

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ,

д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

\_\_\_\_\_ А. М. Кривцов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

**Моделирование декантирующей центрифуги методами конечных  
элементов и динамики твердых тел. расчет вибрационных нагрузок.**

по направлению подготовки

01.04.03 – Механика и математическое моделирование

Направленность

01.04.03\_03 – Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи

Выполнил

студент 5030103/90301 группы

К. И. Карамуллина

Руководитель

доцент ВШТМ и МФ

И. В. Курта

Консультант

Инженер

Е. А. Дегилевич

Санкт-Петербург  
2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА  
ВЕЛИКОГО**

**Физико-механический институт**

**Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ  
\_\_\_\_\_ А. М. Кривцов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2023 г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Карамуллина Камилы Ильнуровны гр. 5030103/90301

1. Тема работы: Моделирование декантирующей центрифуги методами конечных элементов и динамики твердых тел. Расчет вибрационных нагрузок.

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023.

3. Исходные данные по работе: Актуальные научные публикации по теме работы, исследования в области вибрационных нагрузок.

4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): Постановка задачи квалификационной работы, изучение модельной задачи декантирующей центрифуги, построение конечно-элементных моделей, верификация балочной модели.

5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.

6. Консультанты по работе: Е. А. Дегилевич, инженер ООО «Центр Технологического Консалтинга»

7. Дата выдачи задания: 27.02.2023.

Руководитель ВКР: И. В. Курта, доцент ВШТМ и МФ, ФизМех, к.т.н

Задание принял к исполнению 27.02.2023.

Студент: \_\_\_\_\_ К. И. Карамуллина

## РЕФЕРАТ

На 47 с., 20 рисунков, 9 таблиц, 17 источников.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ДЕКАНТИРУЮЩАЯ ЦЕНТРИФУГА, МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, МЕТОД КРЕЙГА-БЭМПТОНА, ДИСБАЛАНС, БАЛОЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, ВИБРАЦИОННЫЕ НАГРУЗКИ.

Тема выпускной квалификационной работы: «Моделирование декантирующей центрифуги методами конечных элементов и динамики твердых тел. Расчет вибрационных нагрузок».

Данная работа посвящена построению декантирующей центрифуги методом конечных элементов и динамики твёрдых тел с использованием программных пакетов ADAMS и NASTRAN. Было проведено исследование вибрационных нагрузок, возникновение которых связано с дисбалансами вращающихся элементов системы. Выполнен сравнительный анализ для моделей в двух постановках: в твердотельной постановке и в постановке с учетом упругих деформаций методом суперпозиции собственных форм (метод Крейга-Бэмптона). Рассматриваемые задачи:

1. Построение математической модели изолированных шнека и барабана;
2. Создание математической модели декантирующей центрифуги с учетом дисбаланса;
3. Построение математической модели декантирующей центрифуги с учетом упругости элементов конструкции;
4. Сравнение твердотельной постановки с упругой.

Полученные аналитические выражения и численные модели могут оказаться полезными при дальнейших исследованиях в этой области. Результаты исследования можно применять в производстве конструкций с подобной технологией, в частности в нефтегазовой отрасли для очистки нефтепродуктов.

## **ABSTRACT**

47 pages, 20 figures, 9 tables, 17 sources.

**KEY WORDS:** DENCANTING CENTRIFUGE, FINITE ELEMENT METHOD, CRAIG-BAMPTON METHOD, UNBALANCE, BEAM ELEMENTS, VIBRATION LOADS.

The topic of the final qualifying work: "Modeling of a decanting centrifuge by finite element methods and dynamics of solids. Calculation of vibration loads".

This work is devoted to the construction of a decanting centrifuge by the finite element method and the dynamics of solids using the ADAMS and NASTRAN software packages. A study of vibration loads, the occurrence of which is associated with the imbalances of the rotating elements of the system, was carried out. A comparative analysis is performed for models in two formulations: in the solid-state formulation and in the formulation taking into account elastic deformations by the method of superposition of eigenforms (the Craig-Bampton method). Tasks under consideration:

1. Construction of a mathematical model of an isolated screw and drum;
2. Creation of a mathematical model of a decanting centrifuge taking into account the imbalance;
3. Construction of a mathematical model of a decanting centrifuge taking into account the elasticity of structural elements;
4. Comparison of a solid-state formulation with an elastic one.

The obtained analytical expressions and numerical models may be useful in further research in this area. The results of the study can be used in the production of structures with similar technology, in particular in the oil and gas industry for the purification of petroleum products.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕКАНТИРУЮЩЕЙ ЦЕНТРИФУГИ МЕТОДАМИ ДИНАМИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ .....	6
1.1 Описание принципа работы центрифуги .....	6
1.2 Построение изолированной математической модели .....	7
1.3 Результаты моделирования .....	9
ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕКАНТИРУЮЩЕЙ ЦЕНТРИФУГИ В СБОРЕ.....	10
2.1 Принципы вибрационных расчетов .....	10
2.2 Описание математической модели декантирующей центрифуги с учетом дисбаланса.....	11
2.3 Результаты моделирования .....	12
2.4 Принцип учета линейной упругости в математических моделях. Метод Крейга-Бэмптона.....	16
2.5 Моделирование корпуса декантирующей центрифуги балочными элементами .....	20
2.6 Верификация балочных моделей. ....	22
2.7 Описание математической модели декантирующей центрифуги с учетом дисбаланса и учетом упругости элементов конструкции .....	36
2.8 Результаты моделирования с учетом упругости элементов и сравнение с твердотельной постановкой .....	37
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	43
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	45

## ВВЕДЕНИЕ

Материалы редко извлекаются в достаточно чистом виде для последующего использования. Извлеченный материал обычно требует нескольких этапов обработки, прежде чем он станет пригодным для использования, разделение обычно является одним из этих этапов. Оно определяется как процесс разъединения предметов, и это может относиться к комбинациям твердых тел, жидкостей и газов. Промышленное разделение используется не только при производстве продуктов, но и при извлечении ценных материалов из потоков отходов [16].

Быстрое развитие декантирующей центрифуги в течение 20-го века привело к тому, что она нашла широкое применение в более чем 100 отраслях промышленности в том числе в нефтегазовой отрасли.

На месторождениях нефти и газа, где ежедневно добывается огромное количество жидкости и газа, декантирующие центрифуги используются для отделения масла и газа от воды и других примесей. Они позволяют эффективно и быстро очищать нефть и газ от опасных примесей, а также повышать эффективность и рентабельность работы компаний [11].

Из-за большого значения декантирующих центрифуг в промышленности важно дальнейшее развитие с целью усовершенствования конструкции машины и методов управления, повышения ее общей производительности, которое позволит системе быстро реагировать на изменяющиеся условия подачи. Для этого строятся математические модели соответствующих реальных объектов.

В данной дипломной работе предлагается решение озвученной проблемы при построении конечно-элементной модели реального объекта посредством использования метода конечных элементов и динамики твердых тел.

Целью данной работы является получение конечно-элементной модели декантирующей центрифуги для исследования возникающих вибрационных нагрузок.

# ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕКАНТИРУЮЩЕЙ ЦЕНТРИФУГИ МЕТОДАМИ ДИНАМИКИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

## 1.1 ОПИСАНИЕ ПРИНЦИПА РАБОТЫ ЦЕНТРИФУГИ

Центрифуга — это устройство, которое использует центробежную силу для разделения смесей твердых веществ и жидкостей. Ее можно использовать для разделения практически любых смесей. Декантирующая центрифуга представляет собой особый тип центрифуги, в котором используется спиральный конвейер, обеспечивающий непрерывное разделение смесей, содержащих до трех различных фаз [16] (рисунок 1.1).

Центрифуга относится к устройствам для ультратонкого диспергирования и разделения неоднородных жидкостей и может быть использована, например, в пищевой, химической, фармацевтической отраслях промышленности [7].

### ДЕКАНТЕРНАЯ ЦЕНТРИФУГА

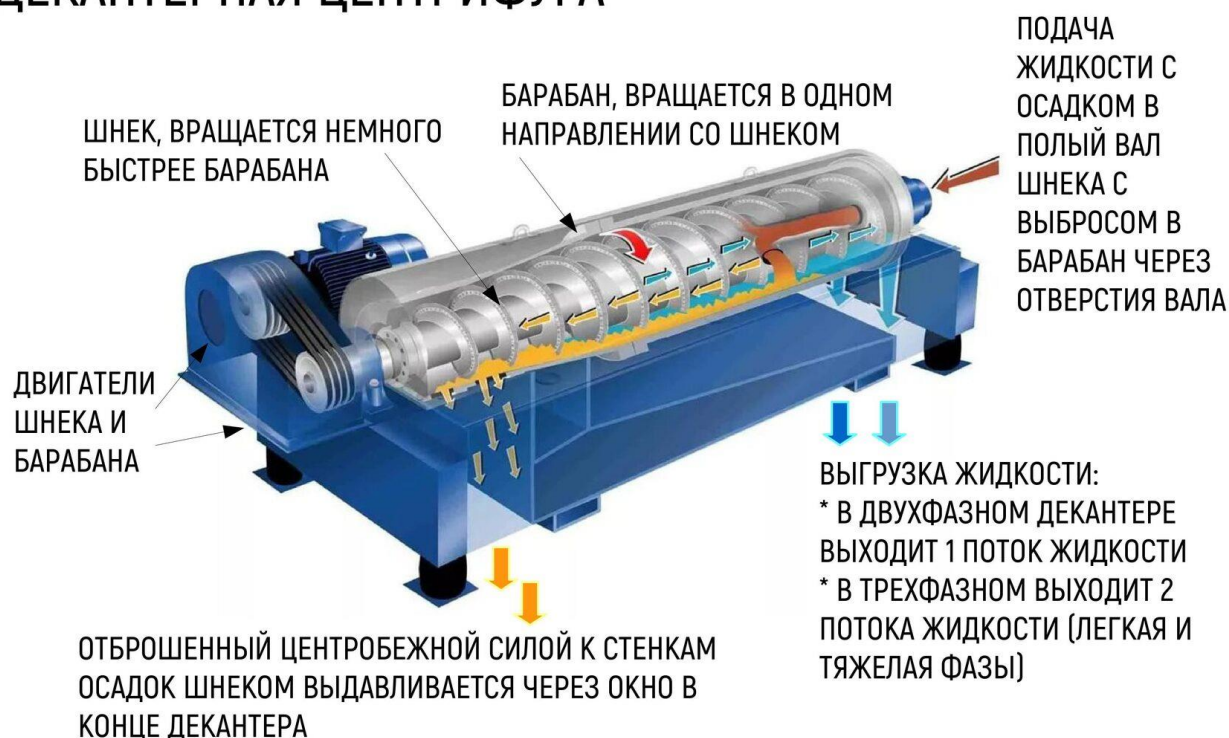


Рис.1.1 — Схема деталей декантирующей центрифуги

Принцип работы декантирующей центрифуги заключается в том, что жидкая смесь поступает в вертикально установленный цилиндрический барабан,

который вращается с высокой скоростью. Благодаря этому, нефть и другие более легкие компоненты отделяются от более тяжелых, как, например, вода и твердые частицы.

