконечно малых вращений, P – тензор поворота. Каждая тело-точка имеет инерционные характеристики: ρ – плотность и ρI – плотность тензора инерции. Рассматриваем случай, когда плотность тензора инерции имеет только шаровую часть $I E$. Поскольку теория линейная, то $\mathbf{u} = o(1)$ и тензор поворота $P = E + \boldsymbol{\theta} \times E$, где E – единичный тензор. Производная величины x по времени будет обозначаться как $(x)'$.

Баланс сил при отсутствии внешних нагрузок имеет вид [6]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (1.1)$$

Баланс моментов [6]:

$$\boldsymbol{\tau}_\times = I\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (1.2)$$

Определяющее уравнение [6]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} = & \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{E} + 2\mu(\nabla \mathbf{u})^S + 2\alpha(\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})^A \\ & + \lambda\kappa \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} \mathbf{E} + \mu\nu(\nabla \dot{\mathbf{u}}^s) + \alpha\beta(\nabla \mathbf{u}^A + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E})'. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Диссипация в среде описывается коэффициентами κ, ν, β . Коэффициенты λ и μ – коэффициенты Ламе. Коэффициент α – упругая константа, противодействующая повороту тела-точки относительно своей окрестности.

Уравнения в перемещениях принимают вид [6]:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2\alpha\nabla \times (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \\ & + (\lambda\kappa + 2\mu\nu)\nabla\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mu\nu\nabla \times (\nabla \times \dot{\mathbf{u}}) + 2\alpha\beta\nabla \times (\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2)' = \rho\ddot{\mathbf{u}}, \quad (1.4) \\ & -4\alpha(\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) - 4\alpha\beta(\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2)' = I\ddot{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned}$$

Для описания динамического поведения редуцированной среды Коссера необходимо построить дисперсионное уравнение, связывающее волновой вектор \mathbf{k} волны с ее частотой ω . Получим дисперсионное соотношение $\omega(k)$ для сдвиговых волн в безграничной вязко-упругой линейной редуцированной среде Коссера. Ищем решение в виде плоских волн:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (1.6)$$

Получаем дисперсионное соотношение [6]:

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu(1+i\nu\omega) + \alpha(1+i\beta\omega)} \frac{\omega^2 - 4\alpha(1+i\beta\omega)/I}{\omega^2 - \frac{4\mu(1+i\nu\omega)\alpha(1+i\beta\omega)}{(\mu(1+i\nu\omega) + \alpha(1+i\beta\omega))I}}. \quad (1.7)$$

Логарифмический декремент колебаний — это величина, которая показывает, насколько быстро волна затухает на расстоянии, равном длине волны. Он пропорционален отношению мнимой части к вещественной [16]:

$$Q^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi \frac{|\text{Im } k|}{|\text{Re } k|}. \quad (1.8)$$

Можно произвести следующие обезразмеривания:

$$\omega_0^2 = \frac{4\alpha}{I}, \quad (1.9)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (1.10)$$

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad (1.11)$$

$$c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (1.12)$$

$$c_{s\alpha}^2 = \frac{\mu + \alpha}{\rho}, \quad (1.13)$$

$$n = \omega_0\nu, \quad (1.14)$$

$$b = \omega_0\beta, \quad (1.15)$$

$$\omega_1^2 = \frac{c_s^2}{c_{s\alpha}^2} \omega_0^2, \quad (1.16)$$

$$c = \frac{c_{s\alpha}}{c_s} = \frac{\omega_0}{\omega_1} = \Omega_1^{-1}, \quad (1.17)$$

где $\omega_0^2 = \frac{4\alpha}{I}$ — квадрат частоты отсечки, $\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{\mu}{\mu+\alpha}$ — квадрат граничной частоты, c_s — предел фазовой скорости волны на низких частотах. $c_{s\alpha}$ — предел фазовой скорости волны на высоких частотах, Ω — безразмерная частота,

Ω_1 — безразмерная граничная частота, n — обезразмеренная трансляционная вязкость, b — обезразмеренная ротационная вязкость.

Получаем обезразмеренное дисперсионное соотношение:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} k^2 = \Omega^2 \frac{((c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2\Omega^2(1 + \Omega^2 - c^2\Omega^2))}{(c^2\Omega^2 - 1 + \Omega^2nb)^2 + (\Omega^3(n + bc^2 - b) - \Omega(n + b))^2} + i\Omega^3 \frac{(-n(\Omega^2 - 1)^2 + b\Omega^4(1 - c^2) - b^2n\Omega^2)}{(c^2\Omega^2 - 1 + \Omega^2nb)^2 + (\Omega^3(n + bc^2 - b) - \Omega(n + b))^2}. \quad (1.18)$$

Дисперсионное соотношение для упругого случая получается из (1.18) при коэффициентах $n = b = 0$, которые отвечают за диссипацию:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} k^2 = \Omega^2 \frac{\Omega^2 - 1}{c^2\Omega^2 - 1}. \quad (1.19)$$

Данное соотношение было получено в [11].

Построим дисперсионную зависимость при отношении упругих параметров $\frac{\alpha}{\mu} = 0.5$.

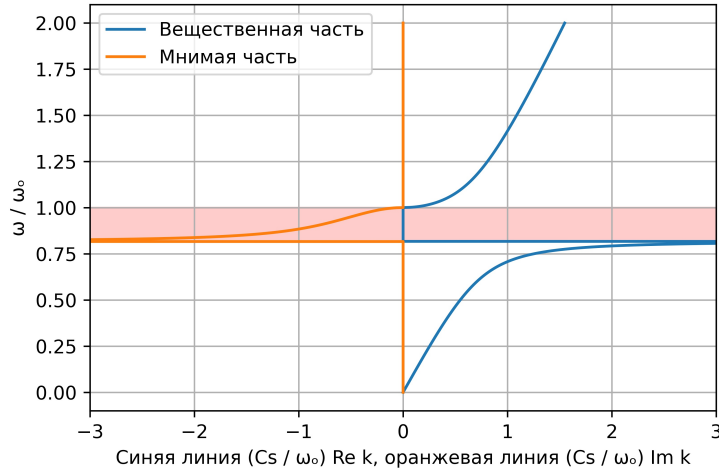


Рис. 1.2. Дисперсионные кривые для упругой редуцированной среды Коссера при $\frac{\alpha}{\mu} = 0.5$. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

На дисперсионной зависимости для упругой редуцированной среды Коссера, изображенной на рис. 1.2, есть запрещенная зона в границах частоты отсеч-

ки $\Omega = 1$ и граничной частоты Ω_1 . Волны с частотой, попадающей в границы полосы непропускания, представляют собой стоячие экспоненциально убывающие решения.

В вязкоупругой среде амплитуда свободных волн экспоненциально убывает для всех частот. Однако в эксперименте можно измерить скорости волн даже с таким убыванием, если волны представляют собой бегущие решения, а датчик находится на достаточно близком расстоянии от источника. Термин “запрещенная зона” в литературе употребляется в различных значениях. Мы в данной работе будем называть запрещенной зоной область частот, в которой не существует бегущих свободных гармонических волн, в том числе убывающих экспоненциально.

В следующей главе будет произведен анализ полученного безразмерного дисперсионного соотношения для изотропной редуцированной среды Коссе-ра (1.18) с учётом вязкости.

Глава 2

Анализ дисперсионного соотношения

В данной главе получены дисперсионные соотношения в редуцированной вязкоупругой среде Коссера для вещественной и мнимой частей волнового числа, а также для логарифмического декремента. Показано наличие гармонической бегущей волны с убывающей амплитудой в бывшей полосе непропускания бегущих решений. Получены асимптотические решения вдали от критических точек внутри и вне бывшей запрещенной зоны, а также вычислены точные значения в критических точках для вещественной, мнимой части волнового числа и логарифмического декремента. Найдены экстремумы вещественной части волнового числа и логарифмического декремента. Произведено сравнение со статьями [12] и [20], в которых были получены дисперсионные соотношения, значения экстремумов и асимптотики отдельно для трансляционной и ротационной вязкостей соответственно.

Выведем выражения для вещественной и мнимой частей волнового числа. Обозначим вещественную часть в выражении (1.18) за A , а мнимую — за B . Квадрат волнового числа k^2 выражается следующим образом:

$$k^2 = (\operatorname{Re} k)^2 + 2i \operatorname{Re} k \operatorname{Im} k - (\operatorname{Im} k)^2. \quad (2.1)$$

Тогда получаем выражение для B :

$$B = \frac{c_s^2}{\omega_0^2} 2 \operatorname{Re} k \operatorname{Im} k. \quad (2.2)$$

Мнимая часть волнового числа получается из (2.2):

$$\text{Im } k = \frac{\omega_0^2}{2c_s^2 \text{Re } k} B. \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1), получаем биквадратное уравнение:

$$\frac{c_s^4}{\omega_0^4} (\text{Re } k)^4 - \frac{c_s^2}{\omega_0^2} A (\text{Re } k)^2 - \frac{1}{4} B^2 = 0. \quad (2.4)$$

Отсюда для вещественной части волнового числа имеем:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\text{Re } k)^2 = \frac{A}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{B}{A} \right)^2} \right). \quad (2.5)$$

Подставляя значения A и B , получаем, что вещественная часть волнового числа подчиняется соотношению:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\text{Re } k)^2 = \frac{1}{2} \Omega^2 \frac{(c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2 \Omega^2 (1 + \Omega^2 - c^2 \Omega^2)}{(c^2 \Omega^2 - 1 + \Omega^2 n b)^2 + (\Omega^3 (n + b c^2 - b) - \Omega (n + b))^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \Omega^2 \left(\frac{(-n(\Omega^2 - 1)^2 + b \Omega^4 (1 - c^2) - b^2 n \Omega^2)}{(c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2 \Omega^2 (1 + \Omega^2 - c^2 \Omega^2)} \right)^2} \right). \quad (2.6)$$

Получаем, что бегущая гармоническая волна распространяется при любом значении частоты (т.е. запрещенная зона для бегущих решений исчезает), поскольку при отрицательном значении A можно взять корень с “минусом”, а при положительном — с “плюсом”, и на любой частоте будет существовать $\text{Re } k$. Заметим, что значение $\text{Im } k$, определяемое формулами (2.3), (1.18), вообще говоря, будет ненулевым, то есть волна будет затухающей.

Численные решения для различных значений трансляционной и ротационной вязкости при отношении упругих параметров $\frac{\alpha}{\mu} = 0.5$ представлены на

рис. 2.1 и рис. 2.2. Видно, что при увеличении параметров диссипации дисперсионная кривая становится более пологой, а зона аномального преломления исчезает. Также видно, что в области частот бывшей полосы непропускания зона аномального преломления увеличивается при увеличении диссипации, а потом исчезает.

