

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
Д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
«__» _____ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**Математическое моделирование теплового режима горных выработок при
термошахтном способе добычи нефти**

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

01.03.03_03 Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи

Выполнил

Студент гр. 5030103/90301

В. В. Торопова

Руководитель

Доцент ВШТМиМФ, к.т.н

И. В. Курта

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Тороповой Виктории Владимировне, гр. 5030103/90301

1. Тема работы: Математическое моделирование теплового режима горных выработок при термошахтном способе добычи.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации по теме работы; параметры горных выработок; температура флюида; массовый расход воздуха.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): анализ системы уравнений для описания движения воздуха; анализ и выбор подходящего метода моделирования течения; получение решения методом конечных элементов; анализ результатов.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания 27.02.2023

Руководитель ВКР _____ И. В. Курта, доцент ВШТМиМФ, к.т.н.

8. Задание принял к исполнению 27.02.2023

Студент _____ В. В. Торопова

РЕФЕРАТ

30 страниц, 12 рисунков, 3 таблицы

ГОРНЫЕ ВЫРАБОТКИ, ТЕРМОШАХТНЫЙ МЕТОД, ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ, УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ANSYS FLUENT.

В данной работе был рассчитан установившийся тепловой режим части горной выработки при термошахтном способе добычи нефти. Исследованы основные источники тепловыделение в рабочей зоне. Разобрано, как моделируется движение воздуха. Подобран метод решения поставленной задачи. Произведен численных расчет в конечно-объемном пакете ANSYS FLUENT. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными с реального месторождения.

THE ABSTRACT

30 pages, 12 pictures, 3 tables

MINE WORKINGS, THERMAL MINING METHOD, THERMAL REGIME, NAVIER-STOKES EQUATIONS, MATHEMATICAL MODELING, ANSYS FLUENT.

In this work, the steady-state thermal regime of a part of the mine was calculated using the thermal mine method of oil production. The main sources of heat dissipation in the working area are investigated. It is analyzed how the movement of air is modeled. The method of solving the problem has been selected. Numerical calculation is made in the finite-volume package ANSYS FLUENT. The results obtained are compared with experimental data from a real field.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛО ВЫДЕЛЕНИЙ В РАБОЧИХ ЗОНАХ БУРОВЫХ ГАЛЕРЕЙ	7
1.1. Общие сведения о месторождении	7
1.2. Экспериментальное исследование распределения температуры	10
1.3. Установление основных источников тепловыделения	12
ГЛАВА 2. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА В ГОРНЫХ ВЫРАБОТКАХ	15
2.1. Система дифференциальных уравнений Навье-Стокса	15
2.2. Модели турбулентности.....	17
2.2.1. Проблема численного моделирования	17
2.2.2. Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса.....	18
2.2.3. Модель вихревой турбулентной вязкости.....	21
2.2.4. Модель $k - \varepsilon$	22
ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ В ANSYS FLUENT И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ	25
3.1. Постановка задачи	25
3.2. Построение геометрии и задание граничных условий.....	27
3.3. Анализ результатов.....	29
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	33
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	35

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование в нефтегазовой отрасли является одним из наиболее важных инструментов для оптимизации производственных процессов и принятия управленческих решений. Оно позволяет описывать и предсказывать поведение различных физических и химических процессов, происходящих на нефтегазовых месторождениях и в процессе добычи и переработки нефти и газа.

Математические модели могут быть использованы для оптимизации процессов бурения скважин, оценки запасов нефти и газа, проектирования и управления газопроводами и нефтепроводами, а также для моделирования транспортировки и хранения нефти и газа. Они также используются для прогнозирования добычи нефти и газа на месторождении, определения оптимального режима работы скважин и оптимизации расходов на добычу. Благодаря математическому моделированию нефтегазовые компании могут существенно сократить время и затраты на проектирование и запуск новых объектов, а также повысить эффективность действующих производственных процессов.

Разработка и внедрение новой технологии добычи высоковязкой нефти является довольно узкой проблемой, но и очень распространенной. Может оказаться, что в ближайшие годы это направление будет одним из основных для добычи нефти в России, поскольку легкой нефти становится все меньше.

Одной из таких технологий является добыча высоковязкой нефти термошахтным методом. Основная идея термошахтного метода заключается в том, что тепло вводится в пласт для снижения вязкости нефти и облегчения ее подъема к поверхности. Высокая температура позволяет уменьшить вязкость нефти, что делает ее более подвижной и способной протекать через пористую структуру пласта. Впоследствии нагрева пласта тепло и горячий флюид попадают в горные выработки.

Горная выработка – это искусственная полость в части земной коры, образующаяся при извлечении полезных ископаемых. Они предназначены для

транспортировки полезных ископаемых, материалов и оборудования, вентиляции, передвижения людей. Необходимо знать установившийся тепловой режим в горных выработках для создания и поддержания комфортного рабочего процесса персонала, так как при высоких температурах дышать в шахте тяжело даже в респираторах. Работать в таких условиях абсолютно невозможно. Несчастные случаи не редкость в таких условиях труда.

Формулировка проблемы

Проблемой, решаемой в данной работе, является использование численных методов для прогнозирования температуры в горной выработке при термошахтном способе добычи нефти.

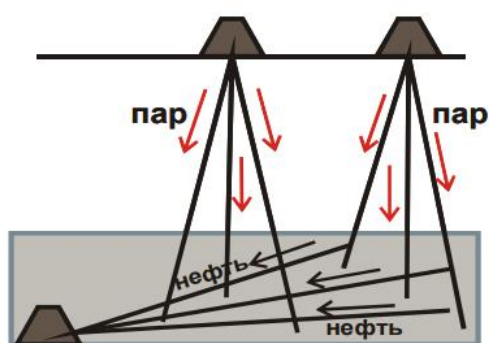
Цель:

Получить температурный массив распределения тепла в горных выработках путем моделирования в Ansys Fluent.

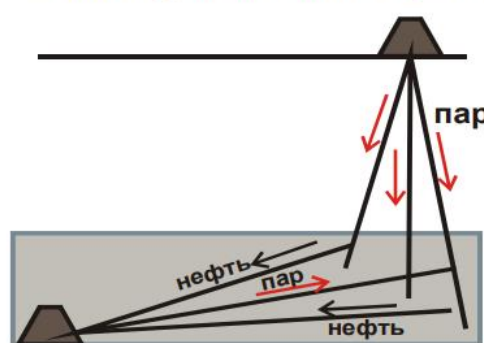
Для достижения поставленной цели были решены сформулированы следующие задачи:

1. Исследовать основные источники тепловыделения в рабочих зонах буровых галерей.
2. Выбрать наиболее подходящий метод для решения задачи.
3. Провести численный расчет.
4. Проанализировать полученные данные по температурному режиму в двух сечениях геометрии.

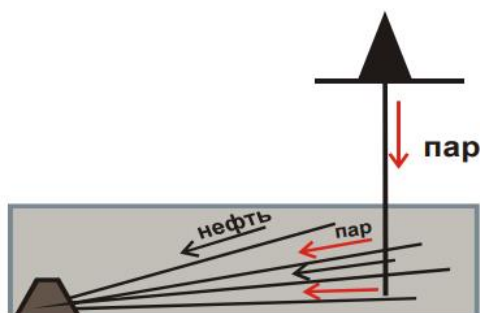
а) Двухгоризонтная система



б) Одногоризонтная система с оконтуривающими штреками



в) Подземно-поверхностная система



г) Одногоризонтная система



Рисунок 1.2 – Термошахтные технологии применяемые на Ярегском месторождении

Перечисленные технологии, используемые для воздействия пара на пласт, представляют собой различные подходы к этому процессу. Все они основываются на использовании пологонаклонных восходящих скважин, пробуренных из буровой галереи, расположенной в нижней части нефтяного пласта.

При применении двухгоризонтной системы, пар подается через ряд скважин, которые равномерно расположены по всей площади разрабатываемого участка на расстоянии примерно 20–25 м друг от друга (см. рисунок 1.2 а). Этот подход обеспечивает эффективное распределение пара по пласту и максимальное охватывание запасов нефти.

Одногоризонтная система с оконтуривающими штреками предусматривает одновременную подачу пара в пласт через наклонные скважины, пробуренные из буровой галереи, а также через скважины, пробуренные только по контуру разрабатываемого блока (рисунок 1.2 б). Этот подход позволяет создать плотный

кольцевой периметр воздействия пара, охватывающий активную зону нефтяного пласта.