Машина приводится в движение системой ременных шкивов, которая вращается с высокой скоростью на той же оси и приводится в действие трансмиссией. Продукт транспортируется по подающей трубе в барабан и по спирали, образованной разницей скоростей между ними. Центробежная сила при высокой угловой скорости в машине разделяет продукты в суспензии из-за различий в плотности. В то время как твердая масса удаляется от центра, жидкая масса остается в области, близкой к центру. Таким образом, продукт разделяется на твердую и жидкую фазы. Силы перегрузки определяются в зависимости от разновидности продукта. Процесс декантации используется во многих отраслях, таких как переработка полезных ископаемых, очистка нефтяных продуктов и переработка отходов [14].

## **1.2 ПОСТРОЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Для построения конечно-элементной модели используется программный пакет для анализа динамики многотельных систем – ADAMS. Модель состоит из шнека, барабана. Шнек крепится с двух сторон к барабану при помощи бушингов, которые могут имитировать обладающие упругостью сайлентблоки и подшипники.

Построенная изолированная модель декантирующей центрифуги представлена на рисунке 1.2.



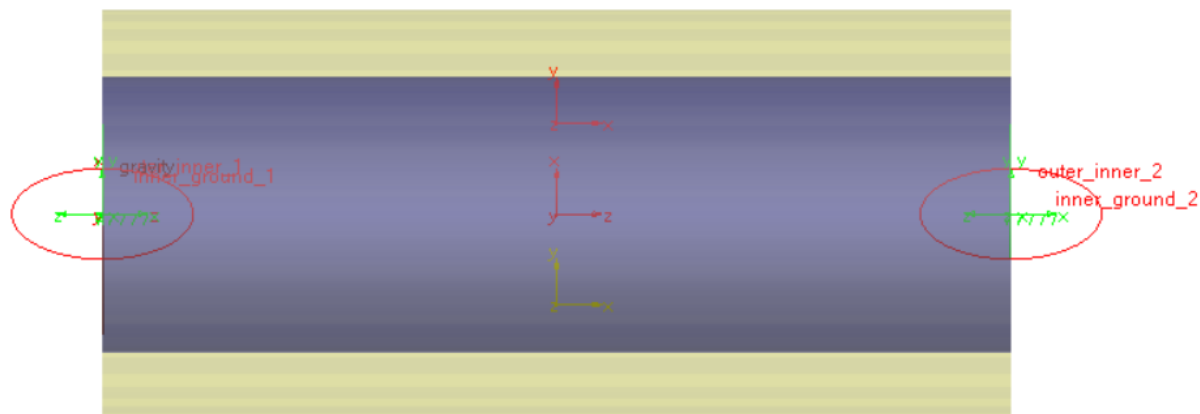


Рис.1.2 — Изолированная модель декантирующей центрифуги.

Составляющие конструкции моделировались по характеристикам, представленным в таблице 1.1:

Таблица 1.1

Деталь	Масса, кг	Радиус, мм	Длина, мм
Шнек	566.2	152	1000
Барабан	674.5	225	1000

Бушинги имеют жесткость  $10^8$  Н/мм и демпфирование  $0.05$  Н·с/мм в радиальном и продольном направлениях. Вращательная жесткость вокруг продольной оси нулевая, что будет эквивалентно вращательному шарниру.

Существует разница в скорости между чашей декантера и шнека, которая называется дифференциальной и создается редуктором на промышленных декантирующих центрифугах. Перепад скорости определяет содержание твердых веществ на выходе .

Барабан будет постепенно разгоняться до  $1000$  об/мин за период времени равный одной секунде, а скорость шнека будет задаваться относительно скорости вращения барабана через дифференциальную скорость. Эта скорость

будет равна 10 об/мин, шнек будет достигать ее также за момент времени равный одной секунде.

### 1.3 РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведем расчеты в диапазоне от 0 до 5 секунд с шагом 0.001 секунды, для обеспечения достаточного количества точек за цикл, чтобы сохранить гладкость синусоид. Результат симуляции с силами в радиальном направлении в бушингах приведен на рисунке 1.3.

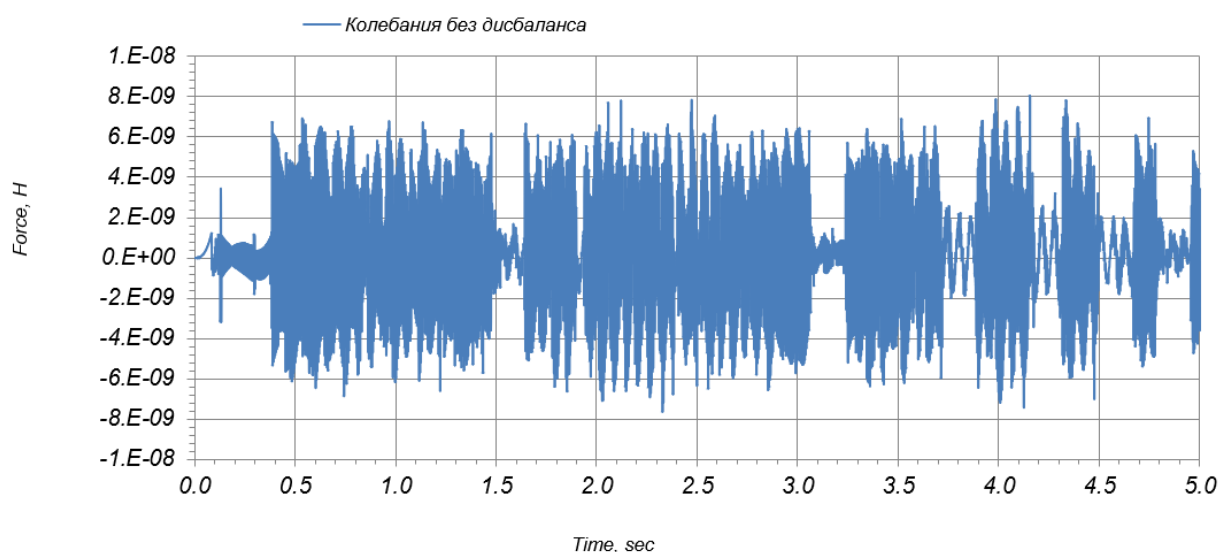


Рис.1.3 — График зависимости сил на опоры по радиальной оси.

Исходя из данных графика можно отметить, что в случае вращения жестких барабана и шнека на бушингах наблюдаются колебания сил очень низких порядков в районе  $7 \cdot 10^{-9}$  Н. Дребезжания вызваны незначительными колебаниями шнека и барабана на бушингах.

## **ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕКАНТИРУЮЩЕЙ ЦЕНТРИФУГИ В СБОРЕ 2.1 ПРИНЦИПЫ ВИБРАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ**

Не вызывает сомнений, что во многих конструкциях и механизмах исследование собственных частот и форм колебаний является одним из самых основных расчетов. Необходимость в таких исследованиях часто возникает при анализе динамического поведения конструкций, доступных воздействию изменчивых нагрузок. Этот вид анализа необходим, поскольку одновременно с расчетами прочности часто требуется проверить вероятность возникновения механических явлений, такие как резонанс [5], которые могут возникнуть при эксплуатации. Защита от резонансных эффектов может быть обеспечена механическими устройствами (например, виброизоляторами), которые могут радикально изменить спектральные свойства конструкции и поглотить энергию вибрации. Таким образом, введение дополнительных конструктивных элементов может быть экономически и практически целесообразным. Кроме того, есть еще один действенный способ борьбы с резонансом. Известно, что резонанс возникает на частотах, близких к собственным частотам конструкций, и если спектр собственных частот конструкции можно оценить при проектировании изделия, то риск возникновения резонанса в известной полосе частот из-за внешних воздействий можно предсказать со значительной вероятностью.

Для того чтобы существенно уменьшить вероятность возникновения резонанса, необходимо удостовериться в том, что большая часть малых собственных частот конструкции не находится в диапазоне частот внешних воздействий. В результате для таких ситуаций нет потребности в использовании преднамеренных систем виброизоляции, но для адаптации спектра собственных частот конструкции эти частотные диапазоны должны быть предварительно оценены на стадии проектирования. Выбор конечномерной модели может упростить исследование, однако необходимо помнить об используемых допущениях и определить область применения конечномерной модели, так как она может значительно отличаться от реальной модели.

Таким образом, виброрасчеты обязательны при подборе модели, так как существует необходимость в оценке возникающих в системе сил, скоростей и ускорений.

## 2.2 ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕКАНТИРУЮЩЕЙ ЦЕНТРИФУГИ С УЧЕТОМ ДИСБАЛАНСА

Дисбаланс в декантирующей центрифуге может быть как осознанным, так и нежелательным. Осознанный дисбаланс может быть использован для управления процессом сепарации (разделения) материалов в центрифуге. Например, если материал, подлежащий отделению, имеет разные плотности, установка различных уровней дисбаланса может существенно повлиять на относительное положение различных слоев материала и тем самым улучшить эффективность процесса отделения.

С другой стороны, нежелательный дисбаланс может возникать вследствие различных причин, например, из-за неправильной установки оборудования, деформации барабана, неодинаковой загрузки материалом и т.д. Такой дисбаланс может приводить к неоднородности отделения материалов, неправильной работе устройства сепарации, более высоким вибрациям установки и даже более серьезным повреждениям оборудования.

