

## 1. Введение. Притяжение тела конечных размеров

Обычно нет надобности помнить, что спутник, летающий по орбите вокруг Земли, - тело, а не материальная точка. При расчетах орбит об этом, как правило, и не вспоминают. Но факт остается фактом: сила притяжения Земли, действующая на тело, отличается от силы, действующей на материальную точку той же массы, что и тело, расположенную на том же расстоянии от центра Земли, что и центр масс тела. Из этого очевидного, но легко забываемого факта могут следовать удивительные выводы!

Рассмотрим, например, гантелеобразный спутник (рис. 1.1) с двумя одинаковыми шариками массы  $m/2$  каждый; массой соединяющего стержня пренебрежем. Пусть стержень перпендикулярен к направлению центр гантели – центр Земли. Пусть расстояние от центра масс спутника (то есть от середины стержня) до центра Земли есть  $r$ , полудлина гантели  $l$ ,  $R = \sqrt{l^2 + r^2}$  – расстояние от шарика до центра Земли. На каждый шарик действует ньютоновская сила, определяемая силовыми функциями  $U_1 = U_2 = \mu m/2R$ , и суммарная силовая функция

$$U = \frac{\mu m}{\sqrt{l^2 + r^2}} = \frac{\mu m}{r\sqrt{1 + \alpha^2}}, \alpha = \frac{l}{r} \quad (1.1)$$

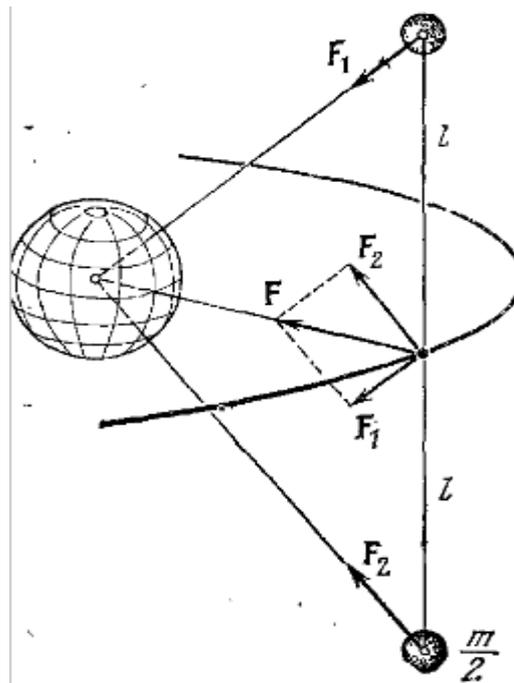


Рис. 1.1

Если спутник не обладает сверхгигантскими размерами, то величина  $\alpha$  (и тем более  $\alpha^2$ ) очень мала (сравним хотя бы  $l = 7$  м и  $r \approx 7\,000\,000$  м). Так что силовая функция  $U$  близка к силовой функции  $U_H = \mu m/r$  притяжения Землей материальной точки массы  $m$ , помещенной в центр масс нашей гантели. На каждый шарик действует ньютоновская сила

$$F_i = \frac{\mu m}{2R^2} = \left| \frac{\partial U_i}{\partial R} \right| \quad (1.2)$$

Каждая из сил  $F_1, F_2$  направлена к центру Земли. Суммарная сила определяется из параллелограмма сил (рис. 1.1) и по модулю оказывается равной

$$F = \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| = \frac{\mu m}{r^2(1 + \alpha^2)^{3/2}} \quad (1.3)$$

Суммарная сила  $F$  в нашей схеме направлена к центру притяжения и почти равна «обычной» ньютоновской силе  $F_H = \mu m/r^2$ . Почти, но не совсем! Сила  $F$  меньше, чем сила  $F_H$ . иначе говоря, эффект протяженности тела в данном случае как бы вносит добавочную отталкивающую радиальную силу. И хотя эта добавочная сила в случае малых спутников практически неощутима, но она есть! И для больших спутников может стать более заметной. Этот факт и лег в основу нового и несколько неожиданного способа маневров в космическом пространстве, который был предложен автором книги [1] и М. Е. Гиверцем.