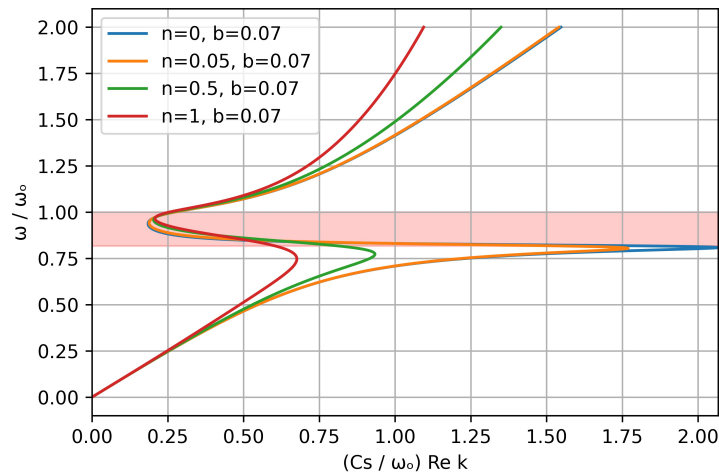


Рис. 2.1. Зависимость безразмерной частоты от безразмерной вещественной части волнового числа при различных значениях трансляционной вязкости и одинаковой ротационной. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

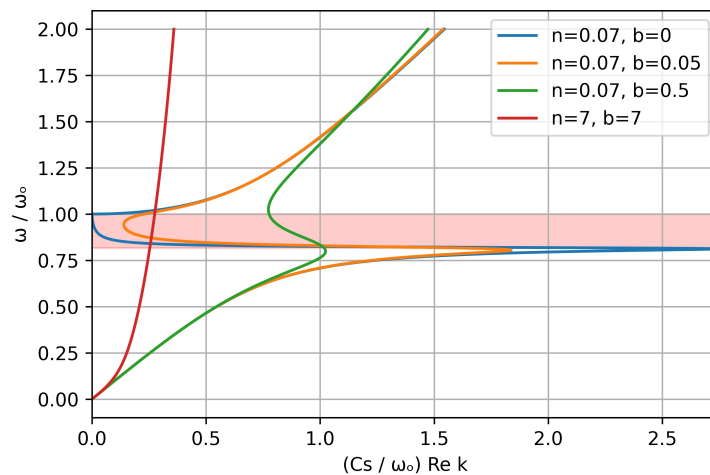


Рис. 2.2. Зависимость безразмерной частоты от безразмерной вещественной части волнового числа при различных значениях ротационной вязкости и одинаковой трансляционной. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

Для того, чтобы получить мнимую часть, подставим выражение для вещественной части волнового числа (2.6) в (2.3):

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2}(\text{Im } k)^2 = \frac{1}{2}\Omega^4 \frac{(n(\Omega^2 - 1)^2 - b\Omega^4(1 - c^2) + b^2n\Omega^2)^2}{(c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2\Omega^2(1 + \Omega^2 - c^2\Omega^2)} \cdot \frac{1}{(c^2\Omega^2 - 1 + \Omega^2nb)^2 + (\Omega^3(n + bc^2 - b) - \Omega(n + b))^2} \cdot \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 + \Omega^2 \left(\frac{(-n(\Omega^2 - 1)^2 + b\Omega^4(1 - c^2) - b^2n\Omega^2)}{((c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2\Omega^2(1 + \Omega^2 - c^2\Omega^2))} \right)^2}}. \quad (2.7)$$

Упрощая выражение выше, получаем:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2}(\text{Im } k)^2 = \frac{1}{2}\Omega^2 \frac{(c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2\Omega^2(1 + \Omega^2 - c^2\Omega^2)}{(c^2\Omega^2 - 1 + \Omega^2nb)^2 + (\Omega^3(n + bc^2 - b) - \Omega(n + b))^2} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{1 + \Omega^2 \left(\frac{(-n(\Omega^2 - 1)^2 + b\Omega^4(1 - c^2) - b^2n\Omega^2)}{(c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2\Omega^2(1 + \Omega^2 - c^2\Omega^2)} \right)^2} \right). \quad (2.8)$$

Для разных значений ротационной и трансляционной вязкости при $\alpha/\mu = 0.5$ получаем зависимости обезразмеренной частоты от обезразмеренной мнимой части волнового числа, которые показаны на рис. 2.3 и рис. 2.4.

Применяя определение логарифмического декремента (1.8), получим:

$$\left(\frac{1}{2\pi Q} \right)^2 = \left(\frac{\text{Im } k}{\text{Re } k} \right)^2 = \frac{((c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2\Omega^2(1 + \Omega^2 - c^2\Omega^2))^2}{(-n\Omega(\Omega^2 - 1)^2 + b\Omega^5(1 - c^2) - b^2n\Omega^3)^2} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{1 + \Omega^2 \left(\frac{(-n(\Omega^2 - 1)^2 + b\Omega^4(1 - c^2) - b^2n\Omega^2)}{(c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2\Omega^2(1 + \Omega^2 - c^2\Omega^2)} \right)^2} \right)^2. \quad (2.9)$$

На рис. 2.5 и рис. 2.6 для различных значений ротационной и трансляционной вязкости представлены численные решения дисперсионного соотношения для логарифмического декремента.

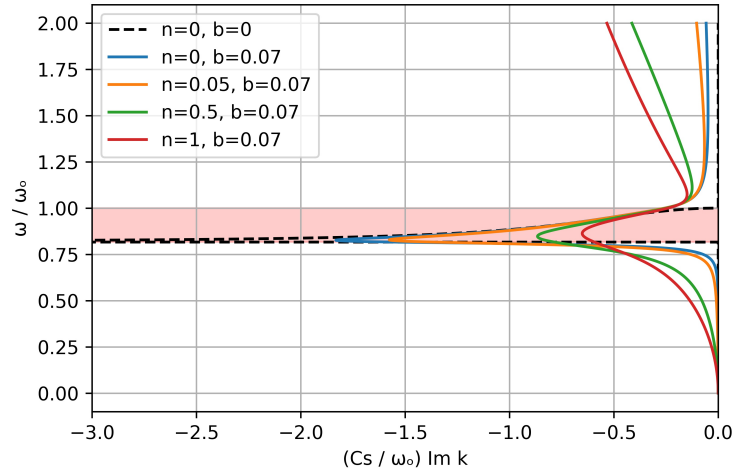


Рис. 2.3. Зависимость безразмерной частоты от безразмерной мнимой части волнового числа при различных значениях трансляционной вязкости и одинаковой ротационной. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

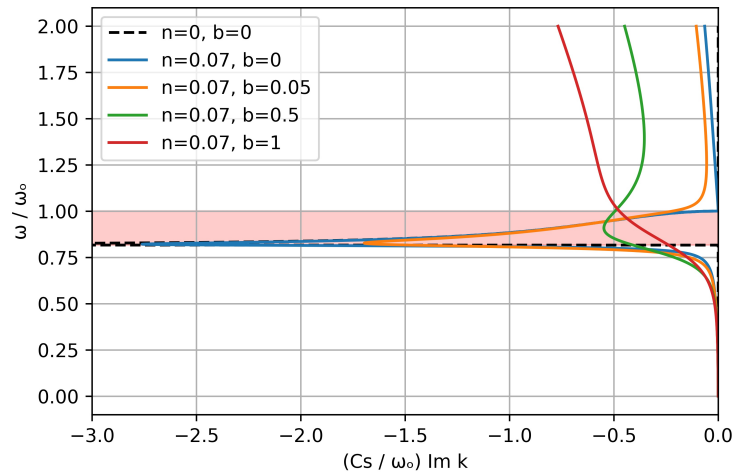


Рис. 2.4. Зависимость безразмерной частоты от безразмерной мнимой части волнового числа при различных значениях ротационной вязкости и одинаковой трансляционной. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

Интересно получить значение частоты, при которой меняется вид решения вещественной и мнимой части волнового числа. Для этого необходимо найти корни биквадратного уравнения:

$$(c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2\Omega^2(1 + \Omega^2 - c^2\Omega^2) = 0. \quad (2.10)$$

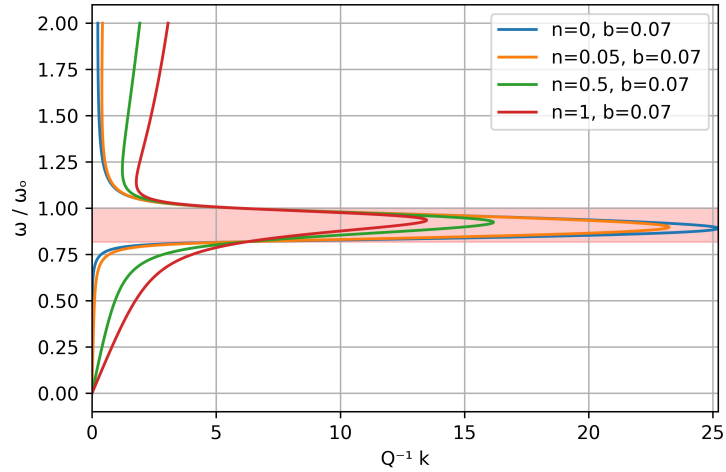


Рис. 2.5. Зависимость безразмерной частоты от логарифмического декремента при различных значениях трансляционной вязкости и одинаковой ротационной. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

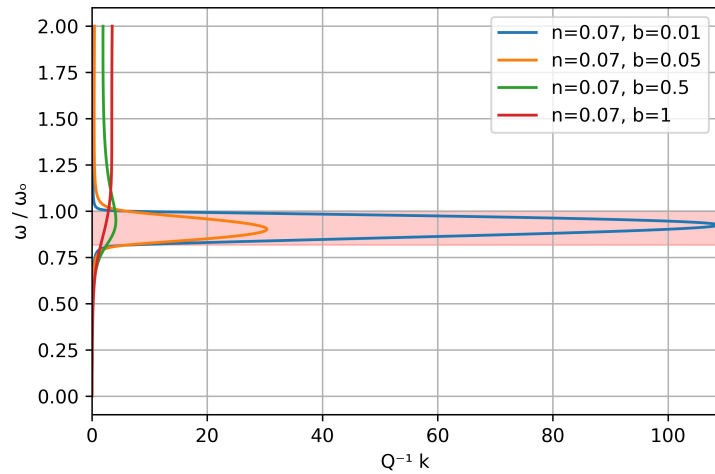


Рис. 2.6. Зависимость безразмерной частоты от логарифмического декремента при различных значениях ротационной вязкости и одинаковой трансляционной. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

Для удобства можно ввести следующие замены:

$$B_1 = b^2(1 - \Omega_1^2), \quad (2.11)$$

$$\Omega_i^2 = \frac{\Omega_1^2}{1 - \Omega_1^2}. \quad (2.12)$$

Тогда биквадратное уравнение приводится к виду:

$$\Omega^4(1 - B_1) - \Omega^2(1 + \Omega_1^2 - B_1\Omega_i^2) + \Omega_1^2 = 0. \quad (2.13)$$

Тогда корни уравнения (2.13):

$$\Omega^2 = \frac{(1 + \Omega_1^2 - B_1\Omega_i^2)}{2(1 - B_1)} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\Omega_1^2(1 - B_1)}{(1 + \Omega_1^2 - B_1\Omega_i^2)^2}} \right). \quad (2.14)$$

Кроме того, можно узнать, при каком соотношении b и Ω_1 смены знака корня не происходит. Для этого требуется узнать, когда под корнем в уравнении (2.14) стоит отрицательное число:

$$(1 + \Omega_1^2 - B_1\Omega_i^2)^2 - 4\Omega_1^2(1 - B_1) < 0. \quad (2.15)$$

Или, возвращаясь к ротационной вязкости b :

$$\Omega_1^4 b^4 + (-6\Omega_1^4 + 2\Omega_1^2)b^2 + (1 - \Omega_1^2)^2 < 0. \quad (2.16)$$

Найдём корни неравенства (2.16) относительно b^2 :

$$b^2 = \frac{3\Omega_1^2 - 1 \pm 2\Omega_1 \sqrt{2\Omega_1^2 - 1}}{\Omega_1^2}. \quad (2.17)$$

Таким образом, учитывая, что $\Omega_1 \leq 1$, зависимость b от Ω_1 , при которой смена знака корня не происходит, представлена на рис. 2.7.