Поэтому важно знать, как планировать и контролировать дисбаланс в декантирующей центрифуге, чтобы добиться максимально эффективного отделения материалов и предотвратить нежелательные последствия [10].

Дисбаланс определяется произведением неуравновешенной массы на расстояние от ее центра масс до оси вращения. Центробежная сила в случае несбалансированного вращающегося тела может быть записано в виде

$$F = m \cdot a = m \cdot \omega^2 \cdot R \quad (2.1)$$

где  $m$  – масса ротора,  $\omega$  – скорость вращения,  $R$  – отклонение центра масс (ЦМ) ротора от оси вращения.

Следовательно масса дисбаланса и расстояние от ее центра масс до оси вращения обратно пропорциональны друг другу, значит для анализа влияния этих величин достаточно зафиксировать значение одной из величин и варьировать другую.

Введем в нашу изолированную систему две массы дисбаланса на расстоянии 100 мм от оси вращения равным и будем менять их массы. Одна масса будет жестко крепиться к шнеку декантирующей центрифуги, а другая к барабану. Рассмотрим несколько примеров с разными величинами масс дисбаланса, вариации которых представлены в таблице 2.1.

Таблица 2.1

Масса дисбаланса	1-ый эксперимент	2-ой эксперимент	3-ий эксперимент
Барабан, кг	0	10	50
Шнек, кг	0	10	50

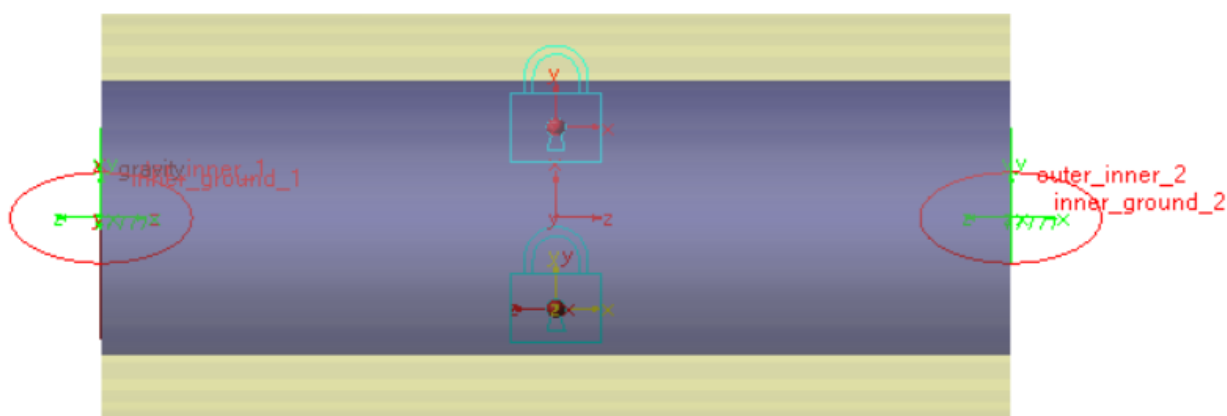


Рис.2.1 — Изолированная модель декантирующей центрифуги с учетом дисбаланса системы

### 2.3 РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Дисбаланс вызывает биения сил в системе (рисунок 2.2), что связано с наложением колебаний сил шнека и барабана, которые вращаются с разными скоростями. Данная зависимость представлена на графике сил, которые возникают на бушингах.

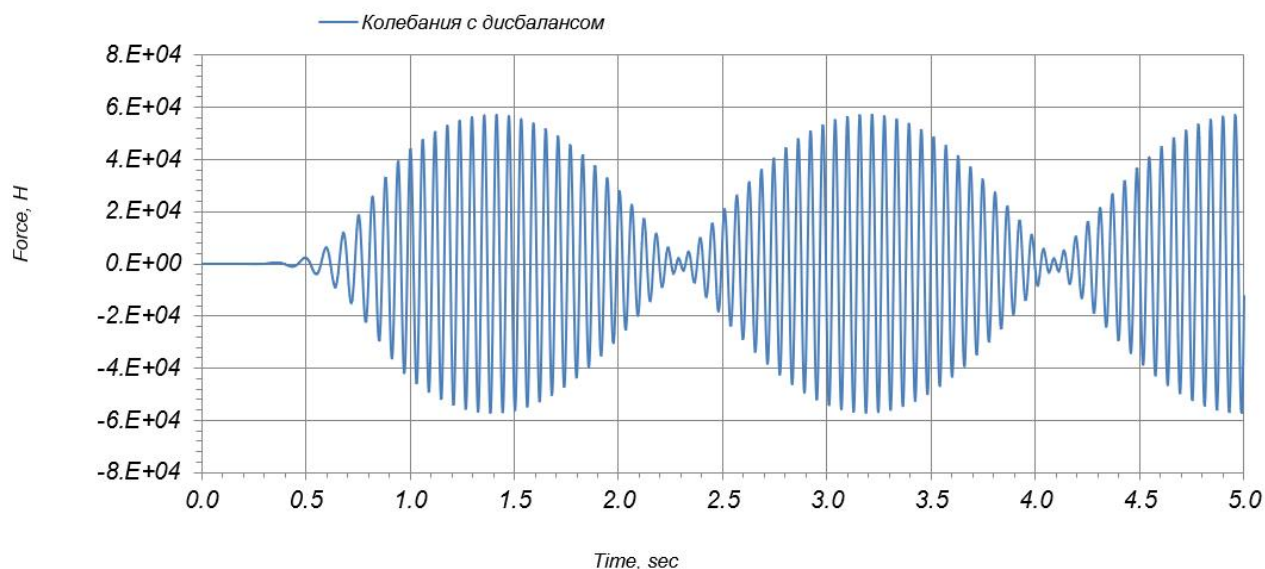


Рис.2.2 — График зависимости сил на опоры по радиальной оси с массой дисбаланса 50 кг

Из-за смещения центра масс системы относительно ее оси и наложения сил двух отдельных деталей конструкции, колебания носят характер биений. Из формулы (2.1) следует, что амплитуда этих колебаний пропорциональна массе.

Биение возникает, когда происходит запаздывание одного из двух сигналов относительно другого при их линейном сложении, при этом составной сигнал достигает максимума, когда он синфазен, и достигает минимума, когда два сигнала находятся в противофазе. Эти состояния циклически чередуются во времени при нарастании отставания [3].

С точки зрения математики это явление можно объяснить на примере сложения двух гармонических сигналов с близкими по значению частотами. Пусть первая гармоника имеет частоту  $\omega$ , а вторая – частоту  $(\omega + \delta)$ , где  $\delta$  – это дифференциальная скорость, которая в данном случае является малым параметром. Записывая сумму синусов, можно получить

$$\sin \omega + \sin(\omega + \delta) = 2 \sin\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right) \cos \frac{\delta}{2} \quad (2.2)$$

Поскольку получившееся произведение (2.2) состоит из гармоник с высокой  $\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)$  и достаточно низкой  $\frac{\delta}{2}$  частотами, то результирующий график будет иметь вид высокочастотных колебаний с плавно меняющейся огибающей. Поскольку амплитуды сил, приходящие от шнека и барабана в общем случае не обязаны иметь одинаковые амплитуды, то выражение несколько претерпит изменения. Чем больше будет разница амплитуд между этими силами, тем менее явно будут прослеживаться эти биения, так как огибающая будет больше напоминать прямую.

Биения сил могут привести к различным нежелательным эффектам, таким как повреждение оборудования, возникновение шума, увеличение износа деталей и потере работоспособности системы. Чтобы избежать биений сил, часто применяют специальные демпферы, амортизаторы и другие устройства, которые способны снизить колебания и предотвратить их переход в биения.

Результаты для систем с другими дисбалансами приведены на рисунке 2.3.

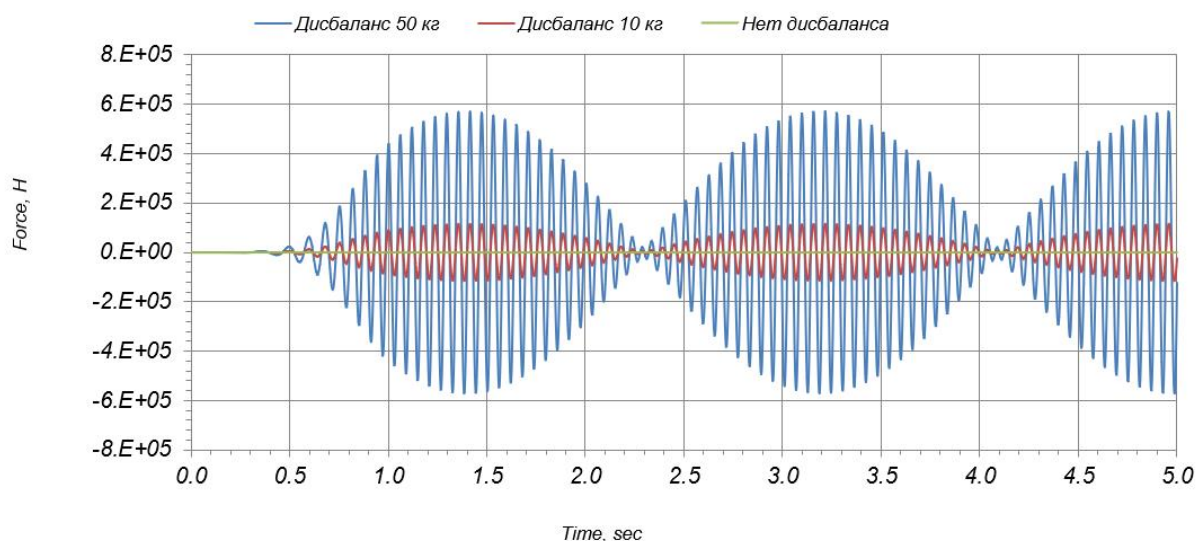


Рис.2.3 — График зависимости сил на опоры по радиальной оси для разных значений дисбаланса системы

Из графика сил видно, что с увеличением массы дисбаланса, силы на бушингах так же возрастают.