## 2. Пульсирующий космических корабль

Ход наших рассуждений сводится к трем пунктам:

1) Сила тяготения, действующая на тело конечных размеров, отличается от силы, действующей на материальную точку той же массы, сосредоточенной в центре масс тела.

2) Изменяя размеры и форму тела, можно менять величину действующей на него силы тяготения.

3) Этими изменениями размера и формы тела можно управлять таким образом, что возникающие вариации силы тяготения с течением времени приведут к существенному отличию траектории тела от первоначальной.

Первое из этих утверждений очевидно. Второе является следствием первого. Третье утверждение будет доказано ниже.

В общем случае движения тела (а не материальной точки) в ньютоновском поле сил не поддается описанию в конечном виде и осложнено взаимосвязью движения центра масс тела с движением около центра масс. Однако, как показано в книге [2], симметричное тело может двигаться в ньютоновском центральном поле сил так, что ось симметрии тела нормальна к плоскости орбиты. Такая ситуация изображена на рис. 1.1. При этом действующая на тело сила оказывается центральной, зависит только от расстояния  $r$  от центра масс тела до центра притяжения и определяется силовой функцией  $U(r)$ . Движение происходит по плоской орбите и полностью определяется первыми интегралами уравнений движения – интегралами площадей и энергии:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c, \quad (2.1)$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{U(r)}{m} = h. \quad (2.2)$$

Введем оскулирующий фокальный параметр  $p(t)$  и оскулирующий эксцентриситет  $e(t)$  орбиты. Радиус-вектор  $r$  и скорость  $V$  оскулирующей орбиты могут быть представлены тогда в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1 + e^2 + 2e \cos v)}. \quad (2.3)$$

Здесь  $v$  – истинная аномалия в возмущенном движении. В силу (2.1) оказывается, что в возмущенном движении фокальный параметр  $p$  постоянен, – это известное свойство движений в произвольном центральном поле сил.

Вычислим величину

$$\begin{aligned} \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} &= \frac{\mu}{2p}(1 + e^2 + 2e \cos v) - \frac{\mu}{p}(1 + e \cos v) \\ &= \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь в силу (2.4) и постоянства  $p$  интегралы (2.1) и (2.2) запишутся так:

$$p = p_0 \quad (2.5)$$

$$e^2 + \frac{2p}{\mu} \left[ \frac{\mu}{r} - \frac{1}{m} U(r) \right] = \bar{h}, \quad (2.6)$$

где  $\bar{h}$  – новая постоянная. В нашем случае  $U(r)$  определяется формулой (1.1) и интеграл (2.6) после преобразований может быть записан в виде

$$e^2 + \frac{2p}{r} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2 + \sqrt{1 + \alpha^2}} = \bar{h}, \quad \alpha = \frac{l}{r}. \quad (2.7)$$

Отсюда видно, что  $e$  является функцией от  $r$  и не постоянно. В процессе движения оскулирующий эксцентриситет  $e(t)$  и радиус-вектор  $r(t)$  изменяются так, что выполняется соотношение (2.7). Поэтому можно рассмотреть движение на плоскости  $e^2, r$  согласно (2.7). Однако реальное движение может происходить не во всей плоскости  $e^2, r$ , а только в

некоторой ее части. В самом деле, первого равенства в формулах (2.3) имеем  $e^2 \cos^2 \nu = (p/r - 1)^2$ , следовательно,

$$e^2 \geq \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 \equiv e_*^2(r). \quad (2.8)$$

Таким образом, на плоскости  $e^2, r$  движение может происходить только выше кривой  $e_*^2(r)$ , определяемой уравнением  $e_*^2(r) = (p/r - 1)^2$ . Очевидно,  $e_*^2(r) \rightarrow \infty$  при  $r \rightarrow 0$ ,  $e_*^2(r) = 0$  при  $p/r = 1$  и  $e_*^2(r) \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$ . Кроме того,  $e_*^2(r) = 1$  при  $r/p = 1/2$  (рис. 2.1).