Таким образом, мы видим, что для малой вязкости b , если ширина запрещенной зоны конечна, смена знака корня происходит всегда.

Было бы интересно посмотреть на дисперсионные кривые, если взять упругие коэффициенты Ламе нулями $\lambda = \mu = 0$, равно как и соответствующие

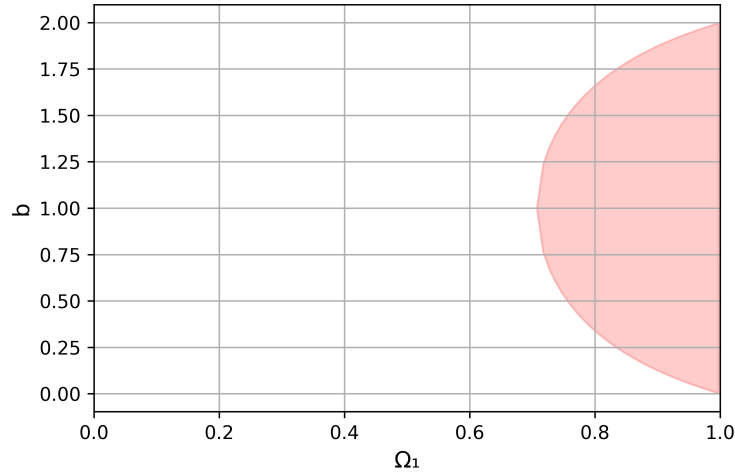


Рис. 2.7. Зависимость b от Ω_1 , при которой смена знака корня не происходит

растяжению–сжатию и трансляционному сдвигу вязкости κ, ν . Таким образом, рассматриваемая среда будет сопротивляться лишь повороту тела-точки относительно окрестности.

Обезразмеренное дисперсионное уравнение для волны сдвига-вращения записанное в (1.18) не подходит, поскольку $c_s = 0$. Введём новый обезразмеривающий параметр:

$$c_\alpha^2 = \frac{\alpha}{\rho}. \quad (2.18)$$

Тогда дисперсионное соотношение принимает вид:

$$\frac{c_\alpha^2}{\omega_0^2} k^2 = \frac{\Omega^2 - 1 - b^2 \Omega^2 - ib \Omega^3}{1 + b^2 \Omega^2}. \quad (2.19)$$

Таким образом, получается, что для случая $\mu = 0$ в упругом случае запрещенная зона расположена в границах 0 и 1. Это показано на рис. 2.8.

При введении ротационной вязкости запрещенная зона исчезает. Это доказывается аналогично доказательству для уравнения (2.6). В вязкоупругом случае при $b = 0.05$ мы получаем дисперсионную зависимость, показанную на рис. 2.9.

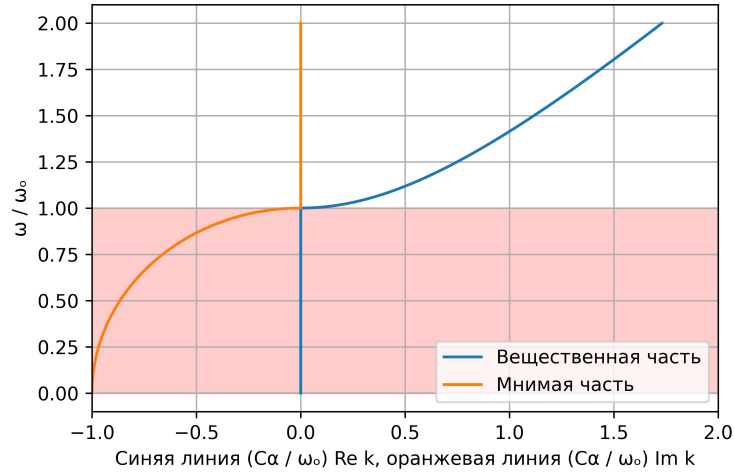


Рис. 2.8. Дисперсионные кривые для упругой редуцированной среды Коссера при $\mu = 0$. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega = 0$ и $\Omega = 1$

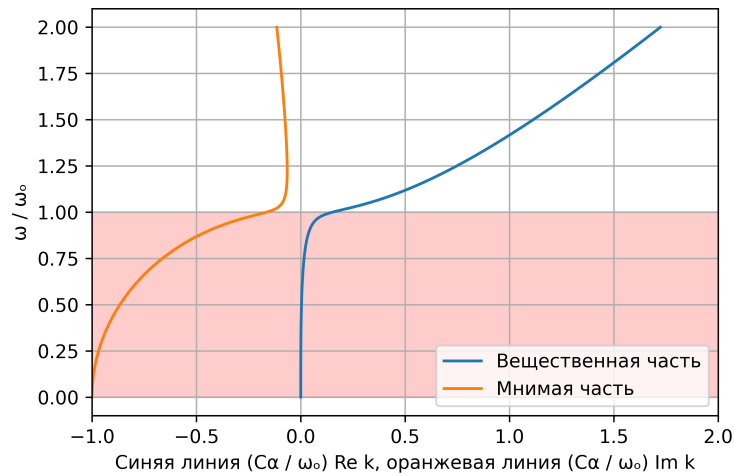


Рис. 2.9. Дисперсионные кривые для вязкоупругой редуцированной среды Коссера при $\mu = 0$ и $b = 0.05$. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega = 0$ и $\Omega = 1$

Далее в работе мы полагаем, что $\mu \neq 0$.

2.1 Асимптотика вещественной части волнового числа при малых значениях трансляционной и ротационной вязкости

Получим асимптотическое решение для вещественной части волнового числа при условии, что трансляционное трение n и ротационное трение b малы. Асимптотика будет получена для безразмерных частот, находящихся на расстоянии много большем b^2, n^2 от критических частот, то есть $|\Omega^2 - \Omega_1^2| \gg b^2, n^2$ и $|\Omega^2 - 1| \gg b^2, n^2$.

Разложим вещественную часть до 2 порядка малости. Из (2.6) получаем, что:

$$\begin{aligned} \frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\operatorname{Re} k)^2 = & \frac{1}{2} \Omega^2 \frac{(\Omega^2 - 1)}{(c^2 \Omega^2 - 1)} \left(1 + \Omega^2 \frac{1 + \Omega^2 - c^2 \Omega^2}{(c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1)} b^2 \right) \cdot \\ & \left(1 - \frac{\Omega^2 (\Omega^2 - 1)^2}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2} n^2 - \frac{2\Omega^6 (c^2 - 1)}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2} nb \right. \\ & \left. - \frac{\Omega^6 (c^2 - 1)^2 + \Omega^2 (2\Omega^2 - 2\Omega^2 c^2 + 1)}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2} b^2 \right) \cdot \\ & \left(1 \pm \left(1 + \frac{\Omega^2 (\Omega^2 - 1)^4}{2((c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} n^2 + \frac{\Omega^{10} (c^2 - 1)^2}{2((c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} b^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Omega^6 (c^2 - 1)(\Omega^2 - 1)^2}{((c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} nb \right) \right). \quad (2.20) \end{aligned}$$

2.1.1 Асимптотика $\text{Re } k$ в бывшей запрещенной зоне при малой диссипации

Решение (2.20) с “минусом”, соответствующее бывшей запрещенной зоне, представляется в виде:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2}(\text{Re } k)^2 = \frac{1}{2}\Omega^2 \frac{(1 - \Omega^2)}{(c^2\Omega^2 - 1)} \left(\frac{\Omega^2(\Omega^2 - 1)^4}{2((c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} n^2 + \frac{\Omega^{10}(c^2 - 1)^2}{2((c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} b^2 + \frac{\Omega^6(c^2 - 1)(\Omega^2 - 1)^2}{((c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} nb \right). \quad (2.21)$$

Или, что то же самое:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2}(\text{Re } k)^2 = \frac{1}{4} \frac{\Omega^4(1 - \Omega^2)}{(c^2\Omega^2 - 1)^3} \left((1 - \Omega^2)n + (c^2 - 1) \frac{\Omega^4}{1 - \Omega^2} b \right)^2. \quad (2.22)$$

Убирая квадраты, получаем:

$$\frac{c_s}{\omega_0} \text{Re } k = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{(1 - \Omega^2)^{1/2}(c^2\Omega^2 - 1)^{3/2}} \left((1 - \Omega^2)^2 n + (c^2 - 1)\Omega^4 b \right). \quad (2.23)$$

Для заданной частоты при малой диссипации увеличение любого из параметров n, b ведет к увеличению $\text{Re } k$ (волна становится короче). Также всегда есть падающий участок дисперсионной кривой (близкий к гиперболе при частотах, достаточно близких к Ω_1 , при условии $b^2, n^2 = o(\Omega - \Omega_1)$), поскольку в (2.23) присутствует множитель $\frac{1}{(c^2\Omega^2 - 1)^{3/2}}$. При приближении к $\Omega = 1$ решающий вклад имеет ротационная вязкость b , а при приближении к $\Omega = 1/c$ важны оба параметра вязкости n и b .

Найдём экстремум, с которого начинается ниспадающий участок дисперсионной кривой (экстремум слева). Для этого продифференцируем асимптотическое решение с “минусом” (2.23), которое является решением в бывшей запре-

щенной зоне:

$$\frac{c_s}{\omega_0}(\operatorname{Re} k)' = \left(\frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{c^2 \Omega^2 - 1} \left((1 - \Omega^2)n + (c^2 - 1) \frac{\Omega^4}{1 - \Omega^2} b \right) \sqrt{\frac{1 - \Omega^2}{c^2 \Omega^2 - 1}} \right)' \quad (2.24)$$

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{c^2 \Omega^2 - 1} \left((1 - \Omega^2)n + (c^2 - 1) \frac{\Omega^4}{1 - \Omega^2} b \right) \sqrt{\frac{1 - \Omega^2}{c^2 \Omega^2 - 1}} \right)' = 0. \quad (2.25)$$

Упрощая выражение (2.25), получаем:

$$(\Omega^2 - 1)^2(2c^2\Omega^4 - 5\Omega^2 + c^2\Omega^2 + 2)n + \Omega^4(c^2 - 1)(2c^2\Omega^4 - 3c^2\Omega^2 - 5\Omega^2 + 6)b = 0. \quad (2.26)$$

Данное уравнение является уравнением четвертой степени относительно Ω^2 . Аналитическое решение его очень громоздко, однако, учитывая, что при $\Omega = 1$ его левая часть равна $-(c^2 - 1)^2 b < 0$, а при $\Omega = \Omega_1 = 1/c$ она равна $3\Omega_1^2(1 - \Omega_1)^2(n(1 - \Omega_1) + b) > 0$, в запрещенной зоне имеется хотя бы один корень данного уравнения. Аналитическое решение можно найти по формулам Феррари.