Для массы дисбаланса 10 кг рассмотрим вращение изолированного шнека с дисбалансом и их зависимость сил на бушингах, сравним численное решение с аналитическим. График сил в данной постановке, полученный в результате симуляции, представлен на рисунке 2.4.

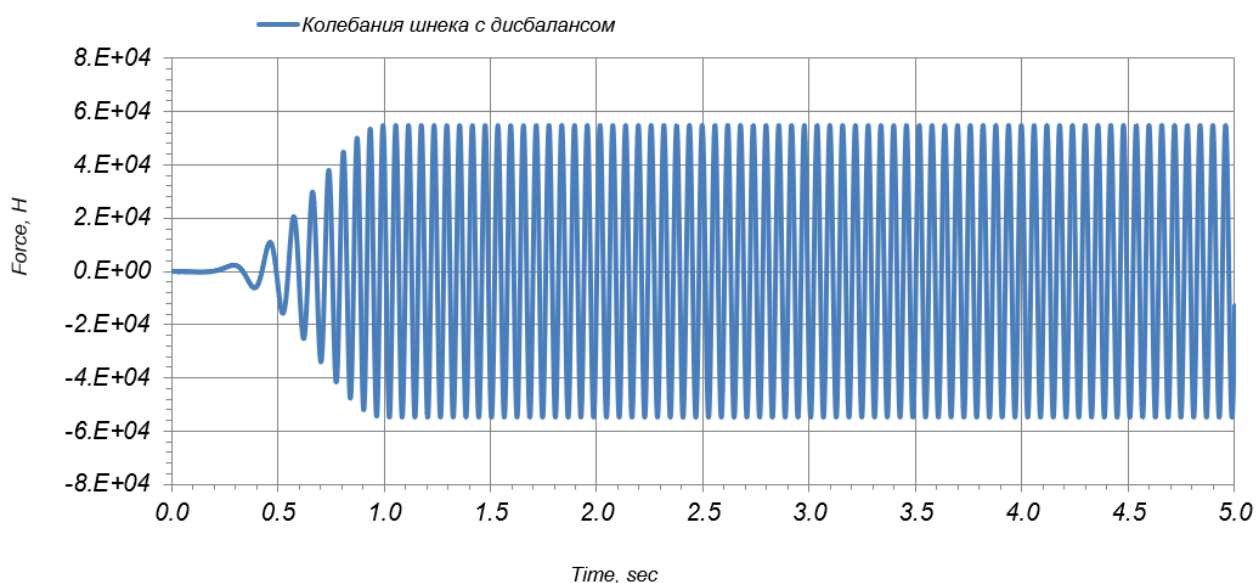


Рис.2.4 — График зависимости сил на опоры по радиальной оси для шнека декантера при массе дисбаланса 10 кг

Исходя из данных графика можно отметить, что в случае вращения жесткого шнека на бушингах наблюдаются колебания сил с амплитудой  $5.5 \cdot 10^4 \text{ Н}$ .

Для получения аналитического решения подставим те же параметры в уравнения для центробежной силы (2.1). Сила, вычисленная аналитически, будет  $F \approx 1.12 \cdot 10^5 \text{ Н}$ .

Центробежные силы приходятся на две опоры, следовательно суммарная сила, полученная путем численного решения, равна примерно  $1.1 \cdot 10^5 \text{ Н}$ . Таким образом, относительная погрешность составляет:

$$\delta = \frac{|1.12 \cdot 10^5 \text{ Н} - 1.1 \cdot 10^5 \text{ Н}|}{1.12 \cdot 10^5 \text{ Н}} \cdot 100\% = 1.8\% \quad (2.3)$$



Погрешность связана отчасти с тем, что аналитическое решение не учитывает тот факт, что модель находится на упругих подшипниках, то есть ее концы не жёстко закреплены к земле, а опоры шнека представляют собой упругие бушинги, что несколько меняет ось вращения в процессе симуляции.

Для сравнительного анализа были навешаны на рассматриваемую модель довольно большие массы, чтобы получить визуальное подтверждение сходимости с аналитическим решением. На самом деле для модели более сложной геометрии, например, для реальной спирали шнека, дисбаланс настраивается и составляет 1% от допустимого максимального значения согласно ГОСТ [9], что является крайне малым значением. Таким образом, необходимо следить, чтобы дисбаланс был небольшим.

## **2.4 ПРИНЦИП УЧЕТА ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ. МЕТОД КРЕЙГА-БЭМПТОНА**

Упругие тела используются для моделирования движения деформируемых структур с учетом их гибкости. Упругие тела представлены набором связей, а их взаимодействие описывается уравнениями движения упругого тела. Уравнения движения упругих тел выводятся линейной теории. В линейной теории внешние воздействия считаются малыми, а отсчетная конфигурация — ненапряженным состоянием покоя [16]. Конечно-элементные решения этого класса задач достаточно трудоемки из-за сложной матрицы упругих масс. Однако метод Крейга-Бэмптона упрощает эту задачу без потери точности.

Метод Крейга–Бэмптона (связанных подструктур) — это метод редуцирования системы уравнений движения тела, которое поддается деформации. Исследуемые системы уравнения могут быть получены на основе метода конечных элементов (МКЭ), путём приближения малых упругих перемещений тела набором допустимых форм. Он состоит из пяти этапов:

1) разделение узлов следующие категории: интерфейсные, то есть узлы, на которые воздействуют силовые факторы и соединения, а также узлы, для которых нежелательно приближенное представление движения) и внутренние;

2) вычисление статической формы на основе единичных перемещений по всем степеням свободы интерфейсного узла;

3) вычисление собственных форм колебаний с использованием закрепленных интерфейсных узлов;

4) генерирование модальной матрицы, а также построение редуцированных матриц масс и жесткости;

5) осуществление процесса ортонормализация для базиса модального пространства [13].

В результате объект моделируется при помощи программного обеспечения, которое использует метод конечных элементов, а собственные формы и частоты вычисляются с использованием метода Крейга-Бэмптона. Полученные матрица масс и матрица жесткости уменьшаются. Матрица жесткости записывается в файл специального формата .mnf (Modal Neutral File) [17].

Модальная суперпозиция состоит в представлении сложных мод в виде линейной комбинации простых. Координаты всех узлов МКЭ записываются в следующем виде:

$$x_n = \sum_{i=1}^M h_i w_i \quad (2.4)$$

где  $M$  — общее количество используемых режимов,  $h$  — это набор форм,  $w$  — это набор модальных координаты, а индекс  $i$  отвечает за номер форм. Уравнение может быть записано в матричной форме:

$$x_n = Hw \quad (2.5)$$

где  $H$  — полная модальная матрица, описывающая полный набор используемых режимов и представляющая собой преобразование небольшого набора модальных координат,  $w$  — большой набор физических координат  $x_n$ .

Основным результатом метода Крейга-Бэмптона и его заключительным этапом является построение модальной матрицы. Координаты всех граничных узлов МКЭ обозначаются как  $x_{nF}$ , координаты внутренних узлов как  $x_{nR}$  то уравнение можно переписать следующим образом:

$$x_n = \begin{pmatrix} x_{nF} \\ x_{nR} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ H_{IC} & H_{IN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_C \\ w_N \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

где  $I$  — единичная матрица,  $0$  — нулевая матрица,  $H_{IC}$  — смещение внутренних степеней свободы в ограничивающих режимах,  $H_{IN}$  — внутренние собственные формы степени свободы,  $w_C$  — модальные координаты ограничивающих режимов,  $w_N$  — модальные координаты фиксированных собственных форм. Построение модальных матриц невозможно без определения обобщенных матриц масс  $\bar{M}$  и жесткость  $\bar{C}$ , которые связаны следующими соотношениями:

$$\bar{M} = H^T M_{FEM} H \quad (2.7)$$

$$\bar{C} = H^T C_{FEM} H \quad (2.8)$$

где  $M_{FEM}$  и  $C_{FEM}$  — полные матрицы массы и жесткости соответственно.

Как отмечалось ранее, метод Крейга-Бэмптона позволяет вывести уравнения динамики упругих тел для задач, где упругие тела подвержены малым деформациям, но в то же время участвуют в больших перемещениях в составе механической системы. Выведем общие уравнения движения упругих тел из уравнения Лагранжа [14] с использованием теории, представленной в уравнении (2.5).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = s \quad (2.9)$$

где  $T$  — кинетическая энергия,  $U$  — потенциальная энергия,  $q$  — вектор обобщенного координаты тела,  $s$  — обобщенных сил. Вектор  $q$  выбирается как набор из двух векторов:  $q(r, \varphi)$ , вектор модальных координат  $w$ :

$$q = (r, \varphi, w) \quad (2.10)$$

Векторы  $r$  и  $\varphi$  можно получить следующим образом:

$$\dot{r} = v, \dot{\varphi} = \omega \quad (2.11)$$

где  $v$  и  $\omega$  — линейная и угловая скорости локальной системы отсчета относительно глобальной системы отсчета.

Если МКЭ тела состоит из  $N$  узлов, то число степеней свободы в исследуемой модели равно  $6N$  размер полной модальной матрицы равен  $6N \times M$  ( $M$  — количество используемых форм).

Уравнение для расчета кинетической энергии имеет следующий вид:

$$T = 0.5 \cdot \dot{q}^T \cdot M \dot{q} \quad (2.12)$$

где  $M$  является обобщенной массовой матрицей.

После введения дополнительных векторов обобщенных сил инерции  $k$ , обобщенные силы упругости  $s_c$ , демпфирующие силы  $s_D$ , сила тяжести  $s_g$  и активные сосредоточенные силы  $s_a$  следующее получается выражение:

$$M\ddot{q} = s_g + s_a + s_D + s_c + k + R \quad (2.13)$$

где  $R$ - сила реакции связи.

Полученное уравнение является общим уравнением динамики твердого тела, основанным на методе Крейга-Бэмптона [17].

## 2.5 МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРПУСА ДЕКАНТИРУЮЩЕЙ ЦЕНТРИФУГИ БАЛОЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Для описания поведения конструкций в условиях нагрузок и деформаций применяются различные упругие модели. Одним из таких способов является использование модели балочных элементов.

Балочная модель — это упрощенная математическая модель, используемая для анализа статических и динамических характеристик конструкций, особенно в случаях, когда конструкции могут быть приближены однородными поперечными сечениями [6].