В случае подземно-поверхностной системы пар подается через поверхностные скважины, пробуренные по контуру разрабатываемого блока на расстоянии приблизительно 50 м друг от друга. Плотность нагнетательных скважин, буримых с поверхности, составляет в среднем 1,6 га/скв. (рисунок 1.2 в). Этот метод имеет свои преимущества, такие как упрощенная доступность скважин для обслуживания и возможность контроля процесса закачки пара.

При одногоризонтной системы закачка пара осуществляется только через определенную часть наклонных скважин буровой галереи (см. рисунок 1.2 г). Этот подход может быть применен в случаях, когда основной интерес заключается в воздействии на конкретные участки пласта, требующие дополнительного внимания.

В итоге выбор технологии закачки пара зависит от целей разработки нефтяных месторождений, геологических особенностей пласта и доступных ресурсов. Каждая из этих систем имеет свои преимущества и ограничения, и правильный выбор обеспечит эффективное и эффективное извлечение нефти из пласта.

На Ярегском месторождении прижилось два способа закачки пара в пласт – одно-горизонтный и подземно-поверхностный [6]. В первом случае влажный пар подается через подземные горизонтальные, во втором – через поверхностные вертикальные скважины. Практикуется также их комбинация, когда пар идет с двух точек [14].

Процесс термошахтной добычи обычно включает следующие этапы:

1. Подготовка скважины: существующая добывающая скважина может быть использована для подачи пара. Однако часто требуется бурение новых скважин, которые называются нагнетательными скважинами – для подачи нагретых жидкостей, и скважин для сбора добытой нефти, которые называются продукционными скважинами.

2. Нагнетание пара: горячий пар подается в нагнетательные скважины с использованием специального оборудования. Температура пара может достигать нескольких сотен градусов. Пар проникает в пласт и начинает нагревать нефть вокруг скважины.

3. Нагрев пласта: тепло передается от нагретых жидкостей в пласт, что приводит к повышению температуры и снижению вязкости нефти. Уменьшение вязкости позволяет нефтесодержащей жидкости свободнее двигаться к добывающим скважинам.

4. Добыча нефти: под воздействием тепла и сниженной вязкости, нефть начинает двигаться к добывающим скважинам, где она транспортируется на поверхность. В некоторых случаях может потребоваться применение дополнительных методов, таких как применение насосов, чтобы обеспечить достаточное давление для подъема нефти.

Термошахтный метод добычи нефти имеет свои преимущества и недостатки. Он позволяет добывать вязкие нефти, которые трудно или невозможно добыть с использованием других методов. Однако этот метод требует значительных энергетических затрат на нагрев жидкостей и может потребовать длительного времени для достижения оптимальных результатов. Кроме того, использование термошахтного метода может привести к изменению свойств пласта и окружающей среды [2].

В целом, термошахтный метод добычи нефти является эффективным способом добычи вязких нефтей, но требует тщательного планирования, инженерных расчетов и контроля для оптимизации процесса и минимизации негативных воздействий.

1.2. Экспериментальное исследование распределения температуры

На месторождении были проведены замеры температуры в уклонном блоке №1 (см. рисунок 1.3) на разном расстоянии от вентиляционного ствола по ходу направления движения воздуха. Результаты измерений отражены в таблице 1.1.

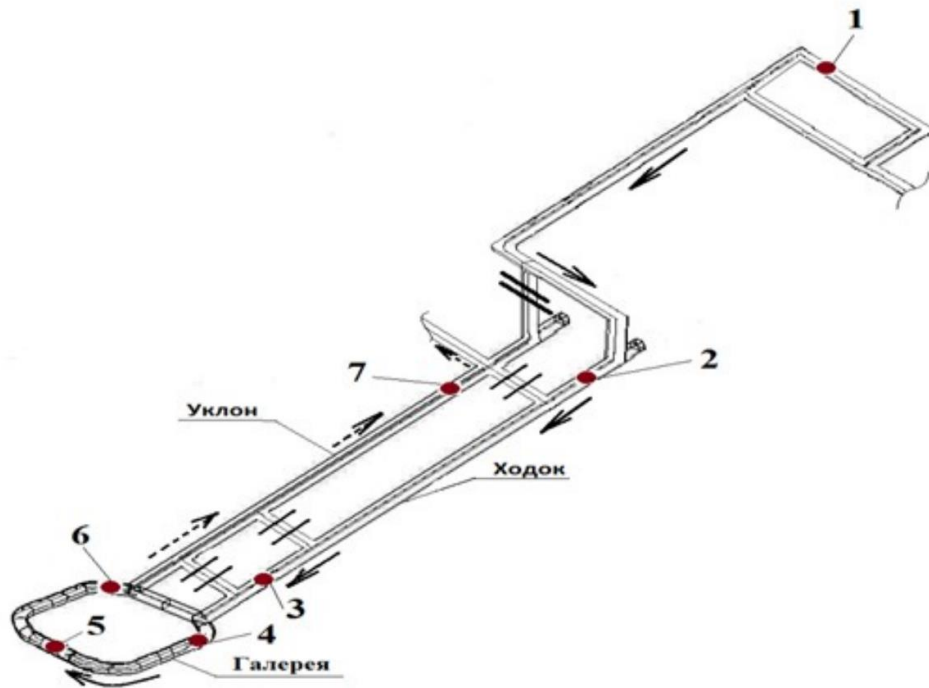


Рисунок 1.3 – Схема расположения пунктов замеров в уклонном блоке №1
1-7 – точки замеров значений температуры и влажности воздуха

Таблица 1. 1

Результаты замеров температуры и влажности воздуха в уклонном блоке № 1

Номер пункта замера	Расстояние от вентиляционного ствола, м	Температура воздуха, °С	Относительная влажность воздуха, %
1	50	10	46
2	200	13	48
3	450	23	54
4	480	28	60
5	530	32	65
6	580	44	67
7	840	45	77

Для наглядности, полученные данные представлены в виде графика (см. рисунок 1.4). Результаты эксперимента отражены синими точками, для линеаризации результатов использовался метод наименьших квадратов (МНК). Вертикальная ось – температура в горной выработке, горизонтальная ось – расстояние от вентиляционного ствола.

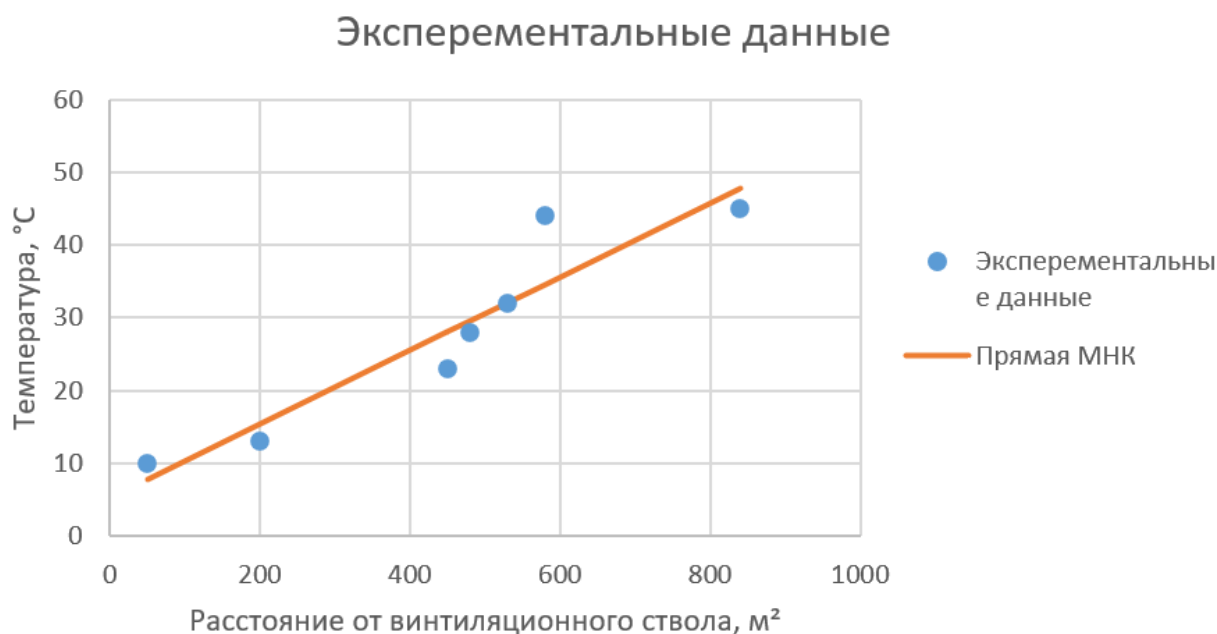


Рисунок 1.4 – Распределение температуры в уклонном блоке №1

Для определения причин формирования высоких температур необходимо установить источники тепловыделения в горных выработках.