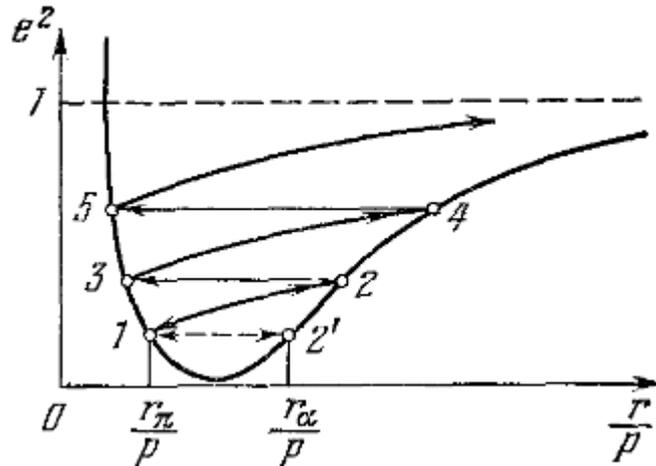


Рис. 2.1

Построим в области (2.8) реального движения кривую (2.7) при фиксированных  $p$  и  $\bar{h}$  (рис. 2.1). При увеличении  $r$  от 0 до  $\infty$  эксцентриситет монотонно возрастает от  $e^2 = -\infty$  до  $e^2 = h$ . Реальное движение определяется дугой кривой (2.7), лежащей в области, определяемой неравенством (2.8). Пересечение кривой (2.7) с граничной кривой  $e_*^2 = e_*^2(r)$ , определяемой соотношением, следующим из (2.8), дает экстремальные точки траектории:  $r = r_{min}$  (при этом  $e = e_{min}$ ) и  $r = r_{max}$  (при этом  $e = e_{max}$ ). Движение тело периодически по  $e$  и  $r$ , так что в плоскости  $e^2, r$  оно происходит, например, по дуге 1 - 2 (рис. 2.1) от точки 1 ( $e = e_{min}$ ,  $r = r_{min}$ ) к точке 2 ( $e = e_{max}$ ,  $r = r_{max}$ ), затем обратно от точки 2 к точке 1 и т. д. Если бы вместо тела была материальная точка той же массы ( $l = 0$ ), то как следует из (2.7), эта точка двигалась бы по невозмущенной

кеплеровской эллиптической траектории  $e = const$  (например, туда и обратно по отрезку 2 - 3 на рис. 2.1).

Итак, при движении гантели, нормальной к плоскости своей орбиты, оказывается, что эксцентриситет периодически колеблется между наименьшим и наибольшим своими значениями. Когда гантель находится ближе всего в Земле, эксцентриситет минимален; в точке орбиты, наиболее удаленной от Земли, эксцентриситет максимален. Эти колебания эксцентриситета невелики, и в целом орбита гантели будет похожа на кеплеровский эллипс; спутник-гантель будет двигаться в ограниченной окрестности Земли, не удаляясь от нее.

Если уметь изменять эксцентриситет орбиты заметным образом, то первоначальную эллиптическую ( $e < 1$ ) орбиту можно превратить последовательными изменениями эксцентриситета в гиперболическую ( $e > 1$ ), и спутник улетит в дальний космос. Но у спутника – материальной точки эксцентриситет орбиты неизменен; а в только что разобранным случае спутника-гантели эксцентриситет хоть и меняется, но периодически и в небольших пределах. Систематического изменения эксцентриситета нет. При ограниченных размерах спутника большого изменения эксцентриситета как будто получить нельзя.

Однако потребуем следующее (и здесь наконец, мы подошли к самому важному пункту обсуждения). Пусть рассматриваемая гантель может пульсировать: в нужные моменты сжиматься в точку или мгновенно выпрямляться на полную длину. Возможность мгновенных пульсаций, впрочем, не принципиальна и введена для упрощения рассуждений. Можно рассматривать и медленные изменения длины гантели.