Упругие модели, основанные на балочных элементах, широко применяются в различных областях инженерии, таких как строительство, машиностроение, авиация, судостроение и др. Они позволяют предсказывать поведение конструкций при различных условиях эксплуатации и оптимизировать их проектирование и изготовление.

Переход от трехмерной модели к балочной может иметь несколько преимуществ:

1. Упрощенный подход: Балочная модель упрощает конструкцию и ее элементы, что облегчает процесс расчета и анализа.

2. Экономическая эффективность: Моделирование на основе балочной модели значительно экономически эффективнее, чем при использовании трехмерной модели. Трехмерная модель потребует большого количества времени на моделирование и требует более мощных вычислительных ресурсов.

3. Однородность: Балочная модель предполагает, что поперечное сечение состоит из однородного материала, что приводит к упрощению расчетов.

4. Простота движения: Балочная модель подходит для анализа сложных конструкций со сложным движением, так как в ней необходимо только рассмотреть движение по оси балок.

Вместе с тем, стоит заметить, что использование балочной модели имеет свои недостатки. Ограничение в упрощенном подходе может привести к неточности результатов и привести к упущению элементов, которые могут быть решающими в расчетах. Балочная модель может не учитывать некоторые параметры конструкций, такие, как удароустойчивость и другие факторы, которые могут быть критичны в некоторых приложениях. Однако, следует заметить, что переход от модели трехмерной к модели балочной может быть ограничен в зависимости от конкретных условий и требований моделируемой системы.

Таким образом, необходимо сравнить две модели: в трехмерной и балочной постановках, которые приведены на рисунках 2.5 и 2.6 соответственно. Обе модели имеют одинаковые геометрические параметры, представленные в таблице 2.2, и свойства материала.

Таблица 2.2

Деталь	Масса, кг	Радиус, мм	Длина, мм
Шнек	38.7	40	1000
Барaban	22.1	50	1000

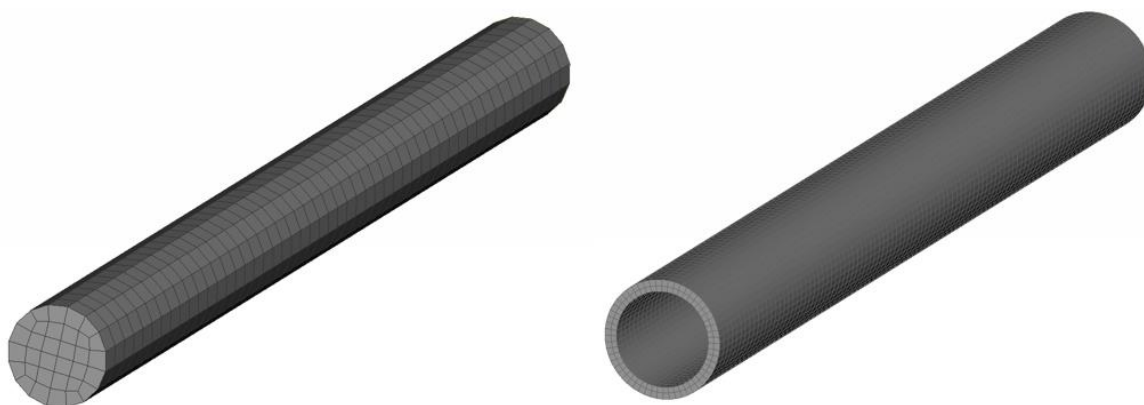


Рис.2.5 — Шнек и барабан декантирующей центрифуги в трехмерной постановке

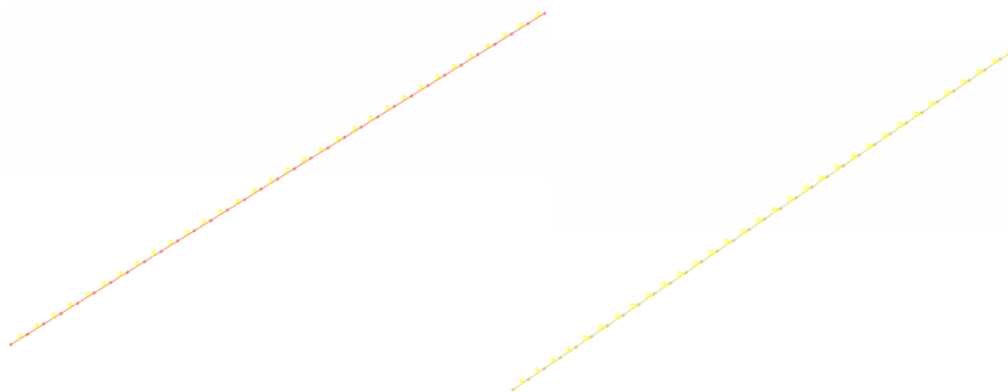


Рис.2.6 — Шнек и барабан декантирующей центрифуги в балочной постановке

В трехмерной модели количество элементов для шнека и барабана составляет 1602 и 11202, соответственно, а для балочной модели количество элементов в силу специфики постановки гораздо меньше, а именно, 32 для шнека и столько же для барабана.

## 2.6 ВЕРИФИКАЦИЯ БАЛОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ.

Для проверки адекватности балочных моделей и верификации самого метода Крейга-Бэмптона в целом целесообразно провести несколько численных испытаний и сопоставить полученные результаты с аналитическими выкладками. Проведем частотный (или модальный), статический и динамический анализ для упругих моделей  $mnf$  и собранных из них систем.

### 1) Частотный анализа

При использовании процедуры Крейга-Бэмптона для модального анализа шнека и барабан рассматривались со свободными концами. Для балочной и трехмерной модели были получены первые шесть ненулевых частот и внесены в таблицу 2.3.

Таблица 2.3.

Частота трёхмерного шнека, Гц	Частота балочного шнека, Гц	Частота трёхмерного барабана, Гц	Частота балочного барабана, Гц
359.13	364.92	562.34	578.58
365.68	364.92	562.36	578.58
977.40	986.91	1452.26	1528
977.44	986.91	1452.50	1528
1594.18	1603.2	1635.41	1605.1
1920.83	1882.1	2697.30	2588.2

Итоговые значения собственных частот для упругих моделей шнека и барабана были получены близкими по значению. Формы собственных колебаний при этом также имеют схожий вид. Их иллюстрации приведены на рисунках 2.7 и 2.8.

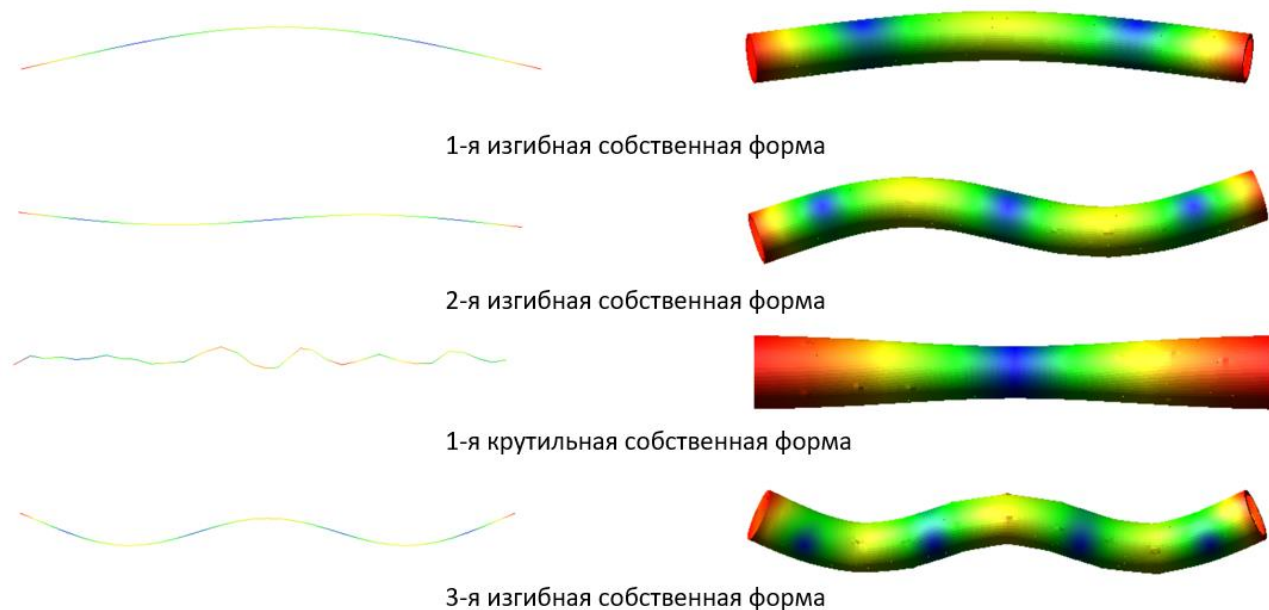


Рис.2.7 — Собственные формы шнека в балочной и трехмерной постановках.



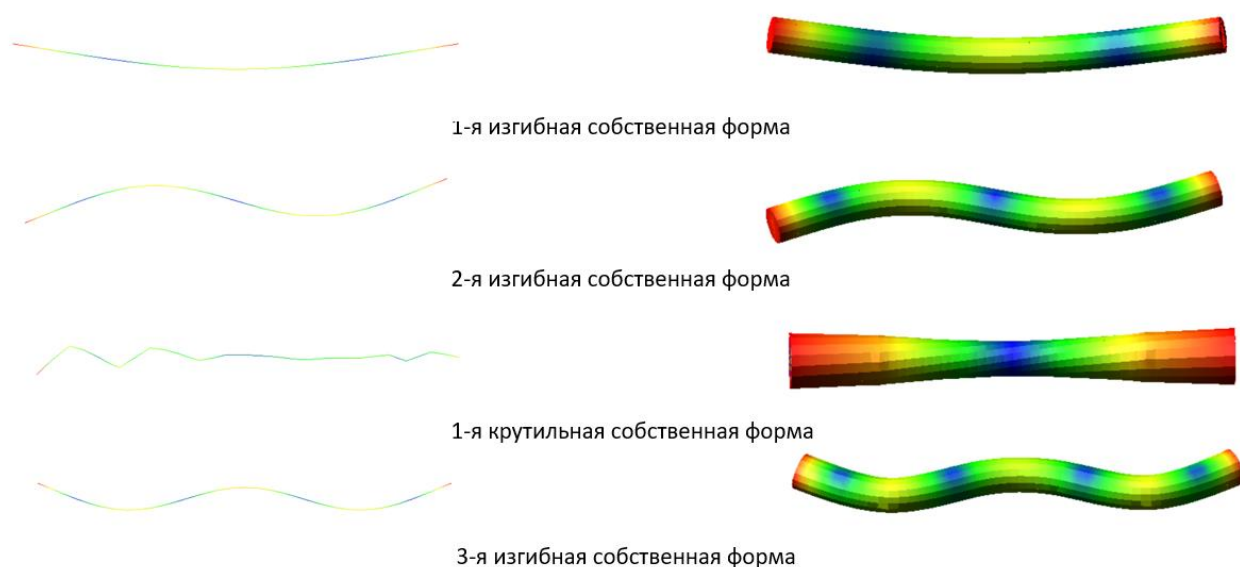


Рис.2.8 — Собственные формы барабана в балочной и трехмерной постановках.