1.3. Установление основных источников тепловыделения

Для проведения расчетов необходимо знать, что влияет на температурный режим горных выработок. Ниже рассмотрены основные источники повышения температуры рудничной атмосферы и способы уменьшения их влияния на температурных режим горных выработок

Исследуемый способ добычи нефти предполагает закачку пара в нефтесодержащий пласт. Однако, в процессе применения данного метода, приходится столкнуться с рядом трудностей.

Нередко возникают случаи выхода теплоносителя по геологическим нарушениям, что приводит к паропроявлению в горных выработках [5]. В результате этого возникает необходимость принять меры для устранения данной проблемы. Одним из способов решения данной проблемы является укрепление горного массива с целью создания защитного "экрана", который препятствует выходу пара. Для этого могут использоваться различные методы, включая укрепление горной породы и возведение дополнительного бетонного крепления,

известного как бетонная рубашка. Такие меры позволяют предотвратить утечку пара в горные выработки и обеспечить более эффективную добычу нефти.

Вследствие высоких температур, которые сопровождают данный процесс, происходит нагрев горного массива вокруг горных выработок. Это может вызывать определенные проблемы, такие как повышенные температуры в рабочей зоне и необходимость обеспечения безопасности персонала. Чтобы ограничить этот нагрев и снизить температуру в этом сегменте используются различные методы, включая теплоизоляцию горных выработок и увеличение объема подаваемого воздуха. Теплоизоляция позволяет снизить температуру окружающего горного массива и обеспечить более комфортные условия работы.

Кроме того, добываемая жидкость и пар, выходящий из эксплуатационных скважин, также могут способствовать нагреву устьевой арматуры и создавать дополнительный источник тепловыделения. Для снижения температуры арматуры в таких случаях применяются специальные теплоизоляционные материалы, такие как теплоизоляционные краски и другие покрытия. Это позволяет снизить температуры арматуры и обеспечить более безопасную и эффективную эксплуатацию.

Важным аспектом добычи нефти термошахтным способом является транспортировка горячей нефтесодержащей жидкости открытым способом через канавки, проложенные в нижней части выработки [11]. Температура добываемого флюида вполне может достигать величины в 80–90 °С. Высокая температура добываемого флюида может вызывать интенсивное выделение водяного пара и теплоты в атмосферу горной выработки. Это представляет дополнительные проблемы с точки зрения эффективности и безопасности добычи. Поэтому, для снижения негативного воздействия высокой температуры, применяются различные меры, например системы охлаждения или использование теплоизоляционных материалов для снижения теплотерь [13].

В работе [12] Клюкиним Ю.А. предложена схема источников тепловыделений в горной выработке, представленная на рисунке 1.5, где $Q_{\text{массив}}$ —

тепловыделения от стенки выработки; $Q_{нсж}$ – тепловыделения от добываемой нефтесодержащей жидкости; $Q_{скважин}$ – тепловыделения от арматуры скважин.

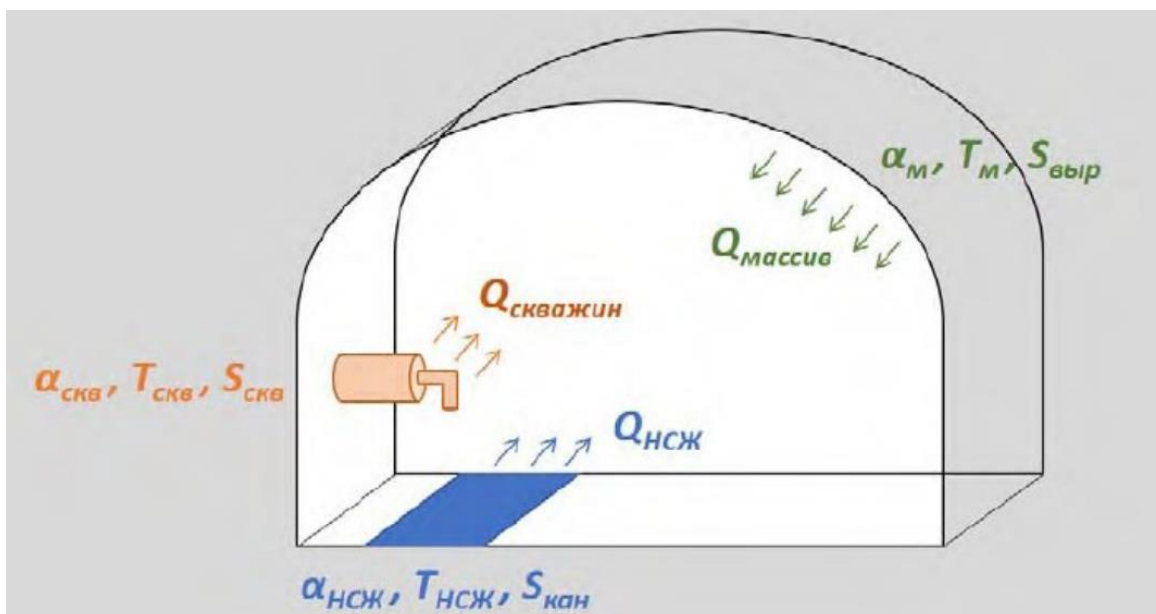


Рисунок 1.5 – Схема источников тепловыделений

Транспортировка нефтесодержащей продукции открытым способом оказывает наибольшее влияние на температурный режим горных выработок. В данной работе пренебрегаем другими источниками тепловыделения, так как они в меньшей степени влияют на температурный режим.

В целом, в процессе добычи нефти с использованием способа закачки пара, необходимо учитывать различные аспекты, связанные с высокими температурами и потенциальными проблемами, такими как паропроявления и тепловые нагрузки [3]. Применение соответствующих технических решений и технологий, включая укрепление горного массива, теплоизоляцию и другие методы, позволяет эффективно контролировать и снижать влияние высоких температур на процесс добычи нефти.

ГЛАВА 2. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА В ГОРНЫХ ВЫРАБОТКАХ

2.1. Система дифференциальных уравнений Навье-Стокса

Система уравнений Навье-Стокса играет важную роль при анализе термошахтного метода добычи нефти, поскольку она описывает движение флюида и тепловые процессы в пласте. Система уравнений Навье-Стокса является набором дифференциальных уравнений, которые учитывают сохранение массы, импульса и энергии в жидкости и газе. В этом случае газ должен подчиняться следующему закону [9]:

$$\tau = \mu \left(e_y \frac{\partial}{\partial y} \right) U = \mu \frac{\partial U_y}{\partial y} \quad (2.1)$$

где τ – касательное напряжение, вызываемое жидкостью, μ – динамическая вязкость, $\frac{\partial U_y}{\partial y}$ – производная скорости по направлению, перпендикулярном направлению сдвига.

Система уравнений Навье-Стокса состоит из уравнений:

1) Уравнение баланса количества движения:

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U U) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho g \quad (2.2)$$

где ∇ – градиент функции, ρ – плотность, p – давление, τ – тензор девиаторных напряжений:

$$\tau = \mu \left(\nabla U + (\nabla U)^T - \frac{2}{3} E(\nabla \cdot U) \right) \quad (2.3)$$

2) Уравнение баланса массы (или уравнение неразрывности):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (2.4)$$

3) Уравнение баланса энергии:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (U(\rho E + p)) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\tau \cdot U) \quad (2.5)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, E – полная энергия, которая определяется как:

$$E = h - \frac{p}{\rho} + \frac{U \cdot U}{2} \quad (2.6)$$

где h – энтальпия, которая определяется через уравнение состояния реального газа:

$$dh = c_p dT \quad (2.7)$$

Учитывая соотношения для тензора девиаторных напряжений (2.3), уравнение баланса энергии (2.5) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (U(\rho E + p)) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla U + (\nabla U)^T - \frac{2}{3} E(\nabla \cdot U) \right) \cdot U \right) \quad (2.8)$$

Объединив уравнения (2.2), (2.4), (2.6), (2.7), (2.8), получаем итоговую систему уравнений Навье-Стокса, описывающую движение флюида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U U) = -\nabla p + \nabla \cdot \mu \left(\nabla U + (\nabla U)^T - \frac{2}{3} E(\nabla \cdot U) \right) + \rho g \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (U(\rho E + p)) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot \left(\mu \left(\nabla U + (\nabla U)^T - \frac{2}{3} E(\nabla \cdot U) \right) \cdot U \right) \\ E = h - \frac{p}{\rho} + \frac{U \cdot U}{2} \\ dh = c_p dT \end{array} \right.$$

В дальнейшем будет удобнее пользоваться покомпонентной записью, которая представлена ниже:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_k)}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) \right) + \rho g_i \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j(\rho E + p)) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \right) U_i \right) \\ E = h - \frac{p}{\rho} + \frac{U_k U_k}{2} \\ dh = c_p dT \end{array} \right.$$

В полученной системе 7 скалярных уравнений и, соответственно, 7 скалярных неизвестных величин: 3 компоненты скорости, температура, давление, полная энергия, энтальпия. Остальные величины, такие как плотность, динамическая вязкость, коэффициент теплопроводности, теплоемкость при постоянном давлении, известны и зависят от температуры и давления.