Итак, пусть гантель начинает движение в ближайшей к Земле точке и пройдет полувиток орбиты до наиболее удаленной от Земли точки (вдоль отрезка 1 - 2 на рис. 2.1); в этой точке эксцентриситет, как уже говорилось, достигнет наибольшего значения ( $e = e_{max}^{(1)}$ ,  $r = r_{max}^{(1)}$ ). Тут мы сложим обе

части гантели, мгновенно уменьшив ее длину «до нуля» (фактически это значит, что длина сложенной гантели пренебрежимо мала по сравнению с длиной открытой гантели). С этого момента спутник будет двигаться как материальная точка, то есть по дуге кеплеровского эллипса (вдоль отрезка 2 – 3 на рис. 2.1), сохраняя только что полученное значение эксцентриситета  $e = e_{max}^{(1)}$  постоянным.

Вернувшись в точку, ближайшую к Земле (это будет, конечно, точка, отличная от первой «ближайшей» точки), мы донесем в сохранности приобретенное значение эксцентриситета. Здесь мы мгновенно откроем гантель на полную длину! Теперь, на новом полувитке орбиты, за счет раскрытой гантели снова будет увеличиваться значение эксцентриситета (вдоль отрезка 3 – 4 на рис. 2.1). Когда во второй раз достигнем самой удаленной от Земли точки, эксцентриситет  $e_{max}^{(2)}$  будет больше, чем при первом максимальном удалении ( $e_{max}^{(2)} > e_{max}^{(1)}$ ). Сложим гантель и понесем благоприобретенную величину эксцентриситета в сохранности до того момента, когда снова можно будет открыть гантель, и т. д. В конце концов, после многократных пульсаций гантели, можно добиться существенного изменения эксцентриситета орбиты и, может быть, даже достичь гиперболического значения эксцентриситета ( $e > 1$ ) и уйти из поля тяготения Земли.

В результате описанного процесса энергия, затраченная на «включение» и «выключение» гантели, перекачивается в энергию движения аппарата по орбите, что и позволяет разогнать аппарат вплоть до ухода из поля тяготения Земли. Орбита аппарата представляет при этом раскручивающуюся спираль с числом витков, равным числу пульсаций гантели. Космический аппарат, орбита которого меняется за счет вариаций действующей на аппарат гравитационной силы, назовем гравилетом.

Внутренние силы, затраченные на «включение» и «выключение» гантели, дают заметный внешний эффект потому (и только потому), что

существует и взаимодействует внешнее силовое поле. При этом необходима определенная резонансная настройка между внешними и внутренними силами.

### 3. Отстал от спутника – плыви брассом!

Не правда ли, захватывающая перспектива: вместо реактивного двигателя поставить электромотор, чтобы вовремя сматывал или разматывал трос, соединяющий шарики гантели, или даже... посадить для этой цели «матроса».

Реальные оценки несколько охлаждают загорающийся энтузиазм. За  $n$  циклов (включения и выключения гантели) эксцентриситет изменится примерно до значения  $e_n^2 \approx e_0^2 + n(l/p)^2(1 + e_0^2)$  (от своего начального значения  $e_0$ ). Так что для достижения  $e \sim 1$  необходимо  $n \sim (p/l)^2$  циклов (оборотов по орбите).

Если исходная орбита имеет  $p = 10000$  км, а  $l = 1$  км, то  $n \sim 10^8$  оборотов. Так как даже у поверхности Земли один оборот спутника совершается за полтора часа, а чем дальше от Земли, тем период обращения больше, то такому количеству оборотов соответствует время полета  $T > 1,5 \cdot 10^8$  час, что равно примерно 20000 лет! Вряд ли наш «матрос» согласится на столь нудную работу. При этом отношение возмущающего ускорения к основному ускорению силы тяготения на исходной орбите имеет порядок  $f \sim (l/p)^2$ .

Однако если при такой же орбите взять гантель с длиной  $l = 10$  км или даже  $l = 100$  км, то соответственно получим  $f \sim 10^{-6}$  или  $f \sim 10^{-4}$ . Эти числа дают порядок ускорений такой же, какой обеспечивается ионными и плазменными двигателями малой тяги. Но для этого космический аппарат должен иметь протяженность в десятки, а то и сотни километров! Для  $l = 100$  км число витков, потребных для разгона до параболической скорости, снижается до  $n \sim 10^4$ , а нижняя оценка времени разгона – до двух лет, что уже по крайней мере не выглядит юмористически; но надо помнить о сотнях километров сматываемого и разматываемого троса и связанных с этим проблемах. Если дать волю воображению и представить космический корабль длиной в 1000 км (в космосе места много), то такой корабль

разогнался бы до параболической скорости всего за сотню витков, что заняло бы примерно неделю времени!