Можно найти выражение для экстремума при отсутствии трансляционной вязкости $n = 0$ и ненулевой ротационной $b \neq 0$:

$$\Omega^4(c^2 - 1)(2c^2\Omega^4 - 3c^2\Omega^2 - 5\Omega^2 + 6)b = 0. \quad (2.27)$$

Получаем выражение экстремума для Ω^2 :

$$\Omega^2 = \frac{3c^2 + 5 \pm \sqrt{9c^4 - 18c^2 + 25}}{4c^2}. \quad (2.28)$$

Необходимо выбрать “минус”, поскольку ищется корень внутри запрещен-

ной зоны. Из (2.28) получаем, что экстремум ≤ 1 . Это выражение совпадает с результатом, полученным в статье [20].

При $b = 0$ и $n \neq 0$:

$$(\Omega^2 - 1)^2(2c^2\Omega^4 - 5\Omega^2 + c^2\Omega^2 + 2)n = 0. \quad (2.29)$$

Выражение для экстремума имеет вид:

$$\Omega^2 = \frac{5 - c^2 \pm \sqrt{c^4 - 26c^2 + 25}}{4c^2}. \quad (2.30)$$

С учётом того, что $c^2 \geq 1$, получаем, что при отсутствии ротационной вязкости экстремум не попадает в запрещенную зону, что соответствует результату, полученному в [12].

Также можно посчитать численно значение экстремума при заданных параметрах трансляционной и ротационной вязкостей и параметра c . Например, при $b = 0.05, n = 0.05, c^2 = 1.5$ безразмерная частота равна $\Omega = 0.93908$. На графике зависимости безразмерной частоты от вещественной части волнового числа на рис. 2.10 указан экстремум.

Можно построить 3D график зависимости безразмерной частоты, в которой происходит смена характера преломления с нормального на аномальное, от логарифма отношения упругих параметров α/μ и логарифма отношения вязкостей n/b . На графике 2.11 построена зависимость при отношении α/μ меняющимся от 0.1 до 10 и n/b от 0.1 до 10.

Таким образом, экстремум всегда находится в границах запрещенной зоны. Снизу, согласно (2.23) его ограничивает падающий участок, а сверху влияние n мало и для $n = 0, b \neq 0$ экстремум не больше 1 согласно (2.28)).

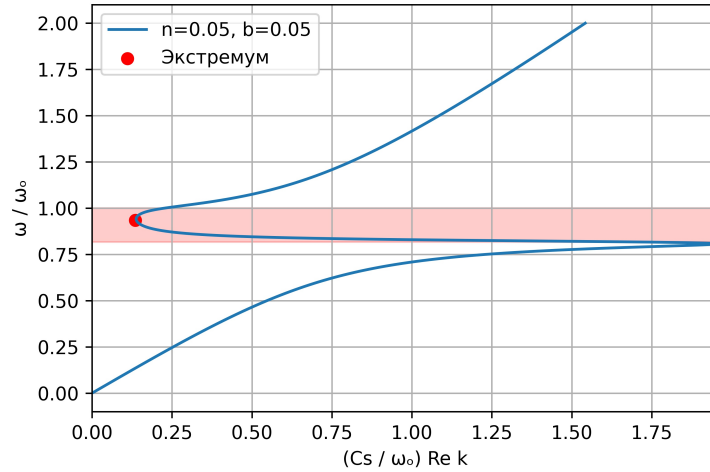


Рис. 2.10. Зависимость безразмерной частоты от безразмерной вещественной части волнового числа и экстремум при $b = 0.05$, $n = 0.05$, $c^2 = 1.5$. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

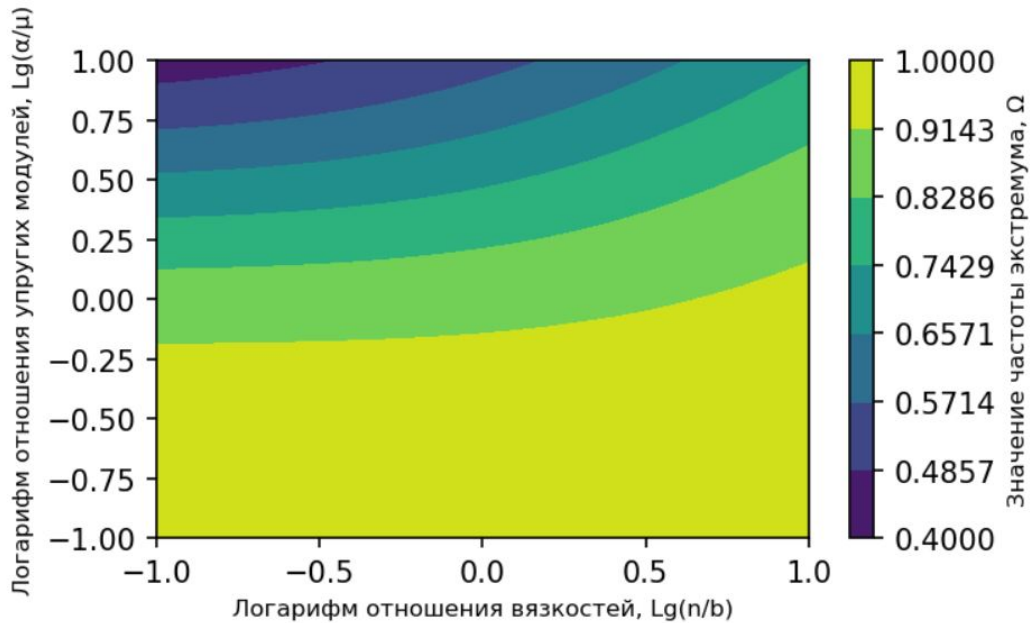


Рис. 2.11. Зависимость частоты, где происходит смена характера преломления, от логарифма отношения упругих параметров $\frac{\alpha}{\mu}$ и логарифма отношения вязкостей $\frac{n}{b}$ для малых n, b

2.1.2 Асимптотика $\text{Re } k$ вне бывшей запрещенной зоны при малой диссипации

Асимптотическое приближение корня уравнения (2.20) с “плюсом” дисперсионного соотношения выглядит следующим образом:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\text{Re } k)^2 = \Omega^2 \frac{\Omega^2 - 1}{c^2 \Omega^2 - 1} - \frac{3}{4} \Omega^4 \frac{(\Omega^2 - 1)^3}{(c^2 \Omega^2 - 1)^3} n^2 - \frac{3}{2} (c^2 - 1) \Omega^8 \frac{\Omega^2 - 1}{(c^2 \Omega^2 - 1)^3} nb$$

$$1 - \frac{1}{c^2} (c^2 - 1) \Omega^8 \frac{4(c^2 \Omega^2 - 1) - 3\Omega^4 (c^2 - 1)}{k^2} \quad (2.31)$$

Упрощая выражение (2.31), получаем:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\operatorname{Re} k)^2 = \Omega^2 \frac{\Omega^2 - 1}{c^2 \Omega^2 - 1} \left(1 - \frac{3\Omega^2}{4(c^2 \Omega^2 - 1)^2 (\Omega^2 - 1)^2} \left((\Omega^2 - 1)^2 n + (c^2 - 1) \Omega^4 b \right)^2 + (c^2 - 1) \frac{\Omega^6}{(c^2 \Omega^2 - 1) (\Omega^2 - 1)^2} b^2 \right). \quad (2.32)$$

Для частот, близких к частоте отсечки, важен ротационный параметр вязкости b , а для частот вблизи граничной частоты — оба параметра вязкости. Для частот, близких к нулю, решающее значение имеет трансляционная вязкость n , а при устремлении частоты к бесконечности важное значение имеют оба параметра вязкости.

2.1.3 Обсуждение характера зависимости $\operatorname{Re} k$ от малой диссипации

Корень “+” уравнения (2.20) соответствует асимптотике вне запрещенной зоны, а “−” внутри нее, при условии, что мы не слишком приближаемся к граничным частотам (разность Ω и данных частот много больше n^2, b^2). График асимптотики вещественной части волнового числа, построенный при отношении $\alpha/\mu = 0.5$, представлен на рис. 2.12.

Полученный результат для асимптотики вещественной части волнового числа внутри запрещенной зоны совпадает с результатами, полученными в статье [20] для $n = 0$ и в статье [12] для $b = 0$. Для случая асимптотики вне запрещенной зоны решения совпадают с результатом, полученным в статье [12] при $b = 0$:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\operatorname{Re} k)^2 = \Omega^2 \frac{\Omega^2 - 1}{c^2 \Omega^2 - 1} \left(1 - \frac{3\Omega^2 (\Omega^2 - 1)^2}{4(c^2 \Omega^2 - 1)^2} n^2 \right). \quad (2.33)$$

Можно показать, что данное решение совпадает при $n = 0$ с результатом в

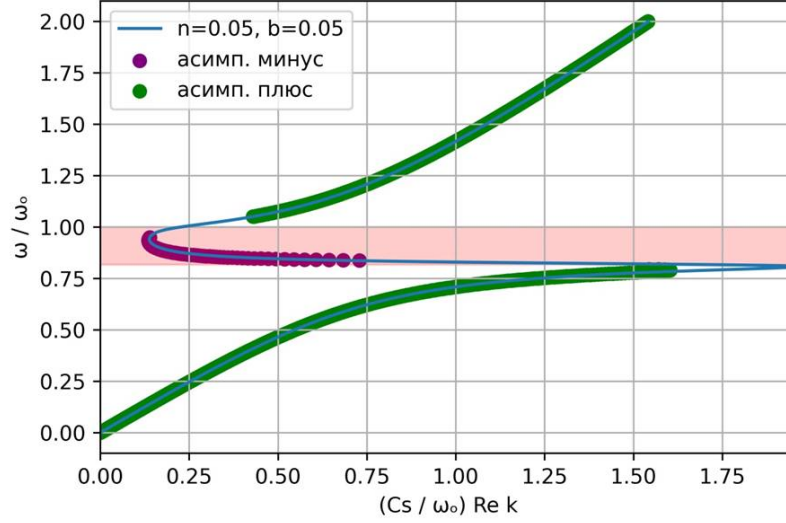


Рис. 2.12. Асимптотика вещественной части. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

статье [20]:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\text{Re } k)^2 = \Omega^2 \frac{\Omega^2 - 1}{c^2 \Omega^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{4} (c^2 - 1) \Omega^6 \frac{4(c^2 \Omega^2 - 1) - 3\Omega^4 (c^2 - 1) b^2}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2 (\Omega^2 - 1)^2} \right). \quad (2.34)$$

При $b = 0$ увеличение трансляционной диссипации даёт уменьшение вещественной части волнового числа, что ведёт к увеличению длины волны.