Стоит отметить, что недостатком балочных моделей является визуально некорректное отображение крутильных форм, однако это не влияет на точность полученных крутильных форм, как это будет показано дальше при сопоставлении результатов с аналитикой.

#### а) Изгибные (или поперечные) колебания

Уравнение свободных поперечных колебаний «тонкого» стержня в перемещениях [1]:

$$(EJv'')'' + \rho F\ddot{v} = 0, \quad (2.14)$$

где  $v = v(x, t)$  – прогиб стержня,  $x$  – координата вдоль оси стержня ( $0 \leq x \leq l$ ),  $l$  – длина стержня,  $E$  – модуль упругости,  $J$  – момент инерции поперечного сечения,  $\rho$  – плотность,  $F$  – площадь поперечного сечения.

Решение (1.1) ищется в виде:

$$v(x, t) = v(x) \sin(\lambda t + \alpha). \quad (2.15)$$

Подставив (1.2) в (1.1) и сократив синусы, приходим к уравнению для поиска собственных частот  $\lambda$  и форм колебаний  $v(x)$

$$(EJv'')'' - \lambda^2 \rho F v = 0, \quad (2.16)$$

которое с учетом того, что сечение стержня постоянно, принимает вид

$$u^{IV} - a^4 v = 0, \quad \text{где } a^4 = \lambda^2 \frac{\rho F}{EJ}. \quad (2.17)$$

Для поиска общего решения уравнения оптимально использовать функции Крылова

$$\begin{aligned} K_1(ax) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} ax + \cos ax), & K_2(ax) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} ax + \sin ax), \\ K_3(ax) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} ax - \cos ax), & K_4(ax) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} ax - \sin ax). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Общее решение и его производные:

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1 K_1(ax) + C_2 K_2(ax) + C_3 K_3(ax) + C_4 K_4(ax), \\ v'(x) &= a[C_1 K_4(ax) + C_2 K_1(ax) + C_3 K_2(ax) + C_4 K_3(ax)], \\ v''(x) &= a^2[C_1 K_3(ax) + C_2 K_4(ax) + C_3 K_1(ax) + C_4 K_2(ax)], \\ v'''(x) &= a^3[C_1 K_2(ax) + C_2 K_3(ax) + C_3 K_4(ax) + C_4 K_1(ax)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Константы интегрирования из (1.6) определяются на основе граничных условий. На свободных концах изгибающий момент  $M = -EJv''$  и перерезывающая сила  $Q = -EJv'''$  равны нулю, поэтому граничные условия можно записать в следующем виде:

$$v''(0) = 0, \quad v'''(0) = 0, \quad v''(l) = 0, \quad v'''(l) = 0. \quad (2.20)$$

Подставляя граничные условия (1.7) на левом конце в (1.6) и учтя, что

$$K_1(0) = 1, K_2(0) = K_3(0) = K_4(0) = 0, \quad (2.21)$$

находим

$$v''(0) = a^2 C_3 = 0, \quad v'''(0) = a^3 C_4 = 0. \quad (2.22)$$

Стоит отметить, что существует нулевое решение  $a = 0$ , отвечающее движению стержня как твердого тела, но рассматривая нетривиальное решение

$a \neq 0$ , находим, что  $C_3 = C_4 = 0$ . Воспользовавшись граничными условиями (1.7) на правом конце, приходим к однородной системе линейных уравнений относительно  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 K_3(al) + C_2 K_4(al) = 0 \\ C_1 K_2(al) + C_2 K_3(al) = 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Для случая нетривиального решения необходимо и достаточно равенство нулю определителя системы (1.10):

$$\begin{vmatrix} K_3(al) & K_4(al) \\ K_2(al) & K_3(al) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.24)$$

Раскрываем определитель

$$\begin{aligned} K_3^2(al) - K_4(al)K_2(al) &= \frac{1}{4}(\operatorname{ch}^2 al - 2 \operatorname{ch} al \cos al + \cos^2 al - \operatorname{sh}^2 al + \sin^2 al) = \\ &= \frac{1}{4}(2 - 2 \operatorname{ch} al \cos al) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{ch} al \cos al) = 0 \end{aligned}$$

и получаем частотное уравнение

$$\operatorname{ch} al \cos al = 1. \quad (2.25)$$

Первый ненулевой корень равен  $a_1 l \approx 4.73$ , тогда первая частота поперечных колебаний с учетом (1.4) и (1.12) равна

$$\lambda_s = a_s^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{22.3733}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} \quad (2.26)$$

Первая форма поперечных колебаний находится после подстановки в одно из уравнений системы (10) значения  $a_1$

$$\begin{aligned} C_1 K_3(a_1 l) + C_2 K_4(a_1 l) &= \\ &= \frac{1}{2}[C_1(\operatorname{ch} a_1 l - \cos a_1 l) + C_2(\operatorname{sh} a_1 l - \sin a_1 l)] = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Так как формы находятся с точностью до произвольного множителя, данное уравнение можно удовлетворить, выбрав константы следующим образом

$$C_1 = 2C(\operatorname{sh} a_1 l - \sin a_1 l), \quad C_2 = -2C(\operatorname{ch} a_1 l - \cos a_1 l), \quad (2.28)$$

где  $C$  – произвольная константа, которую можно определить из условия нормировки

$$\int_0^l \rho v_1^2(x) dx = 1, \quad (2.29)$$

где

$$v_1(x) = C[(\operatorname{sh} a_1 l - \sin a_1 l)(\operatorname{ch} a_1 x + \cos a_1 x) - (\operatorname{ch} a_1 l - \cos a_1 l)(\operatorname{sh} a_1 x + \sin a_1 x)]. \quad (2.30)$$

### б) Продольные колебания

Уравнение свободных продольных колебаний стержня в перемещениях:

$$\rho F \ddot{u} = (EFu')', \quad (2.31)$$

где  $u = u(x, t)$  – продольное перемещение,  $x$  – координата вдоль оси стержня ( $0 \leq x \leq l$ ),  $l$  – длина стержня,  $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность,  $F$  – площадь поперечного сечения.

Решение (1.18) ищется в виде:

$$u(x, t) = u(x) \sin(\lambda t + \alpha). \quad (2.32)$$

Подставив (1.19) в (1.18) и сократив синусы, приходим к уравнению для поиска собственных частот  $\lambda$  и форм колебаний  $u(x)$

$$(EFu')' + \lambda^2 \rho Fu = 0, \quad (2.33)$$

которое с учетом того, что сечение стержня постоянно, принимает вид

$$u'' + a^2 u = 0, \quad \text{где } a^2 = \lambda^2 \frac{\rho}{E}. \quad (2.34)$$

Общее решение уравнения (1.21) записывается в виде

$$u(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax. \quad (2.35)$$

Константы интегрирования из (1.22) определяются на основе граничных условий. В случае свободных концов нормальная сила  $N = FEJu'$  равна нулю, поэтому граничные условия будут:

$$u'(0) = 0, \quad u'(l) = 0. \quad (2.36)$$

Подставляя граничные условия (1.23) на левом конце в (1.22), находим

$$u'(0) = aC_2 = 0. \quad (2.37)$$

Так же, как и для изгибных колебаний, существует нулевое решение  $a = 0$ , отвечающее движению стержня как твердого тела, но рассматривая нетривиальное решение  $a \neq 0$ , получаем, что  $C_2 = 0$ . Воспользовавшись граничными условиями (1.23) на правом конце, приходим к частотному уравнению

$$aC_1 \sin al = 0 \Rightarrow \sin al = 0 \Rightarrow a_s l = \pi s \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (2.38)$$

Частоты поперечных колебаний с учетом (1.25) можно определить по формуле

$$\lambda_s = a_s \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{\pi s}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (2.39)$$

а формы колебаний примут простой вид:

$$u_s(x) = C_1 \cos \pi s \frac{x}{l}. \quad (2.40)$$

#### в) Крутильные колебания

В случае поиска частот крутильных колебаний стержня решение строится абсолютно идентичным образом, что и для продольных колебаний. Для этого необходимо продольное перемещение  $u(x, t)$  заменить на угол поворота  $\varphi(x, t)$ , модуль Юнга  $E$  – на модуль сдвига  $G$ , площадь поперечного сечения  $F$  – на полярный момент инерции  $J_p$ . Проведя данные замены, можно переписать

формулы для частот и форм и получить аналогичные выражения для крутильных колебаний:

$$\lambda_s = a_s \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \frac{\pi s}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (2.41)$$

$$\varphi_s(x) = C_1 \cos \pi s \frac{x}{l}. \quad (2.42)$$

Аналитически полученные значения собственных частот по формулам (2.25), (2.26), (2.39) и (2.41), представлены в таблице 2.4:

Таблица 2.4.

Номер частоты	Собственные частоты барабана, Гц	Собственные частоты шнека, Гц
1	589.63	368.34
2	1603.83	1015.36
3	1625.36	1603.83
4	2586.10	1990.50

Сопоставим значения собственных частот для шнека (таблица 2.5.) и барабана (таблица 2.6.), полученные аналитически и численно: с помощью балочных элементов и трехмерных моделей.

Таблица 2.5.