Отметим еще следующее обстоятельство. Эффективность космического корабля тем больше, чем больше масса центрального тела и чем ближе может находиться аппарат к центру этого тела. Масса Солнца велика, но велик и размер его: близко к центру Солнца не подлетишь. К центру Земли можно подлететь близко; но масса Земли сравнительно мала. Однако в безграничных просторах космоса есть много звезд, словно предназначенных для маневрирования гравилетов в окрестности этих звезд. Это так называемые «белые карлики», размеры которых сравнимы с размерами планет, а массы – с массой Солнца. В окрестности «белых карликов» разгон гравилета вплоть до выхода из сферы притяжения звезды может совершиться в десятки и сотни раз быстрее, чем разгон в окрестности Земли.

В нижеследующей таблице даны характеристики разгона 140-километрового космического корабля в окрестности Земли, Солнца и «белого карлика». Полудлина гравилета принята равной  $l = 70$  км. Может быть, жители планетных систем «белых карликов» пользуются для космических путешествий не ракетами, а гравилетами?

Небесное тело	Начальное расстояние корабля до центра небесного тела, км	$f \sim (l/p)^2$	Количество витков до разгона	Время разгона
Земля	$7 \cdot 10^3$	$10^{-4}$	$10^4$	Не менее двух лет
Солнце	$7 \cdot 10^5$	$10^{-8}$	$10^8$	Не менее 80 лет
Белый карлик	$2 \cdot 10^4$	$10^{-5}$	$10^5$	Несколько часов (не менее 1,5 часа)

Не обязательно понимать под пульсациями изменения формы корабля. Может быть с теми же результатами, удастся заставить пульсировать внутри неизменного корабля массу жидкости [3].

Можно, наверное, вообще отказаться от пульсаций, если заставить корабль каким-либо способом в нужные моменты поворачиваться нужным образом (с помощью маховиков, например). Ведь сила притяжения зависит и от того, как расположен корабль по отношению к Земле. Тогда энергия, затраченная на поворот гравилета, перейдет в энергию, изменяющую орбиту корабля; сам корабль сохраняет свою форму неизменной, что, конечно, удобнее пульсирующего гравилета. Но принцип остается тот же – изменение орбиты гравилета за счет вариации силы тяготения, действующей на него.

В настоящей работе приведенные выше особенности движения тел конечных размеров в центральном гравитационном поле положены в основу решения задачи исследования динамики достаточно сложных конструкций – БОКС\* - в режиме свободного орбитального движения.

\*БОКС – большие орбитальные космические системы.

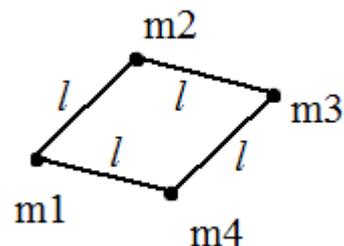
#### **4. Постановка задачи**

Исследовать движение механической системы, состоящей из  $4+K$  материальных точек, в плоском ньютоновском гравитационном поле. Требуется построить математическую модель движения системы для заданных конфигураций соединения точек. Численным интегрированием системы дифференциальных уравнений установить характер движения точек за период двух оборотов опорной точки вокруг гравитационного центра. При этом исследовать реакции стержней, соединяющих точки. Результаты представить в виде графиков зависимостей обобщенных координат и реакций от времени и положения точек системы на орбите.