Для случая $n = 0$ длина волны ведет себя по разному в зависимости от частоты, упругих параметров и параметров диссипации. Найдём значение частоты, на которой меняется поведение вещественной части волнового числа. Для ее нахождения получим корни уравнения:

$$4(c^2 \Omega^2 - 1) - 3\Omega^4 (c^2 - 1) = 0. \quad (2.35)$$

Выберем корень вне запрещенной зоны:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2(1 + \sqrt{1 - 3\Omega_1^2(1 - \Omega_1^2)})}{3(1 - \Omega_1^2)}}. \quad (2.36)$$

Получим численный результат при заданных параметрах вязкости и упругости. Например, для $b = 0.05$, $c^2 = 1.5$ получаем, что значение частоты $\Omega \approx 1.7761$. До этой частоты вязкость уменьшает длину волны, а после увеличивает.

При $b \neq 0$ и $n \neq 0$, исходя из (2.32), необходимо решить следующее уравнение:

$$-3(\Omega^2 - 1)^4 n^2 - 6(c^2 - 1)\Omega^6(\Omega^2 - 1)^2 nb + (c^2 - 1)\Omega^6(4(c^2\Omega^2 - 1) - 3\Omega^4(c^2 - 1))b^2 = 0. \quad (2.37)$$

Аналитически получить безразмерную частоту из уравнения (2.37) проблематично, но можно посчитать численно значение частоты при определенной вязкости и упругости, как, например, при $n = 0.05$, $b = 0.05$, $c^2 = 1.5$ получаем, что $\Omega \approx 1.2258$. На рис. 2.13 показана 3D зависимость безразмерной частоты, при которой меняется характер поведения вещественной части волнового числа вне полосы непропускания, от отношения показателей вязкости n/b и от отношения параметров упругости α/μ , лежащих в пределах от 0.1 до 10.

В результате, в случае наличия трансляционной и ротационной вязкости или только ротационной, рост малой диссипации может привести как к увеличению длины волны, так и к ее уменьшению в зависимости от упругих параметров, частоты и диссипации.

2.2 Асимптотика мнимой части волнового числа при малых значениях трансляционной и ротационной вязкости

Вычислим асимптотическое решение для мнимой части волнового числа при условии малости ротационного трения b и трансляционного трения n . Аналогично случаю с получением асимптотики вещественной части волнового чис-

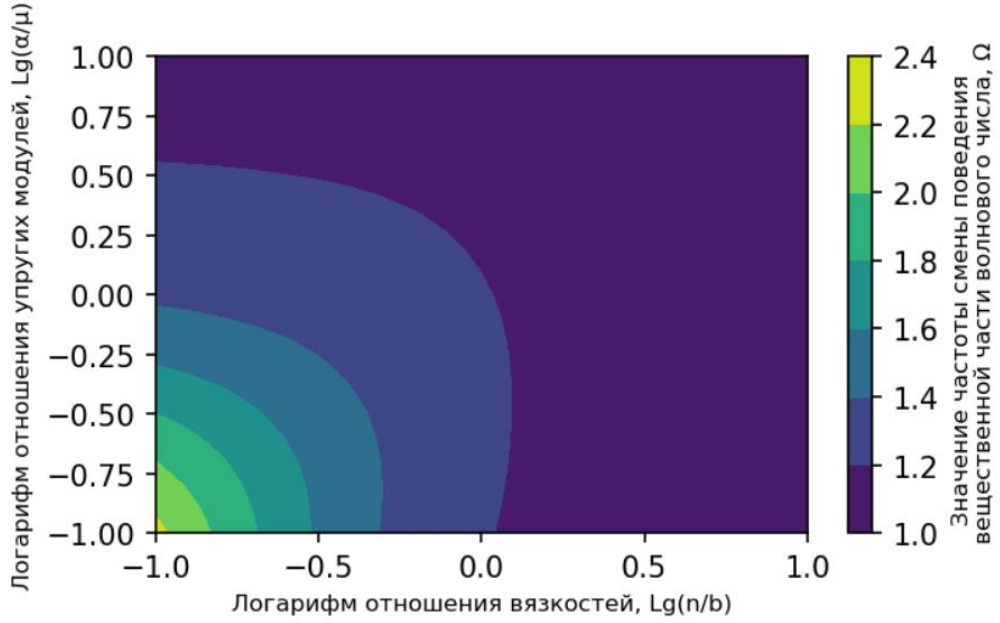


Рис. 2.13. Зависимость частоты, где происходит изменение характера длины волны относительно упругого случая, от логарифма отношения упругих параметров $\frac{\alpha}{\mu}$ и логарифма отношения вязкостей $\frac{n}{b}$ для малых n, b вне запрещенной зоны

ла в случае мнимой части получаем асимптотику для частот, находящихся на расстоянии много большем n^2, b^2 от критических, $|\Omega^2 - \Omega_1^2| \gg b^2, n^2$ и $|\Omega^2 - 1| \gg b^2, n^2$.

Разложим мнимую часть до второго порядка малости. Из (2.8) получаем, что:

$$\begin{aligned} \frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\text{Im } k)^2 = & \frac{1}{2} \Omega^2 \frac{(\Omega^2 - 1)}{(c^2 \Omega^2 - 1)} \left(1 + \Omega^2 \frac{1 + \Omega^2 - c^2 \Omega^2}{(c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1)} b^2 \right) \cdot \\ & \left(1 - \frac{\Omega^2 (\Omega^2 - 1)^2}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2} n^2 - \frac{2\Omega^6 (c^2 - 1)}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2} nb \right. \\ & \left. - \frac{\Omega^6 (c^2 - 1)^2 + \Omega^2 (2\Omega^2 - 2\Omega^2 c^2 + 1)}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2} b^2 \right) \cdot \\ & \left(-1 \pm \left(1 + \frac{\Omega^2 (\Omega^2 - 1)^4}{2((c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} n^2 + \frac{\Omega^{10} (c^2 - 1)^2}{2((c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} b^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\Omega^6 (c^2 - 1)(\Omega^2 - 1)^2}{((c^2 \Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} nb \right) \right). \quad (2.38) \end{aligned}$$

2.2.1 Асимптотика $\text{Im } k$ вне бывшей запрещенной зоны при малой диссипации

Решение с “плюсом” уравнения (2.38), соответствующее области вне бывшей запрещенной зоны, будет иметь вид:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\text{Im } k)^2 = \frac{1}{4} \frac{\Omega^4 (\Omega^2 - 1)}{(c^2 \Omega^2 - 1)^3} \left((\Omega^2 - 1)n + (c^2 - 1) \frac{\Omega^4}{\Omega^2 - 1} b \right)^2. \quad (2.39)$$

Дисперсионное соотношение для $\text{Im } k$ вне бывшей полосы непропускания:

$$\frac{c_s}{\omega_0} \text{Im } k = \frac{1}{2} \frac{\Omega^2}{(\Omega^2 - 1)^{1/2} (c^2 \Omega^2 - 1)^{3/2}} \left((\Omega^2 - 1)^2 n + (c^2 - 1) \Omega^4 b \right). \quad (2.40)$$

В асимптотическом приближении для малой диссипации дисперсионного соотношения мнимой части волнового числа $\text{Im } k$ вне запрещенной зоны получаем, что при увеличении как трансляционной n , так и ротационной b вязкости, происходит увеличение $\text{Im } k$. Таким образом, волна проходит хуже, что согласуется с интуитивным представлением о влиянии малой диссипации. Исследуя поведение дисперсионного соотношения при приближении к критическим частотам, к нулю и бесконечности, получаем, что вблизи граничной частоты важна и трансляционная и ротационная вязкость, при устремлении частоты к бесконечности также важны оба параметра, при частоте, близкой к нулю, важное значение имеет трансляционная вязкость, а при близкой к частоте отсечки — ротационная.

2.2.2 Асимптотика $\text{Im } k$ в бывшей запрещенной зоне при малой диссипации

Корень с “минусом” уравнения (2.38), соответствующий области бывшей запрещенной зоны, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{c_s^2}{\omega_0^2}(\text{Im } k)^2 = \Omega^2 \frac{1 - \Omega^2}{c^2 \Omega^2 - 1} & \left(1 - \frac{3}{4} \Omega^2 \frac{(\Omega^2 - 1)^2}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2} n^2 \right. \\ & - \frac{3}{2} (c^2 - 1) \Omega^6 \frac{1}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2} n b \\ & \left. + \frac{1}{4} (c^2 - 1) \Omega^6 \frac{4(c^2 \Omega^2 - 1) - 3\Omega^4 (c^2 - 1)}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2 (\Omega^2 - 1)^2} b^2 \right). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Записываем выражение в другом виде:

$$\begin{aligned} \frac{c_s^2}{\omega_0^2}(\text{Im } k)^2 = \Omega^2 \frac{1 - \Omega^2}{c^2 \Omega^2 - 1} & \left(1 - \frac{3\Omega^2}{4(c^2 \Omega^2 - 1)^2 (\Omega^2 - 1)^2} \left((\Omega^2 - 1)^2 n \right. \right. \\ & \left. \left. + (c^2 - 1) \Omega^4 b \right)^2 + (c^2 - 1) \frac{\Omega^6}{(c^2 \Omega^2 - 1) (\Omega^2 - 1)^2} b^2 \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Для частот вблизи граничной оба параметра вязкости имеют значение, а вблизи частоты отсечки — только ротационная вязкость.

2.2.3 Обсуждение характера зависимости $\text{Im } k$ от малой диссипации

Результат в частном случае при $b = 0$ совпадает с результатом, полученным в работе [12]:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2}(\text{Im } k)^2 = \Omega^2 \frac{1 - \Omega^2}{c^2 \Omega^2 - 1} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\Omega^2 (\Omega^2 - 1)^2}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2} n^2 \right). \quad (2.43)$$

В случае лишь трансляционной малой вязкости $|\text{Im } k|$ уменьшается с ростом n , то есть волна проходит лучше, в согласии с работой [12].

Рассмотрим случай наличия только ротационной вязкости:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\text{Im } k)^2 = \Omega^2 \frac{1 - \Omega^2}{c^2 \Omega^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{4} (c^2 - 1) \Omega^6 \frac{4(c^2 \Omega^2 - 1) - 3\Omega^4 (c^2 - 1)}{(c^2 \Omega^2 - 1)^2 (\Omega^2 - 1)^2} b^2 \right). \quad (2.44)$$

В случае $n = 0$ совпадения нет, так как в статье [20] допущена неточность при вычислении асимптотики $\text{Im } k$.

Найдём значение частоты, на которой меняется поведение мнимой части волнового числа, из уравнения (2.35) и выберем корень внутри запрещенной зоны:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2(1 - \sqrt{1 - 3\Omega_1^2(1 - \Omega_1^2)})}{3(1 - \Omega_1^2)}}. \quad (2.45)$$

Поскольку на концах запрещенной зоны имеются значения мнимой части волнового числа разных знаков (при $\Omega = 1$ имеем $(c^2 - 1) > 0$, а при $\Omega = 1/c = \Omega_1^{-1}$ имеем $-\frac{3(c^2-1)}{c^4} < 0$), то изменение поведения мнимой части волнового числа есть всегда. Например, при $b = 0.05, c^2 = 1.5$ получаем значение частоты $\Omega \approx 0.9194$. До значения частоты (2.45) вязкость помогает проходить волне, а после наоборот.