Частота трёхмерного шнека, Гц	Частота балочного шнека, Гц	Аналитическая частота шнека, Гц
365.65	364.92	368.34
1059.6	986.91	1015.36
1682.4	1603.2	1603.83
2287.4	1882.1	1990.50

Таблица 2.6

Частота трёхмерного барабана, Гц	Частота балочного барабана, Гц	Аналитическая частота барабана, Гц
566.96	578.58	589.63
1515.7	1528	1603.83
1665.1	1605.1	1625.36
2952.2	2588.2	2586.10

Значения собственных частот для трехмерных и балочных постановок дают хорошее приближение к числам, полученным аналитически. Результаты для балочных моделей вышли ближе к аналитическим частотам в сравнении с трехмерной постановкой, поскольку в ней вычисления происходят на основе трехмерных уравнений теории упругости, а балочные модели определяются уравнениями балок Тимошенко или Бернулли-Эйлера.

## 2) Статическое нагружение

При использовании процедуры Крейга-Бэмптона для статического анализа шнека и барабана в двух постановках рассматривались модели со закрепленным концом слева и свободным концом справа с приложенной к нему силой равной 10000 Н. Схемы моделей представлены на рисунке 2.9.

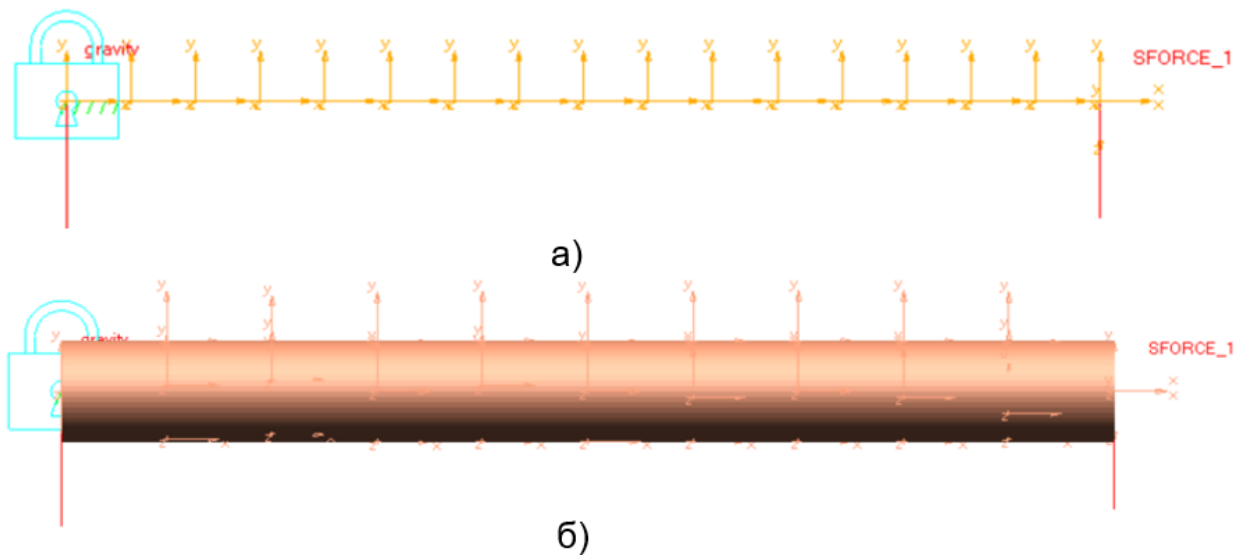


Рис.2.9 — Схема закрепления для балочной (а) и трехмерной (б) моделей

На рисунке 2.10. представлены деформации для моделей барабана в трехмерной и балочной постановках.

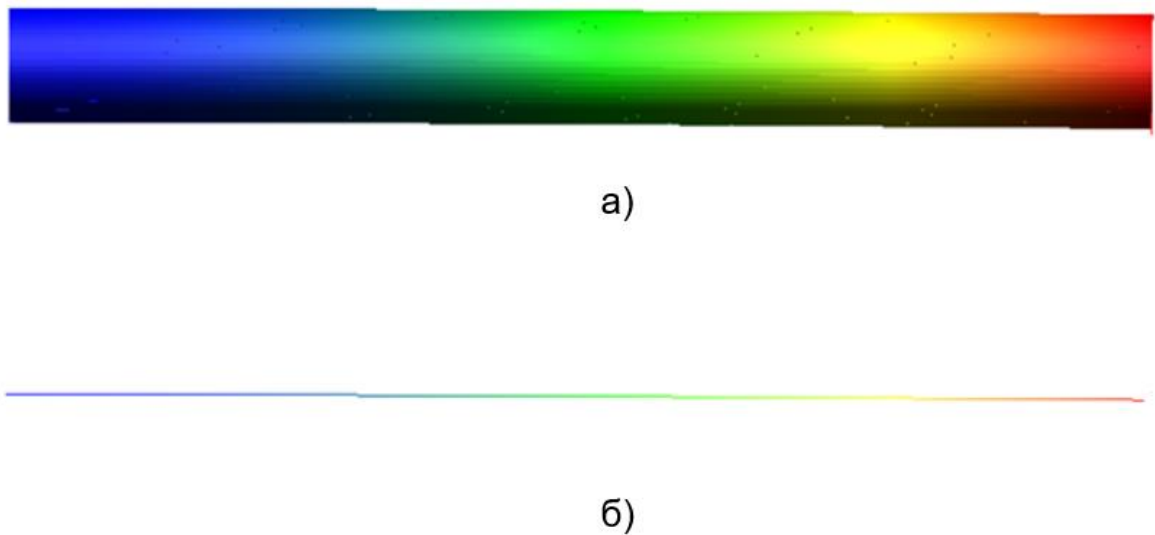


Рис.2.10 — Поле деформации для трехмерной (а) и балочной (б) моделей барабана



Целесообразно сравнить эти значения с аналитическим решением, чтобы проверить адекватность метода Крейга-Бэмптона. Для консольного стержня, защемленного с одного края и нагруженного поперечной силой с противоположного конца справедливо уравнение [16]

$$EJv'' = -M_{\text{изг}} = Px \quad (2.43)$$

где, как и ранее,  $v = v(x)$  – прогиб стержня,  $x$  – координата вдоль оси стержня ( $0 \leq x \leq l$ ),  $l$  – длина стержня,  $E$  – модуль упругости,  $J$  – момент инерции поперечного сечения,  $M_{\text{изг}}$  – изгибающий момент,  $P$  – поперечная сила, приложенная к краю стержня. В уравнении (2.43) уже учтены граничные условия на конце  $x = 0$ , а именно, приложенная сила  $P$  и отсутствие сосредоточенного изгибающего момента. На противоположном конце  $x = l$ , ставится условие защемления, то есть отсутствие перемещений и нулевой угол поворота

$$v(l) = 0, \quad v'(l) = 0. \quad (2.44)$$

Дважды проинтегрировав уравнение (2.43), получим следующие выражения:

$$EJv' = \frac{P}{2}x^2 + C_1, \quad (2.45)$$

$$EJv = \frac{P}{6}x^3 + C_1x + C_2, \quad (2.46)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – константы интегрирования, которые определяются из граничных условий (2.44):

$$\begin{cases} \frac{P}{2}l^2 + C_1 = 0 \\ \frac{P}{6}l^3 + C_1l + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{P}{2}l^2 \\ C_2 = \frac{P}{3}l^3 \end{cases}. \quad (2.47)$$

Уравнение прогиба в зависимости от продольной координаты с учетом (1.4) и (1.5) предстанет в виде

$$v(x) = \frac{P}{EJ} \left( \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}l^2x + \frac{1}{3}l^3 \right), \quad (2.48)$$

а прогиб стержня в концевой точке будет равен

$$v(0) = \frac{Pl^3}{3EJ}. \quad (2.49)$$

Для барабана и шнека в двух постановках численно и аналитически получены следующие значения, представленные в таблице 2.7.

Таблица 2.7

	Численное решение для балочной модели	Численное решение для трехмерной модели	Аналитическое решение
Барабан	5.516 мм	5.550 мм	5.277 мм
Шнек	7.916 мм	8.086 мм	7.895 мм

Вычислим погрешность вычислений в двух постановках относительно аналитического решения.

$$\delta_{\text{шнек\_балочный}} = \frac{|7.895 \text{ мм} - 7.916 \text{ мм}|}{7.895 \text{ мм}} \cdot 100\% = 0.27\% \quad (2.50)$$

$$\delta_{\text{шнек\_трехмерный}} = \frac{|7.895 \text{ мм} - 8.086 \text{ мм}|}{7.895 \text{ мм}} \cdot 100\% = 2.42\% \quad (2.51)$$

$$\delta_{\text{барабан\_балочный}} = \frac{|5.277 \text{ мм} - 5.516 \text{ мм}|}{5.277 \text{ мм}} \cdot 100\% = 4.53\% \quad (2.52)$$

$$\delta_{\text{барабан\_трехмерный}} = \frac{|5.277 \text{ мм} - 5.550 \text{ мм}|}{5.277 \text{ мм}} \cdot 100\% = 5.17\% \quad (2.52)$$

Значения деформаций для трехмерной и балочной постановок дают хорошее приближение к числам, полученным аналитически, при этом наибольшее совпадение наблюдается у балочных моделей.

### 3) Динамический анализ

При использовании процедуры Крейга-Бэмптона для статического анализа шнека и барабана в двух постановках рассматривались модели, к которым для барабана и шнека задано вращение, сравним усилия на опоры в балочной и трехмерной постановках.

При рассмотрении балочной конструкции с нулевыми массами дисбаланса, были получены силы не превосходящие значения  $8 \cdot 10^{-5}$  Н, что является практически нулевым значением, что логично, так как из-за отсутствия дисбаланса, отклонения центра масс не происходит и центробежная сила равна нулю. В то же время как для трехмерной модели силы на опорах в установившемся режиме колебались от -35 Н до 35 Н. Это связано с дискретностью сетки трехмерной модели, которая в силу разбиений не дает в сечении идеально ровный круг, что вызывает смещение по оси центра масс конструкции изолированной модели и вызывает самопроизвольное возникновение дисбаланса.

Таким образом, чтобы сравнивать модели необходимо задать одинаковые начальные условия в том числе и смещение положения центра масс относительно оси.