## 5. Описание системы

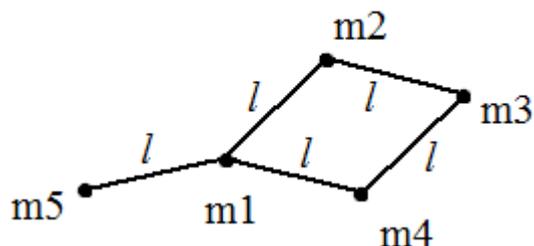
Механическая система состоит из  $4+K$  материальных точек, соединенных невесомыми стержнями и образующих заданную конфигурацию,  $K=0, 1, 2$ . Длины стержней во всех конфигурациях одинаковы. В работе рассмотрены следующие конфигурации (рис. 5.1, 5.2, 5.3):

**K=0:**



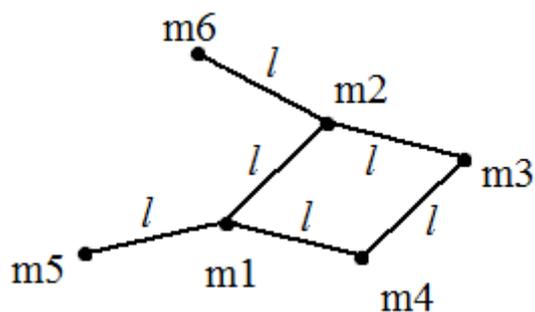
*Рис. 5.1*

**K=1:**



*Рис. 5.2*

**K=2:**



*Рис. 5.3*

Все три системы  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  движутся в орбитальной плоскости  $OXY$ .

## 6. Схема сил и обобщенные координаты рассматриваемых систем

Действующие на систему внешние силы потенциальны. Это силы гравитации, действующие на материальные точки расположенные на концах невесомых стержней системы. Система имеет  $4+K$  степеней свободы, а значит и обобщенных координат. За обобщенные координаты приняты: абсцисса и ордината опорной точки  $m_1$  и углы наклона стержней к оси  $Ox$  абсолютной системы координат, центр которой совпадает с центром ньютоновского центра гравитации (рис. 6.1, 6.2).

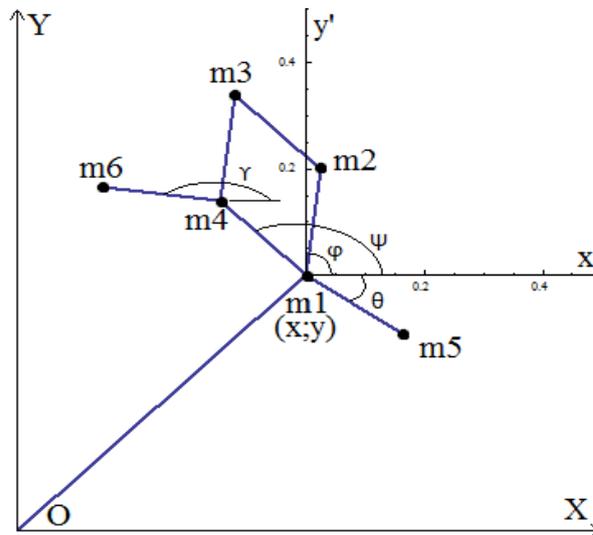


Рис. 6.1

Система координат  $m_1 x' y'$  – транспортирующая [1] –  $m_1 x' \parallel OX$ ,  $m_1 y' \parallel OY$ .

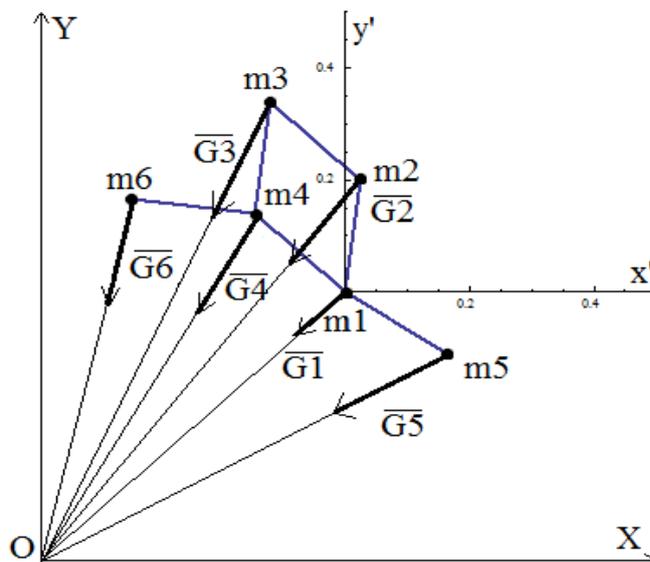


Рис. 6.2

## 7. Математическая модель движения

Поскольку связи, наложенные на точки – голономны, то математическая модель движения систем K0, K1, K2 строится в виде уравнений Лагранжа второго рода для случая потенциальных внешних сил.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \text{ где } i = 1, \dots, 4 + K \quad (7.1)$$