При $n \neq 0$ и $b \neq 0$ необходимо решить уравнение (2.37). Решение уравнения весьма громоздкое, однако корень в границах запрещенной зоны есть, поскольку при $\Omega = 1$ выражение получается $(c^2 - 1)^2 b^2 > 0$, а при $\Omega = 1/c = \Omega_1^{-1}$ получается $-3\Omega_1^2 (\Omega_1^2 - 1)^2 n^2 - 6(\Omega_1^{-2} - 1) \Omega_1^6 (\Omega_1^2 - 1)^2 n b - 3\Omega_1^{10} (\Omega_1^{-4} - 1)^2 b^2 < 0$, поэтому можно получить численно значение частоты при задании параметров вязкости и упругости. Например, при $n = 0.05, b = 0.05, c^2 = 1.5$ получаем, что $\Omega \approx 0.9348$. Также можно привести графическую зависимость безразмерной частоты, на которой происходит смена поведения затухания волны, от отношения параметров вязкости n/b в диапазоне от 0.1 до 10 и от отношения модулей упругости α/μ в аналогичном диапазоне. Она изображена на рис. 2.14.

Таким образом, как в случае только ротационной вязкости, так и в случае

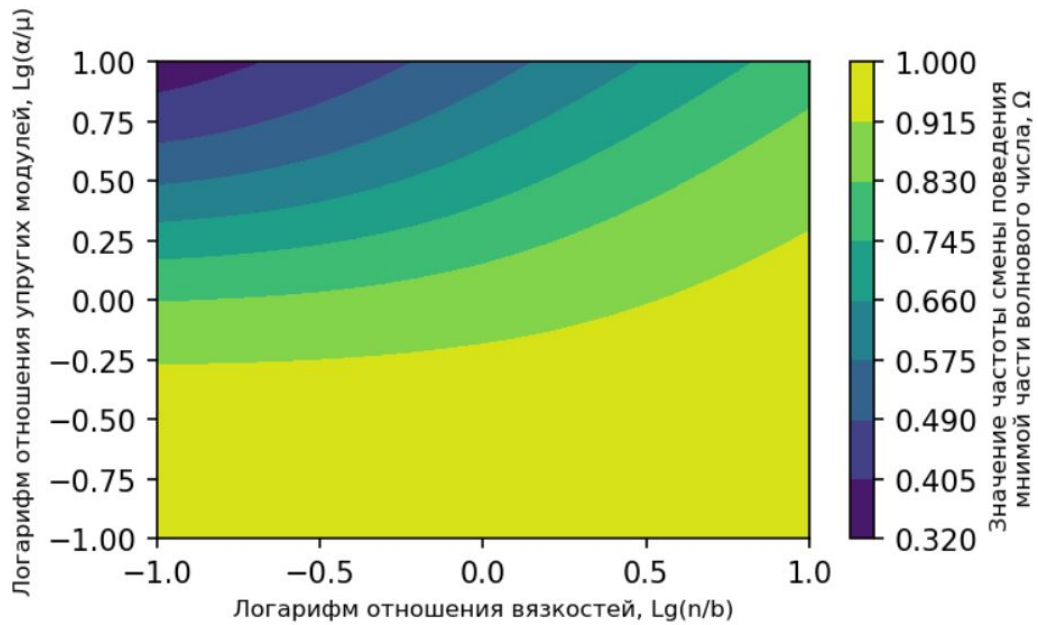


Рис. 2.14. Зависимость частоты, где происходит смена характера затухания волны, от логарифма отношения упругих параметров $\frac{\alpha}{\mu}$ и логарифма отношения вязкостей $\frac{n}{b}$ для малых n, b внутри запрещенной зоны

комбинированной вязкости рост малой диссипации может привести как к уменьшению $|\text{Im } k|$, так и к его увеличению в зависимости от диссипации, частоты и упругих параметров.

График асимптотики мнимой части волнового числа при отношении упругих параметров $\alpha/\mu = 0.5$ представлен на рис. 2.15.

Из асимптотических приближений (2.32) и (2.42), а также (2.23) и (2.40) видно, что вещественная часть волнового числа вне запрещенной зоны с точностью до знака совпадает с мнимой частью внутри запрещенной зоны, и наоборот — мнимая часть волнового числа вне полосы непропускания с точностью до знака совпадает с вещественной частью внутри полосы непропускания.

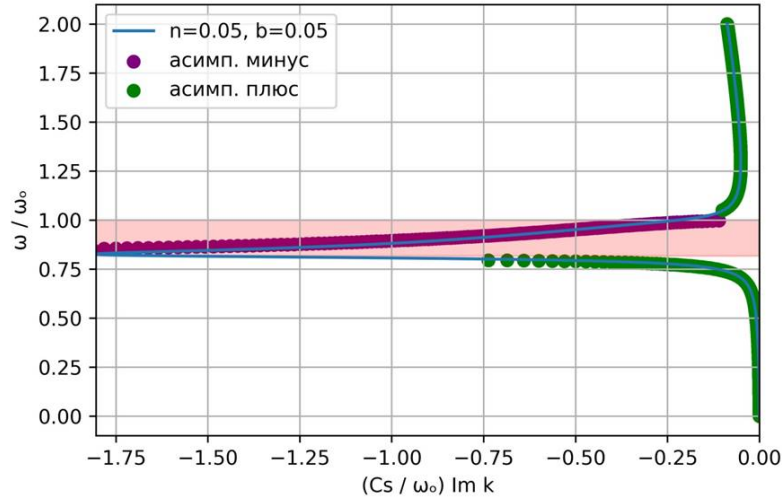


Рис. 2.15. Асимптотика мнимой части. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

2.3 Асимптотика логарифмического декремента волнового числа при малых значениях трансляционной и ротационной вязкости

Асимптотику ищем вдали от граничных частот и для малых значений вязкости n и b .

Получим разложение логарифмического декремента до 2 порядка малости. Из (2.9) получаем, что:

$$\left(\frac{1}{2\pi Q}\right)^2 = \frac{((c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1) + b^2\Omega^2(1 + \Omega^2 - c^2\Omega^2))^2}{(-n\Omega(\Omega^2 - 1)^2 + b\Omega^5(1 - c^2) - b^2n\Omega^3)^2} \left(-1 \pm \left(1 + \frac{\Omega^2(\Omega^2 - 1)^2}{2(c^2\Omega^2 - 1)^2}n^2 + \frac{\Omega^{10}(c^2 - 1)^2}{2((c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2}b^2 + \frac{\Omega^6(c^2 - 1)}{(c^2\Omega^2 - 1)^2}nb \right) \right). \quad (2.46)$$

2.3.1 Асимптотика логарифмического декремента вне бывшей запрещенной зоны при малой диссипации

Решение уравнения (2.46) с “плюсом” будет иметь вид:

$$\left(\frac{1}{2\pi Q}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega^2(\Omega^2 - 1)^2}{2(c^2\Omega^2 - 1)^2} n^2 + \frac{\Omega^{10}(c^2 - 1)^2}{2((c^2\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - 1))^2} b^2 + \frac{\Omega^6(c^2 - 1)}{(c^2\Omega^2 - 1)^2} nb \right). \quad (2.47)$$

Собирая полный квадрат в решении для логарифмического декремента вне бывшей полосы непропускания, получаем:

$$\left(\frac{1}{2\pi Q}\right)^2 = \frac{\Omega^2(\Omega^2 - 1)^2}{4(c^2\Omega^2 - 1)^2} \left(n + \frac{\Omega^4(c^2 - 1)}{(\Omega^2 - 1)^2} b \right)^2. \quad (2.48)$$

Извлекая корень из выражения выше, получаем:

$$\frac{1}{2\pi Q} = \frac{\Omega(\Omega^2 - 1)}{2(c^2\Omega^2 - 1)} \left(n + \frac{\Omega^4(c^2 - 1)}{(\Omega^2 - 1)^2} b \right). \quad (2.49)$$

Из уравнения (2.49) видно, что при увеличении любого параметра вязкости увеличивается логарифмический декремент, что означает, что на расстоянии, равном длине волны, волна убывает быстрее вне запрещённой зоны.

2.3.2 Асимптотика логарифмического декремента в бывшей запрещенной зоне при малой диссипации

Корень уравнения (2.46) с “минусом” имеет вид:

$$\left(\frac{1}{2\pi Q}\right)^2 = \frac{4(1 - \Omega^2 - c^2\Omega^2 + c^2\Omega^4)^2}{\Omega^2(\Omega^2 - 1)^4 n^2 + \Omega^{10}(c^2 - 1)^2 b^2 + 2\Omega^6(c^2 - 1)(\Omega^2 - 1)^2 nb}. \quad (2.50)$$

Упростив решение с “минусом”, получаем:

$$\left(\frac{1}{2\pi Q}\right)^2 = \frac{4(1 - \Omega^2)^2(1 - c^2\Omega^2)^2}{\Omega^2((\Omega^2 - 1)^2n + \Omega^4(c^2 - 1)b)^2}. \quad (2.51)$$

Решением внутри бывшей запрещенной зоны является:

$$\frac{1}{2\pi Q} = \frac{2(1 - \Omega^2)(c^2\Omega^2 - 1)}{\Omega((\Omega^2 - 1)^2n + \Omega^4(c^2 - 1)b)}. \quad (2.52)$$

Видим, что в запрещенной зоне рост малой диссипации любого рода приводит к уменьшению логарифмического декремента, то есть на расстоянии, равном длине волны, волна убывает медленнее.

Найдём экстремум логарифмического декремента в бывшей запрещенной зоне. Для этого продифференцируем асимптотическое решение с “минусом” (2.52), которое является решением внутри бывшей полосы непропускания:

$$Q^{-1} = \left(\sqrt{\frac{4(1 - \Omega^2 - c^2\Omega^2 + c^2\Omega^4)^2}{\Omega^2(\Omega^2 - 1)^4n^2 + \Omega^{10}(c^2 - 1)^2b^2 + 2\Omega^6(c^2 - 1)(\Omega^2 - 1)^2nb}} \right)' \quad (2.53)$$

$$\left(\sqrt{\frac{4(1 - \Omega^2 - c^2\Omega^2 + c^2\Omega^4)^2}{\Omega^2(\Omega^2 - 1)^4n^2 + \Omega^{10}(c^2 - 1)^2b^2 + 2\Omega^6(c^2 - 1)(\Omega^2 - 1)^2nb}} \right)' = 0. \quad (2.54)$$

Упростив уравнение (2.54), получаем:

$$(\Omega^2 - 1)^2(c^2\Omega^4 - 3\Omega^2 + c^2\Omega^2 + 1)n + \Omega^4(c^2 - 1)(c^2\Omega^4 - 3c^2\Omega^2 - 3\Omega^2 + 5)b = 0. \quad (2.55)$$

Аналитическое решение данного уравнения четвертой степени относительно Ω^2 очень громоздко. Корни можно найти по формулам Феррари.

В уравнении (2.55) при $\Omega = 1$ левая часть равна $-2(c^2 - 1)^2b < 0$, а при

$\Omega = \Omega_1 = 1/c$ она равна $2\Omega_1^2(1 - \Omega_1)^2((1 - \Omega_1)n + b) > 0$, поэтому в полосе непропускания имеется хотя бы один корень уравнения (2.55).