2.2. Модели турбулентности

2.2.1. Проблема численного моделирования

Система дифференциальных уравнений Навье-Стокса является одним из наиболее сложных и фундаментальных математических описаний турбулентного движения жидкости или газа. В теории она может быть решена с помощью прямого численного моделирования, однако на практике это может потребовать огромных вычислительных ресурсов и значительного времени. В этом случае возможностей электронных вычислительных машин может оказаться недостаточно.

Одной из главных проблем при решении системы Навье-Стокса является необходимость использования очень мелкой сетки для описания даже самых малых вихрей. Каждый такой вихрь требует большого числа узлов и элементов, что приводит к необходимости хранить огромные объемы данных в памяти и выполнять сложные вычисления на каждой итерации. С ростом числа Рейнольдса, которое характеризует отношение инерционных и вязких сил в системе, вычислительные затраты увеличиваются экспоненциально, делая задачу еще более сложной.

Для преодоления этих ограничений разработано множество методов и подходов, направленных на эффективное решение системы Навье-Стокса. В частности, применяются техники снижения размерности, приближенные методы решения, параллельные вычисления и использование специализированного аппаратного обеспечения. Однако, несмотря на все усилия, решение полной системы Навье-Стокса для сложных реалистичных задач остается существенным вызовом в настоящее время.

В таблице 2.1. приведены результаты эксперимента по исследованию потока в канале, сделанные Лауфером в 1951 году [15]:

Таблица 2.1

Зависимость временных шагов и числа узлов от числа Рейнольдса

Re	Число узлов	Число временных шагов
$1,23 \cdot 10^4$	$6,7 \cdot 10^6$	32000
$3,08 \cdot 10^4$	$4,0 \cdot 10^7$	47000
$6,16 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^8$	63000
$2,30 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^9$	114000

Из результатов данного эксперимента можно заметить, что даже для минимально рассмотренного числа Рейнольдса необходимо большое число узлов и временных затрат. В результате были созданы различные подходы к решению системы уравнений Навье-Стокса, которые основаны на эмпирических фактах и теории (из-за этого их называют полуэмпирическими методами). В основе этих методов лежит усреднение по времени.

2.2.2. Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса

Решение осредненных уравнений Навье-Стокса позволяет получить статистическую информацию о средних характеристиках турбулентного потока, таких как средние значения скорости, давления и других параметров. Эти результаты позволяют лучше понять особенности турбулентного движения и разрабатывать более эффективные методы моделирования и управления турбулентными потоками в различных приложениях, включая аэродинамику, гидродинамику и инженерные процессы.

Основная идея осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса заключается в применении статистического подхода для описания турбулентных потоков. Турбулентные потоки характеризуются хаотическими, нелинейными движениями, которые вызывают сложные взаимодействия между различными масштабами и компонентами потока.

Полные уравнения Навье-Стокса описывают физические процессы в потоке и включают нелинейные конвективные члены, зависящие от локальных значений скорости потока. Однако точное решение этих уравнений для турбулентных потоков является вычислительно сложной задачей из-за высокой степени нелинейности и неопределенности.

Для упрощения анализа и моделирования турбулентных потоков применяется осреднение по Рейнольдсу. Осреднение по Рейнольдсу заключается в разделении переменных на среднюю составляющую и флуктуации. Средняя составляющая представляет собой среднее значение переменной во времени или пространстве, в то время как флуктуации представляют отклонения от среднего значения.

Применение осреднения по Рейнольдсу позволяет усреднить нелинейные конвективные члены в уравнениях Навье-Стокса, заменяя их суммой средних значений и флуктуаций [7]. Такое приближение снижает степень нелинейности уравнений и упрощает их решение.

$$U_k = \bar{U}_k + u_k \quad (2.9)$$

где u_k – флуктуационная часть скорости, \bar{U}_k – средняя скорость потока (усредненная по времени), которую можно выразить как:

$$\bar{U}_k = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} U_k dt \quad (2.10)$$

Полученное усреднение также применяется и к другим скалярным величинам, таким как: давление, температура, полная энергия, компоненты тензора напряжений.

Применяя описанный выше подход к системе уравнений Навье-Стокса, получаем их новый вид в терминах осредненных величин:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_k)}{\partial x_k} = 0 \\ \frac{\partial(\rho \bar{U}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_j \bar{U}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_k} \right) - \rho \bar{u}_j \bar{u}_i \right) + \rho g_i \\ \frac{\partial(\rho \bar{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{U}_j (\rho \bar{E} + \bar{p})) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \rho \bar{u}_j \bar{E} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_k} \right) \bar{U}_i - \rho \bar{u}_j \bar{u}_i \right) \\ \bar{E} = \bar{h} - \frac{\bar{p}}{\rho} + \frac{\bar{U}_k^2}{2} \\ d\bar{h} = c_p d\bar{T} \end{array} \right.$$

где $\rho \bar{u}_j \bar{u}_i$ – Рейнольдсовы напряжения, $\rho \bar{u}_j \bar{E}$ – Рейнольдсовый поток. Эти две составляющие подвергаются определению через эмпирические соотношения, чтобы получить замкнутую систему уравнений.

Рейнольдсовый поток моделируется на основе вихревой диффузии:

$$\rho \bar{u}_j \bar{E} = -\frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = -\lambda_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \quad (2.11)$$

где μ_t – турбулентная вязкость, также определяется из эмпирических соотношений, Pr_t – турбулентное число Прандтля, λ_t – турбулентный коэффициент теплопроводности.

Подставляя соотношение для Рейнольдсова потока (2.11) в уравнение баланса энергии из системы уравнений Навье-Стокса (2.8), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{U}_j (\rho \bar{E} + \bar{p})) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_{eff} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_k} - \rho \bar{u}_j \bar{u}_i \right) \bar{U}_i \right) \quad (2.12)$$

где $\lambda_{eff} = \lambda + \lambda_t$ – эффективный коэффициент теплопроводности, который учитывает теплопроводность материала и теплопроводность вследствие турбулентности.

Что касается Рейнольдсова напряжения, то этот член требует дополнительного моделирования, чтобы замкнуть систему уравнений Навье-Стокса [8]. Это и привело к созданию множества различных моделей турбулентности.

2.2.3. Модель вихревой турбулентной вязкости

Был рассмотрен один из основных подходов к моделированию турбулентных сдвиговых напряжений - модель вихревой турбулентной вязкости. Эта модель основана на гипотезе Буссинеска, которая предполагает, что Рейнольдсовы напряжения пропорциональны градиентам скорости, возникающим в потоке (2.13).

Путем учета вихревой турбулентной вязкости мы можем получить более точные результаты и лучше понять физические процессы, происходящие внутри потока. Вихревая турбулентная вязкость играет важную роль в прогнозировании и анализе турбулентных потоков, и ее использование является неотъемлемой частью современных моделей турбулентности.

Она позволяет учесть сложную природу турбулентного перемешивания и влияние вихревых структур на течение, что способствует более полному описанию и моделированию турбулентных явлений. Таким образом, модель вихревой турбулентной вязкости является эффективным инструментом для исследования и прогнозирования турбулентных потоков в различных областях применения, таких как аэродинамика, гидродинамика и инженерия.

Использование этой модели позволяет улучшить точность прогнозирования и смоделировать сложные турбулентные явления с высокой достоверностью. Благодаря гипотезе Буссинеска и включению вихревой турбулентной вязкости в модели, мы можем более глубоко исследовать поведение турбулентных потоков и их взаимодействие с окружающей средой.