Здесь L – лагранжиан системы, L=T-П, где T – кинетическая энергия, П – потенциальная энергия,  $q_i$  – обобщенные координаты,  $\dot{q}_i$  – обобщенные скорости.

$$q_1 \equiv x, q_2 \equiv y, q_3 \equiv \varphi, q_4 \equiv \psi, q_5 \equiv \theta, q_6 \equiv \gamma$$

Уравнения (7.1) для каждой системы были получены с применением пакета Wolfram Mathematic 8.0 и вид этих уравнений приведен в приложении 1 для случая K=2.

### 8. Порядок определения реакций связей для К=2 (рис. 9.1)

$$\begin{cases} F_5^x - R_{15}^x = 0 \\ F_5^y - R_{15}^y = 0 \\ F_6^x - R_{46}^x = 0 \\ F_6^y - R_{46}^y = 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

Равенства (8.1) определяют реакции в стержнях 1-5 и 4-6, с учетом действия сил инерции в точках 5 и 6.

$$\begin{cases} F_4^x - R_{14} \cos(\psi) - R_{34} \cos(\varphi) + R_{46}^x = 0 \\ F_4^y - R_{14} \sin(\psi) - R_{34} \sin(\varphi) + R_{46}^y = 0 \\ F_1^x + R_{12} \cos(\varphi) + R_{14} \cos(\psi) + R_{15}^x = 0 \\ F_1^y + R_{12} \sin(\varphi) + R_{14} \sin(\psi) + R_{15}^y = 0 \\ F_2^x - R_{12} \cos(\varphi) + R_{23} \cos(\psi) = 0 \\ F_2^y - R_{12} \sin(\varphi) + R_{23} \sin(\psi) = 0 \\ F_3^x - R_{23} \cos(\psi) + R_{34} \cos(\varphi) = 0 \\ F_3^y - R_{23} \sin(\psi) + R_{34} \sin(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

Уравнения (8.2) определяют реакции в остальных стержнях с учетом найденных в (8.1).

## 9. Анализ численного решения задачи исследования орбитального движения систем 4+K точек

Дифференциальные уравнения (7.1) численно интегрировались средствами пакета Wolfram Mathematic 8.0 с применением метода Stiffness Switching.

Начальные условия: опорная точка в момент времени  $t=0$  находится на оси  $Ox$  на расстоянии 6670 км от центра гравитации, скорость ее соответствует местной круговой скорости, массы точек одинаковы и равны 15000 кг, длины стержней одинаковы и равны 0.2 км, углы  $\phi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\gamma$  соответствуют положению системы на рис. 9.1, угловые скорости стержней, для усиления зрительного эффекта, приняты довольно большими  $\dot{\phi}(0) = 1$ ,  $\dot{\psi}(0) = 1$ ,  $\dot{\theta}(0) = 1$ ,  $\dot{\gamma}(0) = 1$ .

Также был рассмотрен случай с нулевыми начальными угловыми скоростями стержней, что соответствует мгновенно-поступательному начальному состоянию системы.