Можно найти выражение при наличии только ротационной вязкости $n = 0$ и $b \neq 0$:

$$\Omega^4(c^2 - 1)(c^2\Omega^4 - 3c^2\Omega^2 - 3\Omega^2 + 5)b = 0. \quad (2.56)$$

Получаем определение экстремума для Ω^2 :

$$\Omega^2 = \frac{3c^2 + 3 \pm \sqrt{9c^4 - 2c^2 + 9}}{2c^2}. \quad (2.57)$$

Выбираем знак “минус”, потому что требуется корень внутри запрещенной зоны. Из (2.57) получаем, что экстремум ≤ 1 . Выражение для экстремума совпадает с выражением полученным в статье [20].

В ином случае, когда только трансляционная вязкость ненулевая $b = 0$ и $n \neq 0$:

$$(\Omega^2 - 1)^2(c^2\Omega^4 - 3\Omega^2 + c^2\Omega^2 + 1)n = 0. \quad (2.58)$$

Выражение для экстремума принимает вид:

$$\Omega^2 = \frac{3 - c^2 \pm \sqrt{c^4 - 10c^2 + 9}}{2c^2}. \quad (2.59)$$

Поскольку $c^2 \geq 1$, получаем, что при наличии только трансляционной вязкости, экстремума нет в запрещенной зоне.

Можно получить экстремум численно при заданных параметрах ротационной и трансляционной вязкостей и параметра c . Например, при $b = 0.02$, $n = 0.02$, $c^2 = 1.5$ безразмерная частота равна $\Omega = 0.89943$. На рис. 2.16, который является графиком зависимости безразмерной частоты от логарифмического декремента, указан экстремум.

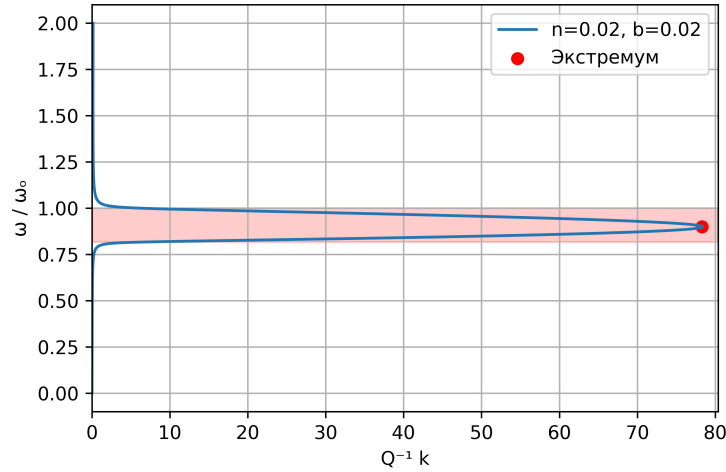


Рис. 2.16. Зависимость безразмерной частоты от логарифмического декремента и экстремум при $b = 0.02, n = 0.02, c^2 = 1.5$. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

На трехмерном графике 2.17 построена зависимость безразмерной частоты от логарифма отношения вязкостей n/b , которое меняется в диапазоне от 0.1 до 10 и логарифма отношения упругих параметров α/μ , которое меняется в том же диапазоне.

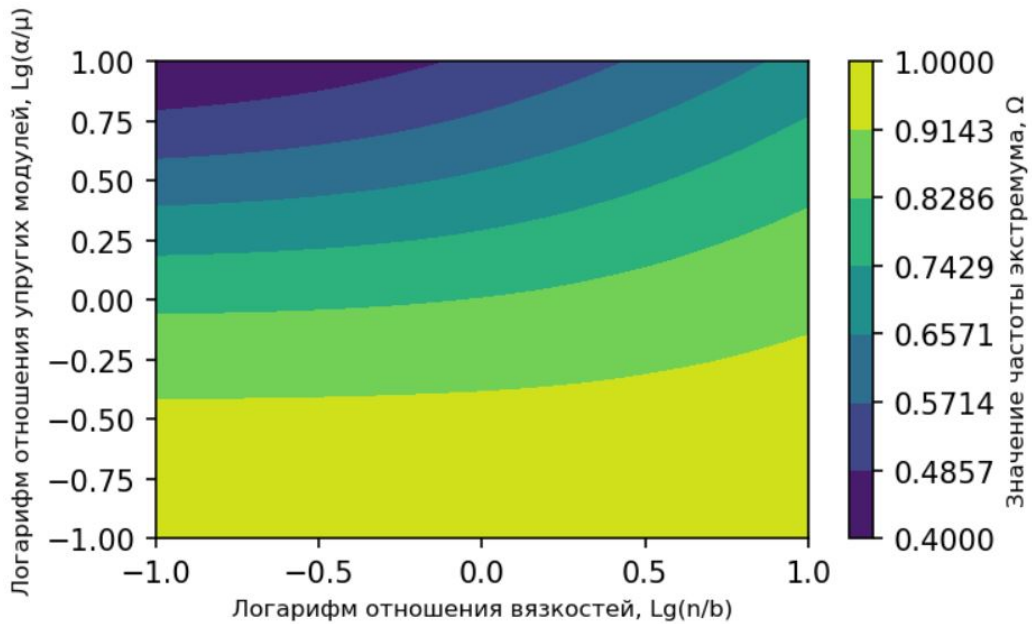


Рис. 2.17. Зависимость безразмерной частоты от логарифма отношения упругих параметров $\frac{\alpha}{\mu}$ и от логарифма отношения вязкостей $\frac{n}{b}$ для малых n, b

2.3.3 Обсуждение характера поведения логарифмического декремента

Результаты асимптотики, полученные внутри и вне запрещенной зоны, полностью соответствуют результатам, представленным в статье про трансляционное трение [12] при $b = 0$ и про ротационную вязкость [20] при $n = 0$.

Поведение асимптотического приближения для логарифмического декремента внутри и вне запрещенной зоны вблизи критических частот, нуля и при устремлении к бесконечности такое же, как для мнимой части волнового числа.

График асимптотики логарифмического декремента в зависимости от безразмерной частоты при $\alpha/\mu = 0.5$ представлен на рис. 2.18.

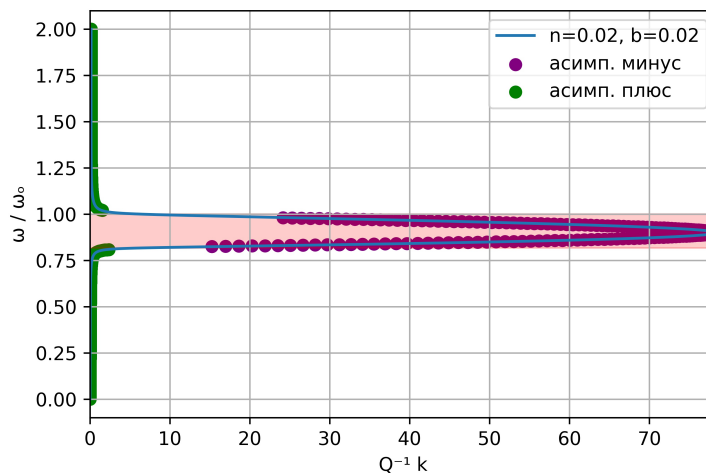


Рис. 2.18. Асимптотика логарифмического декремента. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

2.4 Поведение среды на характерных частотах

Полученные выше асимптотические приближения справедливы для безразмерных частот, не слишком близких к характерным частотам $\Omega_1, 1$, а именно отстоящих от них на величину большего порядка, чем $O(n^2, b^2)$. В работе мы не будем получать асимптотические приближения для частот внутри этих ма-

лых зон, где малыми становятся как расстояние от безразмерной частоты до границы зоны, так и диссипация, и в зависимости от соотношения малых параметров асимптотика будет иметь разный вид. Однако мы вычислим характеристики дисперсионных кривых непосредственно на границах запрещенной зоны.

Необходимо найти значения k в двух критических точках: на граничной частоте $\Omega = \Omega_1 = 1/c$ и на частоте отсечки $\Omega = 1$. Для определения значений используется полное дисперсионное соотношение (не асимптотическое приближение) для того, чтобы учесть более высокие порядки малости. Все дисперсионные зависимости в этом разделе строятся для $\alpha/\mu = 0.5$.

Найдём сначала все значения при $\Omega = 1$.

Для вещественной части волнового числа используется дисперсионное соотношение для вещественной части (2.6):

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\operatorname{Re} k)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2(2 - c^2)}{(c^2 - 1 + nb)^2 + b^2(2 - c^2)^2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{1 - bn - c^2}{b(2 - c^2)} \right)^2} \right). \quad (2.60)$$

Из (2.60) видно, что вещественная часть волнового числа на частоте отсечки $\Omega = 1$ может быть нулём только при нулевом значении ротационной вязкости $b = 0$.

Для мнимой используется дисперсионная зависимость для мнимой части

волнового числа (2.8):

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2}(\operatorname{Re} k)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2(2 - c^2)}{(c^2 - 1 + nb)^2 + b^2(2 - c^2)^2} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{1 - bn - c^2}{b(2 - c^2)} \right)^2} \right). \quad (2.61)$$

Значения для логарифмического декремента получаются при подстановке безразмерной частоты в дисперсионную зависимость (2.9):

$$\frac{1}{(2\pi Q)^2} = \frac{b^2(2 - c^2)^2}{(1 - bn - c^2)^2} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{1 - bn - c^2}{b(2 - c^2)} \right)^2} \right)^2. \quad (2.62)$$

Теперь получаем значения для частоты $\Omega = 1/c$. Значения в критических точках получаем при подстановке частоты в те же дисперсионные соотношения, которые указаны в этом разделе ранее.

Для вещественной части волнового числа (берём только корень с “плюсом” из-за положительности первого множителя):

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2}(\operatorname{Re} k)^2 = \frac{b^2}{2(n^2 b^2 c^2 + (n - b - nc^2)^2)} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{n}{c}(c^2 - 1)^2 - b(-bnc + \frac{1}{c} - c) \right)^2}{b^4}} \right). \quad (2.63)$$

Для мнимой:

$$\frac{c_s^2}{\omega_0^2} (\text{Re } k)^2 = \frac{b^2}{2(n^2 b^2 c^2 + (n - b - n c^2)^2)} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{n}{c} (c^2 - 1)^2 - b(-bnc + \frac{1}{c} - c) \right)^2}{b^4}} \right). \quad (2.64)$$

Для логарифмического декремента:

$$\frac{1}{(2\pi Q)^2} = \frac{b^4}{\left(\frac{n}{c} (c^2 - 1)^2 - b(-bnc + \frac{1}{c} - c) \right)^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{n}{c} (c^2 - 1)^2 - b(-bnc + \frac{1}{c} - c) \right)^2}{b^4}} \right)^2. \quad (2.65)$$

Критические точки изображены на зависимости частоты от вещественной и мнимой части волнового числа, а также логарифмического декремента на рис. 2.19, 2.20 и 2.21 соответственно при $b = 0.05$, $n = 0.05$, $c^2 = 1.5$.