Таким образом, модель вихревой турбулентной вязкости является ценным инструментом для научных и инженерных исследований, способствуя разработке более эффективных технологий и оптимизации процессов в различных областях применения. Она предоставляет возможность более точно анализировать и предсказывать турбулентные потоки, что является важным вкладом в развитие турбулентности и ее приложений.

$$-\overline{\rho u_j u_i} = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k \quad (2.12)$$

где k – турбулентная кинетическая энергия, μ_t – турбулентная динамическая вязкость, которая все еще подлежит моделированию. В исследованиях предполагается, что турбулентная динамическая вязкость является изотропной величиной, что, к сожалению, является недостатком данной модели. Тем не менее, стоит отметить, что если в потоке преобладает только одна компонента турбулентных сдвиговых напряжений, то данное предположение становится более обоснованным и достойным внимания. Например, в случае пристенных потоков данное утверждение является особенно верным и учитывается при проведении соответствующих исследований.

Учитывая соотношение для уравнений баланса (2.12) и уравнение (2.13), получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho\bar{U}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{U}_j\bar{U}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{eff} \left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\bar{U}_k}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho k \right) + \rho g_i \\ \frac{\partial(\rho\bar{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{U}_j(\rho\bar{E} + \bar{p})) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_{eff} \frac{\partial\bar{T}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu_{eff} \left(\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\bar{U}_k}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho k \right) \bar{U}_i \right) \end{array} \right.$$

где $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$ – эффективный коэффициент динамической вязкости.

Гипотеза Буссинеска является фундаментальной основой для разработки моделей, позволяющих описать турбулентные явления в различных приложениях и системах. На основе этой гипотезы построена часть моделей турбулентности: $k - \varepsilon$, $k - \omega$, $BSL k - \omega$, SST (*shear stress transport*), которые позволяют определить неизвестный параметр μ_t . В дальнейших расчетах будет использована модель $k - \varepsilon$, поскольку эта модель хорошо показала себя в аналогичных задачах.

2.2.4. Модель $k - \varepsilon$

Модель $k - \varepsilon$ турбулентности является одной из самых популярных моделей, применяемых в инженерных расчетах для анализа турбулентных потоков [1]. Она основана на уравнении Колмогорова-Смита, которое описывает транспорт энергии в турбулентном потоке. Данная модель позволяет получить дополнительные уравнения, которые описывают кинетическую энергию турбулентности (k) и ее убывание (ε). Эти дополнительные переменные играют

важную роль в определении скорости распределения энергии и ее диссипации в потоке.

Кинетическая энергия турбулентности представляет собой меру количества энергии, связанной с турбулентными движениями в потоке. Ее убывание характеризует процесс диссипации энергии, когда турбулентные движения преобразуются в тепловую энергию. Модель $k - \varepsilon$ турбулентности учитывает эти аспекты и предоставляет инженерам полезный инструмент для прогнозирования поведения турбулентных потоков.

Выразим коэффициент турбулентной вязкости μ_t по формуле Колмогорова-Прандтля через кинетическую энергию турбулентности:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.13)$$

Уравнение переноса турбулентной кинетической энергии и скорости ее диссипации, полученные из уравнений Навье-Стокса (2.12), имеют вид:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho V k) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + \mu_t G - \rho \varepsilon \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla(\rho V \varepsilon) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_t G - C_2 f_1 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.15)$$

где C_1 , C_2 , C_μ – константы, σ_k и σ_ε – турбулентные числа для k и ε .

$$G = D_i \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

$$D_{ij} = S_{ij} - \frac{2}{3} \left(\nabla \cdot V + \frac{\rho k}{\mu_t} \right) \delta_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial k_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

В расчетных пакетах используются следующие значения данных для констант и турбулентных чисел: $\sigma_k = 1,0$; $\sigma_\varepsilon = 1,3$; $C_\mu = 0,09$; $C_1 = 1,44$; $C_2 = 1,92$.

Одним из преимуществ модели $k - \varepsilon$ турбулентности является ее относительная простота и низкие вычислительные требования по сравнению с

более сложными моделями турбулентности. Это делает ее широко применимой в инженерной практике, где эффективность и точность расчетов являются ключевыми факторами. Таким образом, модель к-эпсилон турбулентности является мощным инструментом для анализа и прогнозирования турбулентных потоков, что позволяет инженерам и научным исследователям получать ценные данные и результаты при проектировании и анализе различных инженерных систем и процессов.

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ В ANSYS FLUENT И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Процесс численного моделирования был проведен при помощи пакета программного обеспечения ANSYS Fluent. Важно отметить, что ANSYS Fluent занимает важное место в области моделирования вычислительной гидродинамики. Это программное обеспечение пользуется огромным спросом и доверием специалистов благодаря своим обширным возможностям. Оно является инструментом, обладающим способностью имитировать различные физические процессы. Эти процессы включают в себя, но не ограничиваются течением жидкости - ключевым элементом гидродинамики. Но это не все: программа также способна моделировать явления теплопередачи, даже сложные химические реакции и процессы горения [10].

Программное обеспечение оснащено удобным и интуитивно понятным интерфейсом, который сделан так, чтобы упростить работу пользователя и сделать процесс моделирования более эффективным. Помимо этого, ANSYS Fluent предлагает широкий спектр возможностей моделирования. От базовых, которые подойдут для начинающих пользователей, до продвинутых, которые позволят более опытным пользователям расширить границы своих исследований и достичь новых высот в своей работе. Таким образом, ANSYS Fluent удовлетворяет потребности широкого круга пользователей и помогает им в достижении их научных и инженерных целей.

3.1. Постановка задачи

В рамках данной работы необходимо рассчитать температурный режим горной выработки при заданных начальных и граничных условиях.

Даны геометрические данные части горной выработки, которые представлены в таблице 3.1.

Геометрические параметры горной выработки

Длина	50 м
Высота	3 м
Ширина	4 м
Глубина канавки	0,5 м
Расстояние от стенки до канавки	4 мм

В качестве граничных условий в данной задаче заданы: температура стенок горной выработки $T_c = 40^\circ\text{C}$, температура канавки $T_k = 80^\circ\text{C}$, температура воздуха $T_b = 28^\circ\text{C}$, ускорение свободного падения $g = -9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Также задан массовый расход воздуха в горной выработке 1,1 кг/с.

Рассматриваемый флюид – воздух – имеет параметры:

$$\rho = 1,225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\mu = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$$

$$C_p = 1006,43 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

$$\lambda = 0,0242 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

Стенки горной выработки сделаны из бетона, который имеет параметры:

$$\rho = 2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$C_p = 880 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

$$\lambda = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

где ρ – плотность, μ – коэффициент кинематической вязкости, C_p – теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности.

3.2. Построение геометрии и задание граничных условий

Первым делом необходимо построить геометрию, по которой будет производиться расчет. Расчетной областью является участок горной выработки с площадью поперечного сечения 11 м^2 , на подошве которой проложена открытая система транспортировки нефтесодержащей продукции – канавка с полукруглым диаметром сечения – $0,5 \text{ м}$. Геометрические параметры горной выработки взяты из таблицы 3.1. Геометрия, построенная в модуле Design Modeler, представлена на рисунке 3.1.