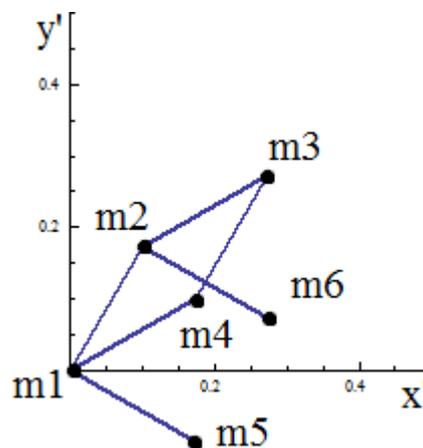
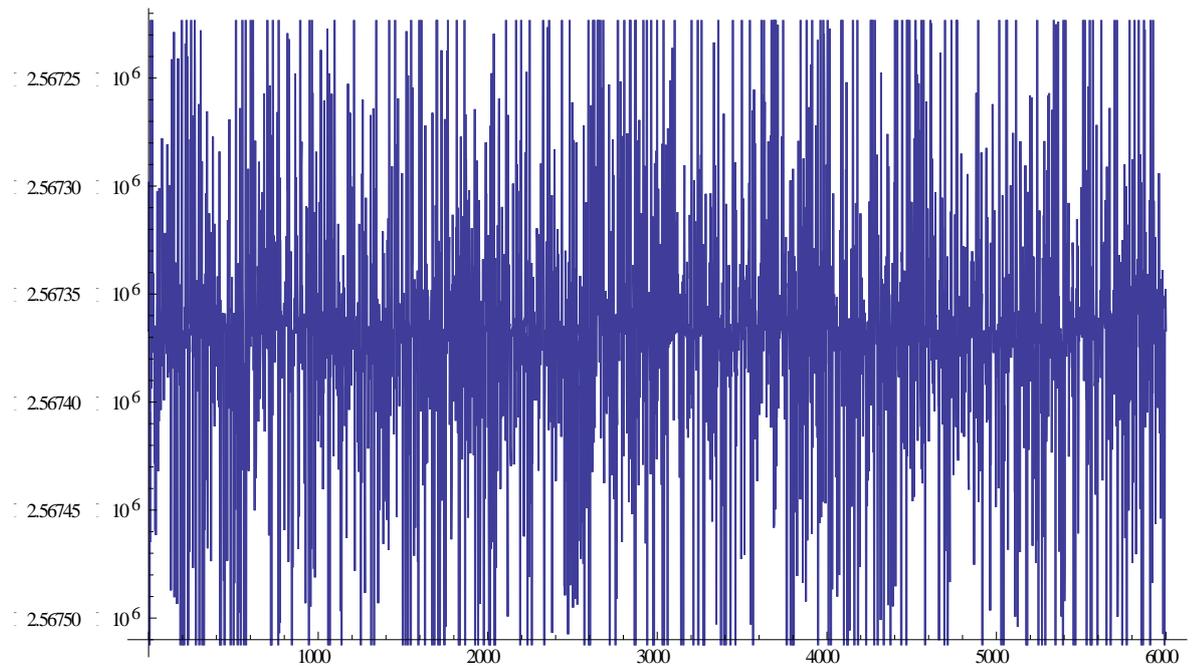


Рис. 9.1

Для проверки адекватности математической модели и точности численного интегрирования в ходе решения задач вычислялся интеграл энергии, как первый интеграл дифференциальных уравнений (7.1). На рис. 9.2 приведена зависимость полной механической энергии от времени для случая  $K=2$ .



*Рис. 9.2*

Среднее численное значение интеграла энергии  $-2567375$ , а отклонения по модулю не превышают 225.

В приложении 2 приведены:

1. Траектория движения опорной точки
2. Отклонение от кругового движения
3. Зависимости реакции в стержне 1-2 от времени

## 10. Вывод

Исследовано движение механической системы, состоящей из  $4+K$  материальных точек, в плоском ньютоновском гравитационном поле. Построена математическая модель движения системы для заданных конфигураций соединения точек. Численным интегрированием системы дифференциальных уравнений установлен характер движения точек за период двух оборотов опорной точки вокруг гравитационного центра. При этом исследованы реакции стержней, соединяющих точки. Результаты представлены в виде графиков зависимостей обобщенных координат и реакций от времени и положения точек системы на орбите.

### Список литературы

1. Белецкий В. В., Гиверц М. Е., О движении пульсирующей системы в гравитационном поле. *Космические исследования*, т. 5, № 6, 1967.
2. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Издательство «Наука», 1965.
3. Донов А. Е., Теория полета гравилета. *Космические исследования*, т. 9, № 3, 1971.