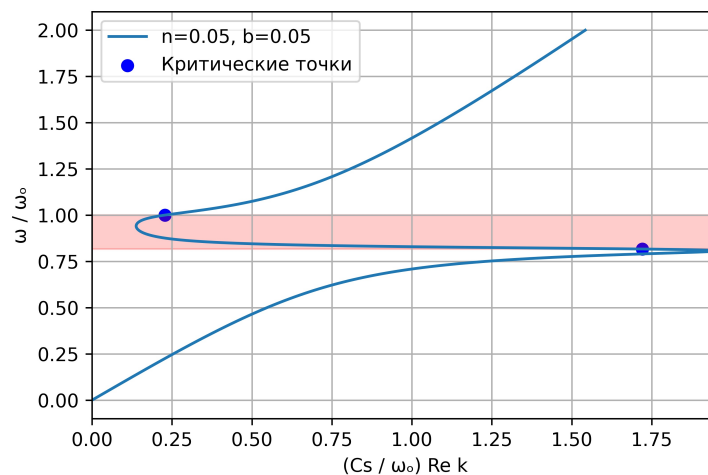


Рис. 2.19. Критические точки на вещественной части дисперсионной кривой. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

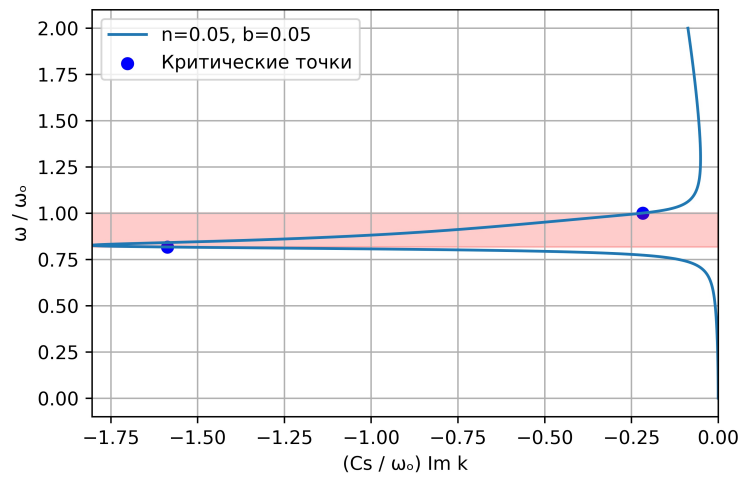


Рис. 2.20. Критические точки на мнимой части дисперсионной кривой. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

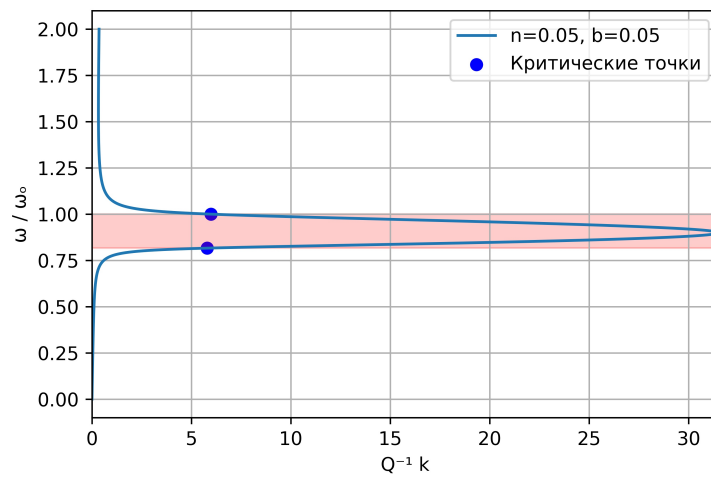


Рис. 2.21. Критические точки на графике зависимости частоты от логарифмического декремента. Розовым цветом обозначена запрещенная зона в границах $\Omega_1 = 1/c \approx 0.82$ и $\Omega = 1$

Заключение

В работе проведено исследование линейной вязкоупругой изотропной редуцированной среды Коссера. Рассмотрено совместное влияние трансляционной и ротационной вязкости на дисперсионные кривые. Получены обезразмеренные дисперсионные соотношения, асимптотические решения внутри и вне запрещенной зоны вдали от критических частот при малых значениях вязкости, значения частоты, в которой происходит смена характера преломления, для некоторых частных случаев, значения на характерных частотах для вещественной, мнимой частей волнового числа, а также логарифмического декремента.

Показано, что запрещенная зона — зона частот, где нет бегущих гармонических решений в упругой среде,— исчезает при введении в среду трансляционной и ротационной вязкости, то есть получено, что бегущая гармоническая волна распространяется на любой частоте. Этот вывод согласуется с результатами, полученными в работах отдельно для трансляционной [12] и ротационной [20] вязкостей соответственно.

Из асимптотических решений вещественной части волнового числа видно, что при достаточно малых значениях диссипации экстремум, с которого начинается ниспадающий участок дисперсионной кривой, лежит в пределах запрещенной зоны. Также установлено, что внутри бывшей запрещенной зоны при увеличении малой диссипации волна становится короче, а вне ее зависит от частоты, диссипации и упругих параметров. Тип метаматериала сменяется на дважды отрицательный, то есть при введении малой вязкости появляется зона аномального преломления.

Из асимптотических решений мнимой части волнового числа получено, что

вне бывшей запрещенной зоны при увеличении малой диссипации волна проходит хуже. Внутри бывшей запрещенной зоны диссипация до достижения определенной частоты помогает пройти волне дальше, а на более высоких частотах увеличивает поглощение. Это зависит от частоты, отношения упругих параметров и параметров вязкости.

Асимптотические решения для логарифмического декремента показывают, что внутри бывшей полосы непропускания логарифмический декремент уменьшается с увеличением диссипации, а вне полосы непропускания — увеличивается. Показано, что экстремум логарифмического декремента при малых значениях вязкости лежит в пределах частот бывшей запрещенной зоны.

При приближении к частоте отсечки для упругого случая как снизу, так и сверху решающее значение имеет ротационная вязкость, а при приближении к граничной частоте — обе вязкости. При низкочастотных колебаниях (вблизи нуля) главное значение имеет трансляционная вязкость, а при устремлении частоты к бесконечности — оба параметра вязкости.

Качественно результаты, полученные для комбинированной вязкости, похожи на случай наличия только ротационной вязкости. Действительно, основное отличие комбинированного случая от трансляционного в том, что в последнем зона аномального преломления начинается с частоты отсечки, которая в свою очередь даёт $\text{Re } k = \text{Im } k = 0$. При $b \neq 0$ наличие комбинации вязкостей влияет на частотный экстремум, с которого меняется характер преломления, а также на поведение дисперсионной кривой при приближении к критическим частотам, что было описано ранее.

Выводы, полученные в данной работе и показывающие, что происходит при введении в редуцированную среду Коссера комбинации вязкостей, могут быть полезны, поскольку редуцированные континуумы Коссера могут служить моделями для геосреды в сейсмологии, композитов с включениями, а также зер-

нистых сред.

Список использованной литературы

1. Altenbach H., Zhilin P. A. A general theory of elastic simple shells //Uspekhi Mekhaniki. – 1988. – Т. 11. – №. 4. – С. 107-148.
2. Cosserat E., Cosserat F. Theory of deformable bodies, scientific library, a //Hermann and Sons, Paris. – 1909.
3. Eremeyev V. A., Lebedev L. P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. – Springer Science Business Media, 2012.
4. Eremeyev V. A. On the material symmetry group for micromorphic media with applications to granular materials //Mechanics Research Communications. – 2018. – Т. 94. – С. 8-12.
5. Eringen A. C., Maugin G. A. Electrodynamics of continua I: foundations and solid media. – Springer Science Business Media, 2012.
6. Eringen A. C. Linear theory of micropolar viscoelasticity //International Journal of Engineering Science. – 1967. – Т. 5. – №. 2. – С. 191-204.
7. Erofeyev V. I. Wave processes in solids with microstructure. – World Scientific, 2003. – Т. 8.
8. Ferry J. D. Viscoelastic properties of polymers. – John Wiley, 1980.
9. Gilabert F. A., Roux J. N., Castellanos A. Computer simulation of model cohesive powders: Influence of assembling procedure and contact laws on low consolidation states //Physical review E. – 2007. – Т. 75. – №. 1. – С. 011303.

10. Grekova E. F., Abreu R. Isotropic linear viscoelastic reduced Cosserat medium: an acoustic metamaterial and a first step to model geomedium //New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. – Springer, Cham, 2019. – C. 165-185.
11. Grekova E. F., Kulesh M. A., Herman G. C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model //Bulletin of the Seismological Society of America. – 2009. – T. 99. – №. 2B. – C. 1423-1428.
12. Grekova E. F., Piatysheva A. P. Reduced linear viscoelastic isotropic Cosserat medium with translational viscosity: a double negative acoustic metamaterial //Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures. – Springer, Cham, 2020. – C. 153-167.
13. Hussein M. I., Leamy M. J., Ruzzene M. Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook //Applied Mechanics Reviews. – 2014. – T. 66. – №. 4.
14. Krushynska A. O., Kouznetsova V. G., Geers M. G. D. Towards optimal design of locally resonant acoustic metamaterials //Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2014. – T. 71. – C. 179-196.
15. Lakes R., Lakes R. S. Viscoelastic materials. – Cambridge university press, 2009.
16. Liu H. P., Anderson D. L., Kanamori H. Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition //Geophysical Journal International. – 1976. – T. 47. – №. 1. – C. 41-58.
17. Liu Z., Chan C. T., Sheng P. Analytic model of phononic crystals with local resonances //Physical Review B. – 2005. – T. 71. – №. 1. – C. 014103.

18. Merkel A., Tournat V., Gusev V. Dispersion of elastic waves in three-dimensional noncohesive granular phononic crystals: properties of rotational modes //Physical Review E. – 2010. – T. 82. – №. 3. – C. 031305.
19. Misra A., Poorsolhjoui P. Micro-macro scale instability in 2D regular granular assemblies //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2015. – T. 27. – №. 1. – C. 63-82.
20. Piatysheva A. P., Grekova E. F. Reduced linear viscoelastic isotropic Cosserat medium with rotational viscosity: an acoustic metamaterial //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2021. – T. 33. – №. 4. – C. 1765-1780.
21. Porubov A. V., Aero E. L., Maugin G. A. Two approaches to study essentially nonlinear and dispersive properties of the internal structure of materials //Physical Review E. – 2009. – T. 79. – №. 4. – C. 046608.
22. Schwartz L. M., Johnson D. L., Feng S. Vibrational modes in granular materials //Physical review letters. – 1984. – T. 52. – №. 10. – C. 831.
23. Turco E. In-plane shear loading of granular membranes modeled as a Lagrangian assembly of rotating elastic particles //Mechanics Research Communications. – 2018. – T. 92. – C. 61-66.
24. Vardoulakis I. Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a Cosserat continuum theory //Ingenieur-Archiv. – 1989. – T. 59. – №. 2. – C. 106-113.
25. Wu Y., Lai Y., Zhang Z. Q. Effective medium theory for elastic metamaterials in two dimensions //Physical Review B. – 2007. – T. 76. – №. 20. – C. 205313.

26. Zhou X., Hu G. Dynamic effective models of two-dimensional acoustic metamaterials with cylindrical inclusions //Acta Mechanica. – 2013. – T. 224. – №. 6. – C. 1233-1241.