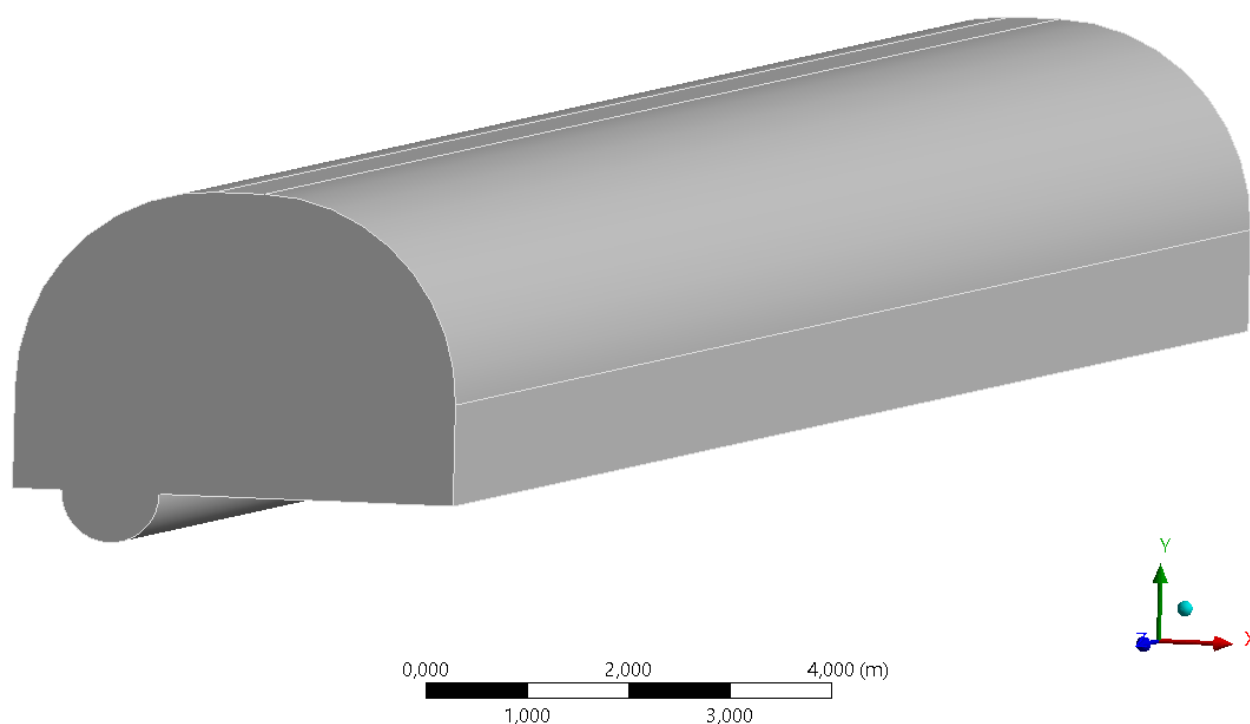


Рисунок 3.1 – Исходная геометрия

В модуле Mesh была построена стандартная сетка с размером элементов 200 мм и созданы Named Selection на нужные участки геометрии – стенки горной выработки, стенки канавки и торцы геометрии, которые используются при задании граничных условий.

Для задания граничных условий и методов решения необходимо перейти в модуль Fluent. В этом же модуле будут задаваться настройки для решателя, а также производиться подготовка к решению и решение поставленной задачи [4].

Граничное условие «стенка»: условие прилипания (касательная составляющая скорости на границе равно нулю), условие непроницаемости (нормальная составляющая скорости на границе равна нулю), температура стенок горных выработок – 40 °С, температура канавки – 80 °С.

Граничное условие «вход»: задание массового расхода на входе «Mass Flow Inlet», где расход воздуха – 1,1 кг/с, температура входящего потока – 28 °С (см. рисунок 3.2).

Граничное условие «выход»: в одном случае рассматривается полностью проветриваемый участок горной выработки – условие Pressure Inlet. Данное условие предполагает беспрепятственный выход воздуха (см. рисунок 3.3).

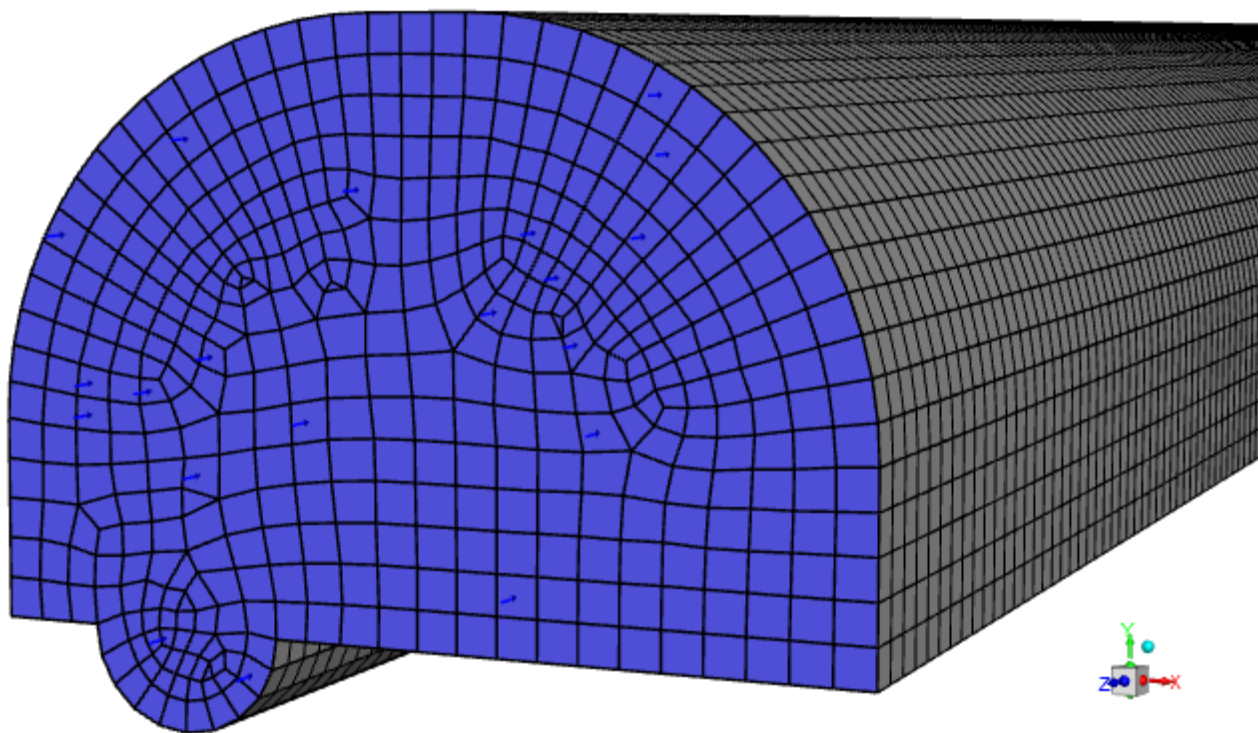


Рисунок 3.2 – Граничное условие «Вход»

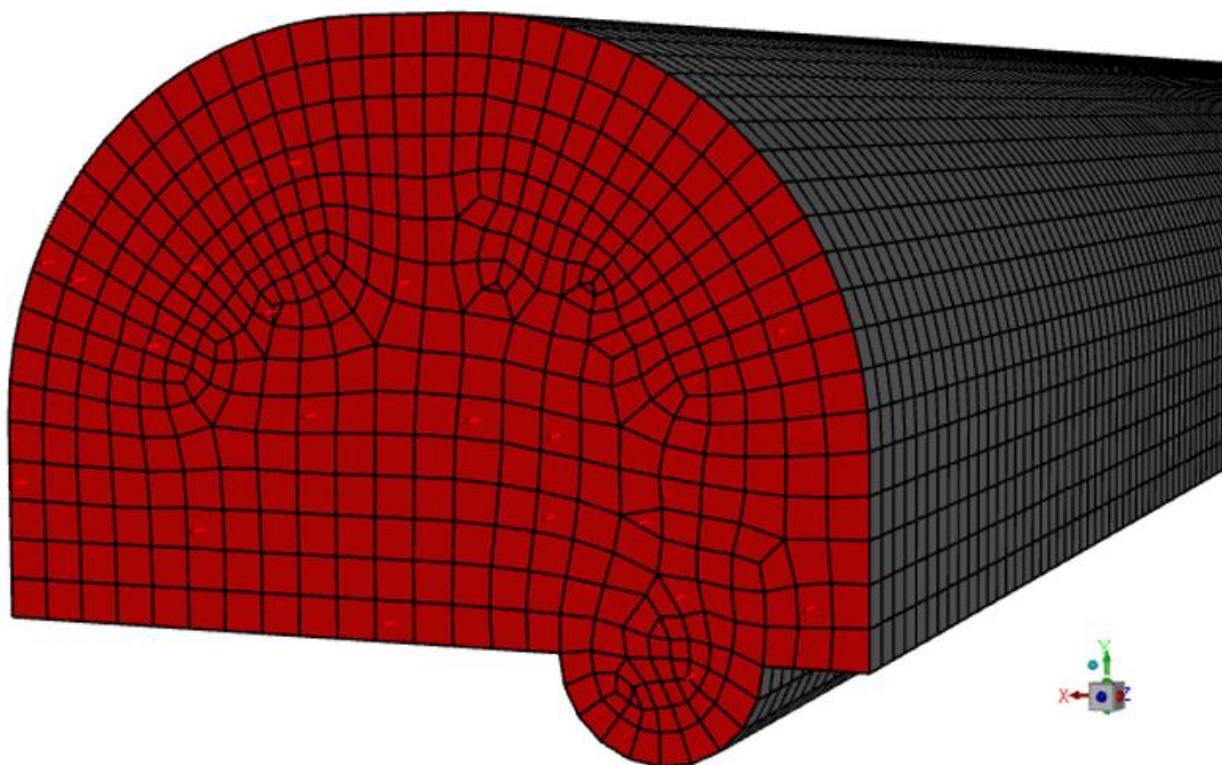


Рисунок 3.3 – Граничное условие "Выход"

При решении поставленной задачи использована трехмерная стационарная постановка. Для такого рода термических задач необходимо включать в учет уравнение энергии и гравитацию. В качестве метода для излучения нагретых тел используется модель дискретных ординат переноса энергии. При моделировании турбулентности используется модель $k - \varepsilon$, которая описана в пункте 2.2.4.

3.3. Анализ результатов

В результате вычислений получены результаты температурного распределения в продольном и поперечном сечении горной выработки.

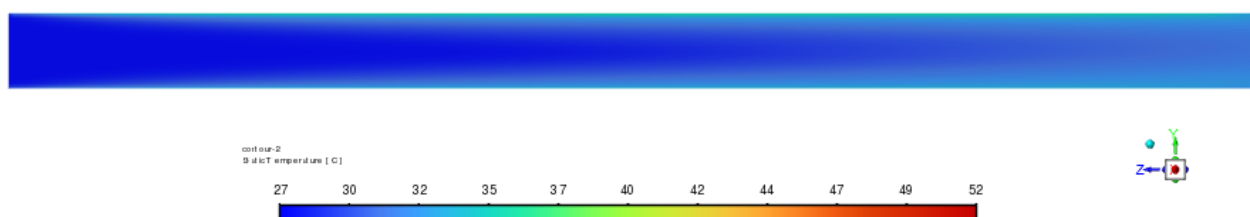


Рисунок 3.4 – Поле температур в плоскости $X = 2,5$ м

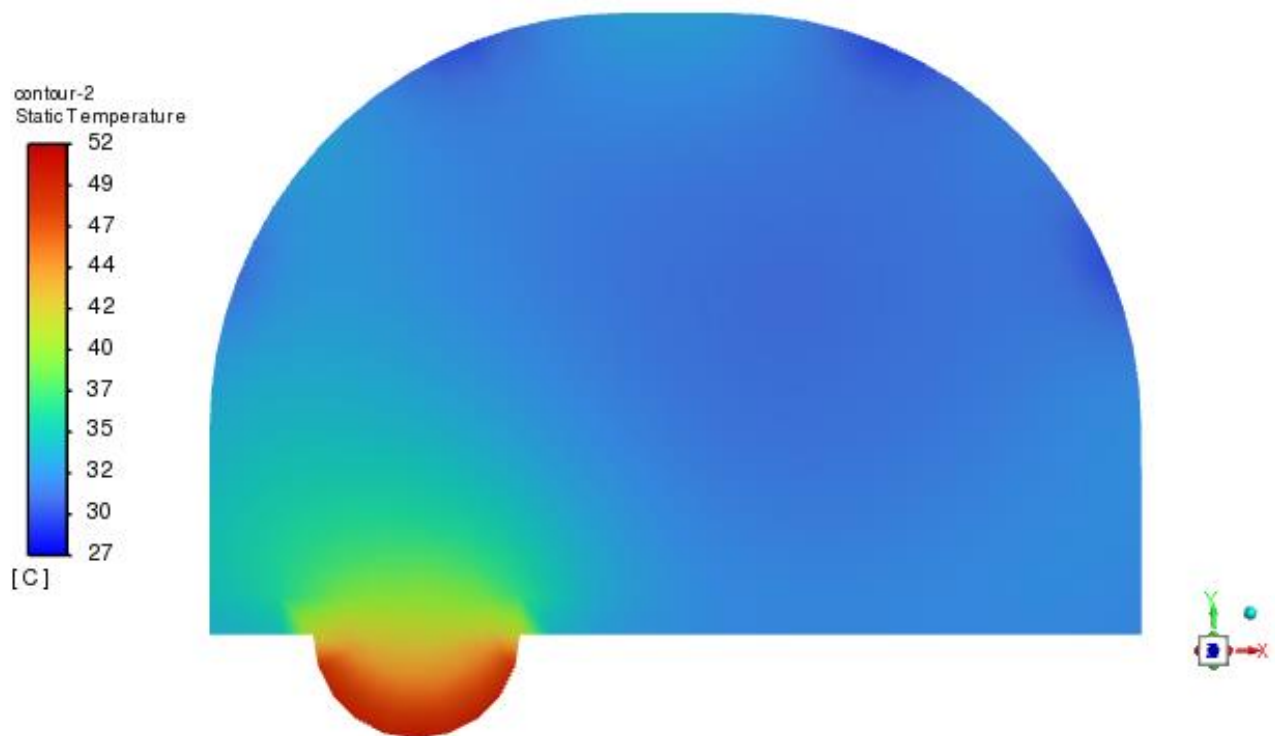


Рисунок 3.5 – Поле температур в плоскости $Z = 50$ м

Температура в горной выработке повышается при увеличении ее длины (см. рисунок 3.4), тем самым в конце исследуемой геометрии – при $Z = 50$ м – температура максимальна, что соответствует экспериментальным данным (пункт 1.2.).

Также можно заметить, что максимальная температура находится в канавке горной выработки, ведь там транспортируется открытым способом нефтесодержащая жидкость. Из канавки происходит тепловыделение в горную выработку (см. рисунок 3.5).

Численное решение можно представить в виде графика, который отображает температуру в центре расчетной геометрии. Полученные данные были сравнены с экспериментальными данными из пункта 1.2. Результаты сравнения представлены в виде графика на рисунке 3.6.

Сравнение результатов численного решения с экспериментальными данными

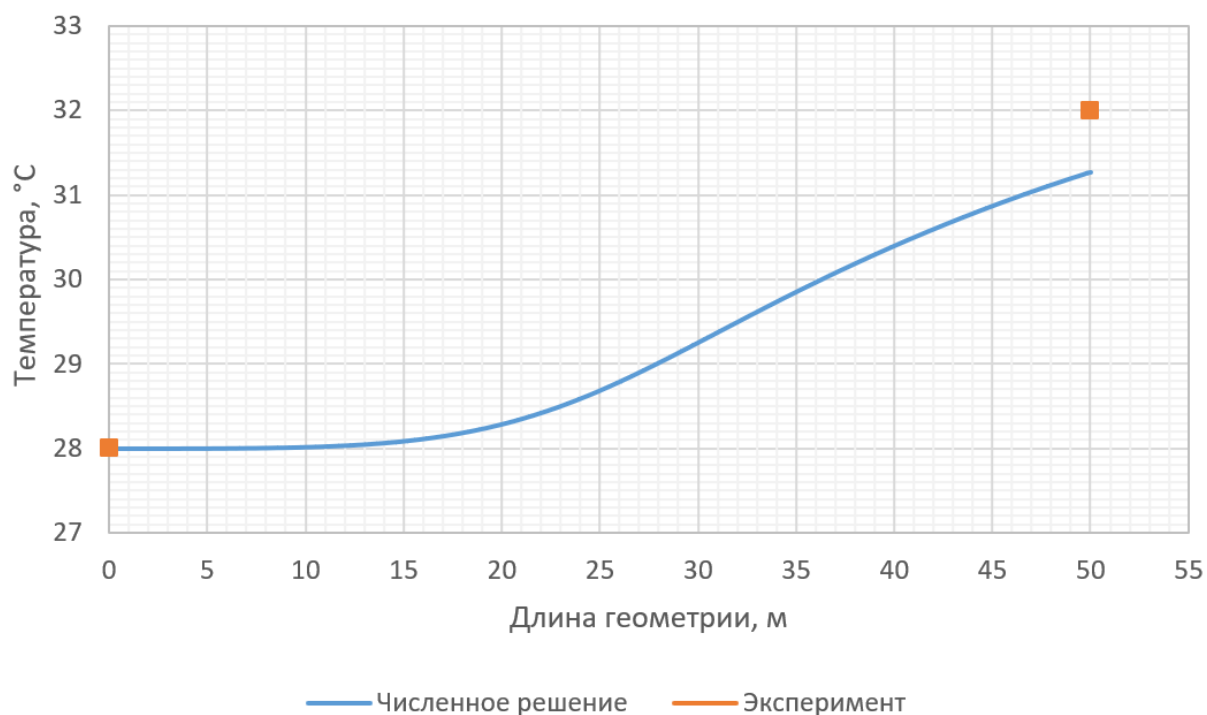


Рисунок 3.6 – Сравнение численных результатов с экспериментальными данными

Для сравнения были взяты замеры 4–5 точек уклонного блока №1 (таблица 1.1). Из результатов сравнения можно заметить, что температура в конечной точке отличается на $\delta = 2,34\%$. Стоит отметить, что в данном расчете не учитывается тепловыделение от арматуры скважины, а также, что в экспериментальных данных все значения температуры округлены до целого числа. Из этого следует, что данный метод можно использовать для прогнозирования температур вдоль линии, проходящей через центр шахты.

Для уменьшения температуры в горной выработке был рассмотрен расчет при закрытой системе транспортировки нефтесодержащей жидкости в буровой галерее, что изменит одно из граничных условий – температуру поверхности канавки и покажет результат в виде снижения температуры в моделируемой горной выработке. Ниже представлен график, который показывает изменение температуры выработки при использовании теплоизоляции (см. рисунок 3.7).

Изменение температуры воздуха рабочей зоны

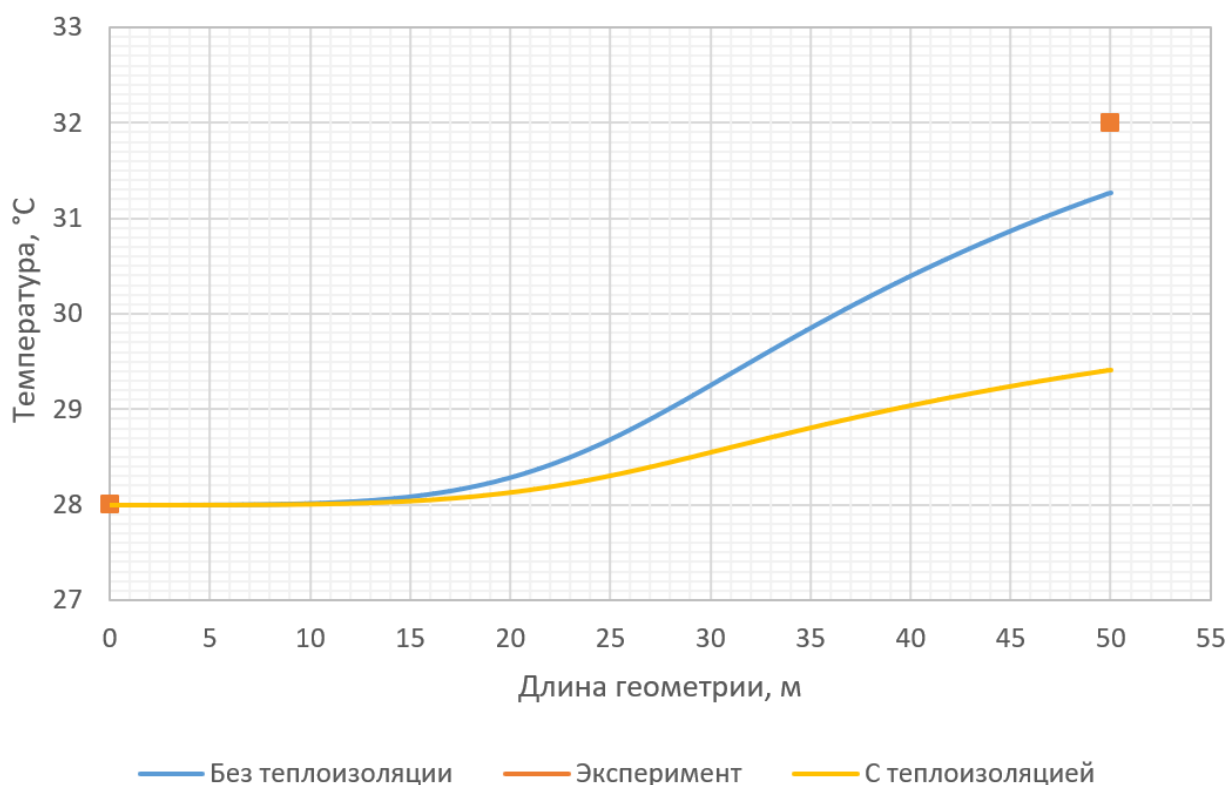


Рисунок 3.7 – Изменение температуры воздуха рабочей зоны

Из результатов вычисления можно заметить, что теплоизоляция открытой системы транспортировки нефтесодержащей жидкости приводит к значительному уменьшению температуры, что позволит улучшить условия труда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы были выполнены все поставленные цели задачи, а именно:

1. Исследованы основные источники тепловыделения в горной выработке. В результате чего сделан вывод, что наибольшее влияние на повышение температуры вносят нагретые стенки горной выработки, а главное – канавка, по которой открытым способом транспортируется нефтесодержащая жидкость.

2. Выбран наиболее подходящий метод для решения задачи. Для моделирования турбулентного течения использована модель $k - \varepsilon$. Преимуществом этой модели является относительная простота и низкие вычислительные требования по сравнению с более сложными моделями турбулентности.

3. Выполнена постановка задачи и проведен численный расчет установившегося температурного режима внутри горных выработок в пакете ANSYS Fluent.

4. Полученные численные результаты были проанализированы и сравнены с результатами экспериментов, проведенных на самом месторождении. Сравнение данных позволило оценить точность и надежность метода расчетов.

Исследование показало, что погрешность вычислений составила всего 2%. Такая небольшая погрешность подтверждает точность метода в сравнении с реальными замерами температуры на рассматриваемом участке месторождения. Таким образом, результаты исследования подтверждают, что данный метод расчетов является надежным и может быть успешно применен для прогнозирования температурного режима горных выработок.

Полученный метод численного решения позволит более эффективно планировать и регулировать температурные показатели в подземных сооружениях, минимизируя потенциальные риски и оптимизируя использование ресурсов. Понижив температуру в горной выработке до установленной нормы с

помощью теплоизоляции, улучшатся условия труда в горной выработке. Это в свою очередь означает, что повысится эффективность добычи на месторождении, ведь люди начнут чувствовать себя комфортнее.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авраменко, М. И. О k - ϵ модели турбулентности. — 2-е изд., перераб. и дополн. — Снежинск: Изд-во РФЯЦ — ВНИИТФ, 2010. — 102 с.
2. Дядькин, Ю.Д. Основы горной теплофизики для шахт и рудников Севера / Ю.Д Дядькин. – Недра, 1968.–256 с.
3. Дядькин, Ю.Д. Горная теплофизика. Регулирование теплового режима шахт и рудников / Ю.Д. Дядькин, Ю. В. Шувалов, Ю.С. Тимофеевский. – Ленинград: ЛГИ, 1976.–159 с.
4. Зиганшин А.М. Вычислительная гидродинамика. Постановка и решение задач в процессоре Fluent: Методическое пособие для учебной и научной работы студентов направления 270800 – «Строительство» (квалификация «бакалавр» и «магистр») и аспирантов специальности 05.23.03 – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2013. – 79 с.
5. Карабутов С.В. Термодинамический анализ термошахтной добычи месторождений нефти и газа. - М.: Изд-во МЭИ, 2009.
6. Коноплев, Ю.П. Термошахтная разработка нефтяных месторождений / Ю. П. Коноплев. – Москва: Недра, 2006. – 288 с. (в способ добычи на месторождении)
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10т. Т.6. Гидродинамика / Наука. –1986. – с. 249
8. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа: моногр. / Л.Г. Лойцянский. - Москва: ИЛ, 2003. - 225 с
9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 618 с
10. "ANSYS Fluent Theory Guide". ANSYS, Inc. Release 2020 R1 Southpointe 2600 ANSYS Drive Canonsburg, PA 15317
11. Клюкин, Ю.А. Исследование влияния способа транспортировки нефтесодержащей жидкости на микроклиматические условия в нефтяной шахте / Ю.А. Клюкин, М. А. Семин, Л. Ю. Левин // Материалы X Всероссийской

научно-технической конференции "Проблемы разработки месторождений углеводородных и рудных полезных ископаемых». – 2017. – С. 371–373.

12. Клюкин Ю.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса в уклонных блоках нефтяных шахт // Стратегия и процессы освоения георесурсов: сборник научных трудов. Вып. 15 / ГИ УрО РАН. – Пермь, 2017. – С. 305–310.

13. Круглов, Ю.В. Варианты применения закрытой системы сбора нефти, работающей в автоматическом режиме, в нефтяных шахтах / Ю. В. Круглов // Стратегия и процессы освоения георесурсов: сб. науч. тр.– 2017.– Вып. 15 – С. 329-332.

14. Морозюк, О.А. Пути повышения эффективности термошахтной разработки залежей аномально вязкой нефти (на примере Ярегского месторождения): дис. канд. техн. наук. Ухта, 2011.– 136 с.

15. LAUFER, J. 1951 Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel. NASA Rep. 1053