Введем в балочную систему дисбаланс с малой массой и будем с помощью варьирования расстояния добиваться, чтобы положение центра масс приняло такое же значение, как и в случае с трехмерной фигурой. Результаты графиков сил приведены на рисунке 2.11.

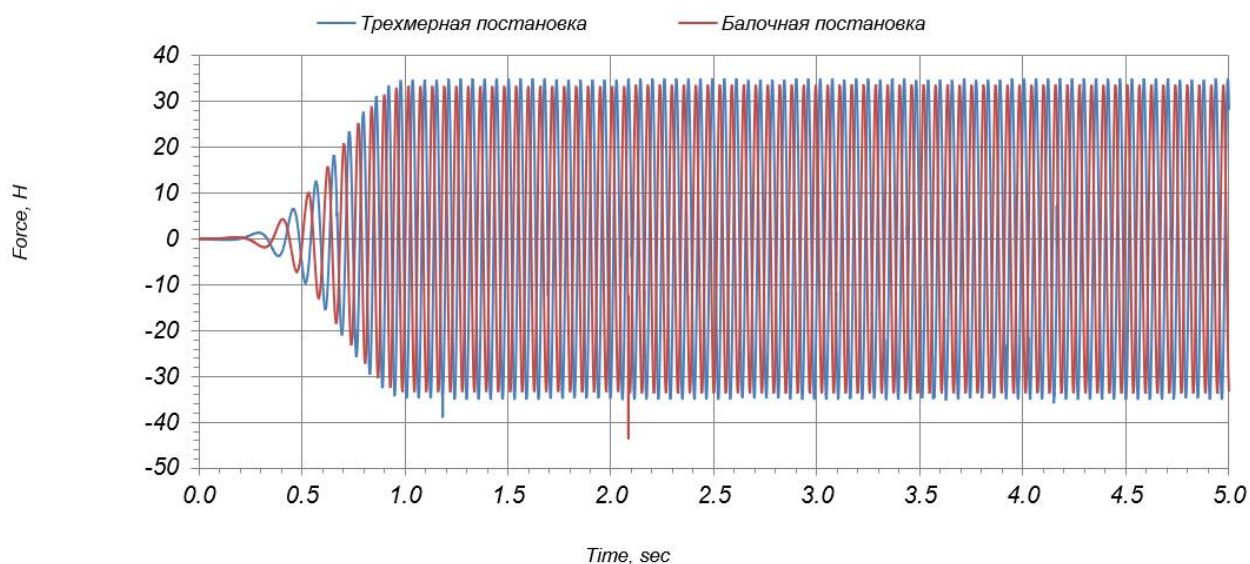


Рис.2.11 — Силы, возникающие на бушингах декантирующей центрифуги в трехмерной и балочной постановках

На представленном выше графике видно, что трехмерная и балочная модели дают хорошее приближение друг к другу. На самом деле для выравнивания одинаковых условий можно было использовать второй способ: сбалансировать трехмерную модель, навесив на нее точечные массы, с целью выравнивания положения центра масс без отклонения относительно оси вращения. В таком случае трехмерная модель дает такие же небольшие порядки в значении сил на подшипниках.

Учитывая результаты исследования полученных упругих тел, можно утверждать, что метод Крейга-Бэмптона работает корректно и его можно применять для моделирования гибких структур и механизмов, так как полученные модели достаточно достоверно описывают поведение конструкций. Кроме того, сравнение верификация балочных моделей показала, что балочные модели вполне применимы для расчетов без потери точности при переходе от трехмерных сеток.

## 2.7 ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕКАНТИРУЮЩЕЙ ЦЕНТРИФУГИ С УЧЕТОМ ДИСБАЛАНСА И УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

На основе выводов и закономерностей, полученных в параграфах выше, применим теорию балочных элементов для модели, характеристики которой соответствуют таблице 1.1. Полученная модель представлена на рисунке 2.9.

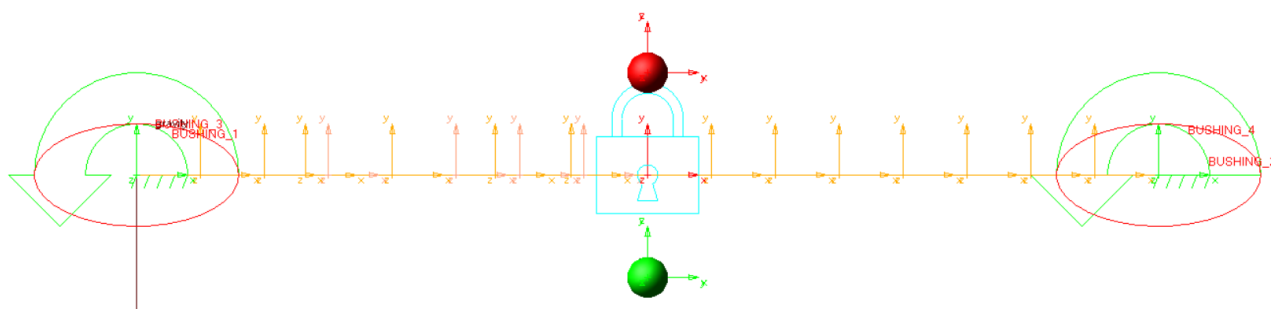


Рис 2.9 — Изолированная модель декантирующей центрифуги с учетом дисбаланса системы и упругих элементов.

Также рассмотрим модель с меньшей площадью сечения, чтобы проверить влияние изгибной жесткости на результаты. Построение модели осуществляется аналогичным образом, что и в разделе 1.2, за исключением того момента, что вместо твердотельных цилиндров, представляющих собой барабан и шнек, в данном случае вводятся их упругие балочные модели, построенные с помощью метода Крейга-Бэмптона. Массы для создания дисбалансов крепятся к центральным узлам барабана и шнека.

## 2.8 РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ И СРАВНЕНИЕ С ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ПОСТАНОВКОЙ

Для получения достоверных результатов необходимо использовать упругую модель, чтобы учесть все эффекты деформации и изменения формы, чего твердотельная модель не может дать.

Упругая модель может быть полезна при моделировании колебаний или вибраций объектов. При таких условиях использование жесткой модели может быть ограничено, поскольку она не может учесть все возможные колебания и деформации.

В результате моделирования получаются следующие графики зависимости сил на бушингах, представленные на рисунке 2.10.

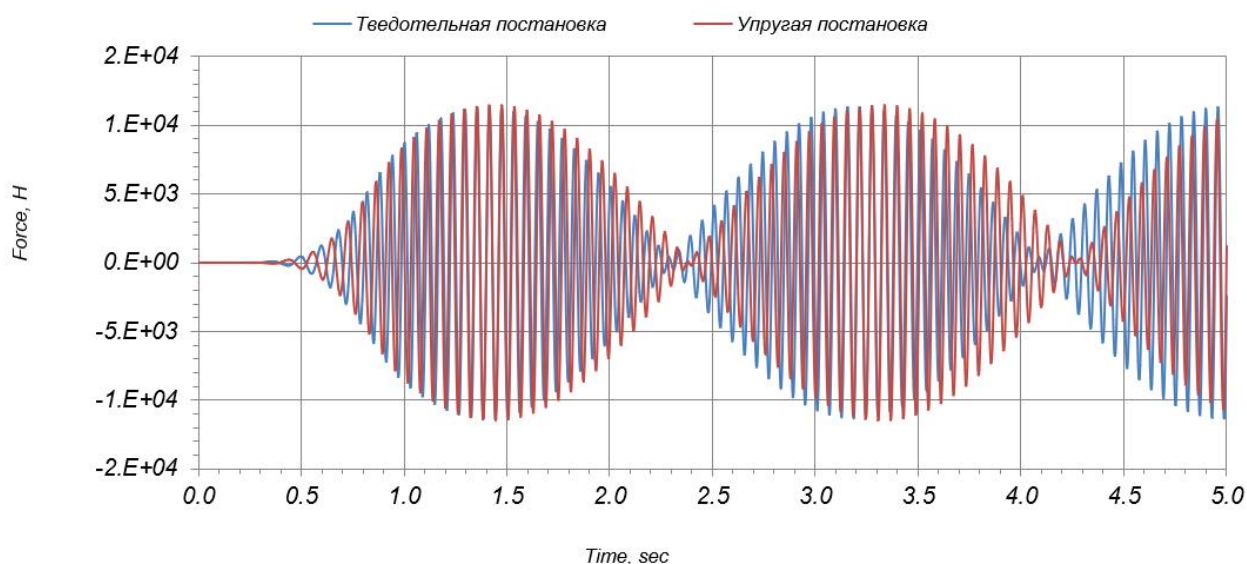


Рис.2.10 — Силы, возникающие на бушингах декантирующей центрифуги при твердотельной постановке и с учетом упругих элементов

В силу габаритов конструкции деталь все еще является очень жесткой на изгибы, что вполне согласуется с физикой. Для короткого толстого цилиндра изменения сил упругой конструкции относительно твердотельной незначительны, так как такая форма декантера уже не подходит под категорию балки.

Для получения модели, проявляющей ключевые упругие деформации нужно рассмотреть модель с меньшим значением изгибной жесткости, которую можно уменьшить или свойствами материала (уменьшением модуля Юнга), или размерными параметрами, а именно соотношением длины балки и характерного размера ее сечения.

Рассмотрим изолированную модель, которая включает в себя более податливые шнек и барабан. В реальности из-за более сложной формы деталей, наличия отверстий, сужений и прочего, барабан и шнек могут быть более гибкими. Получим данные условия искусственно, уменьшив жесткость на изгиб, снизив модуль Юнга.

Исходное значение модуль Юнга бралось 210 ГПа. Уменьшим его величину в 100 раз, что позволит уменьшить порядок частот в 10 раз согласно формулам (2.26), (2.39) и (2.41). Также будем рассматривать декантер с уменьшенным относительно длины диаметром. Параметры модели, представленными в таблице 2.8

Таблица 2.8

Деталь	Масса, кг	Радиус, мм	Длина, мм
Шнек	39.5	40	1000
Барабан	22.2	50	1000

В результате моделирования получились следующие графики зависимости сил на бушингах, представленные на рисунке 2.11.

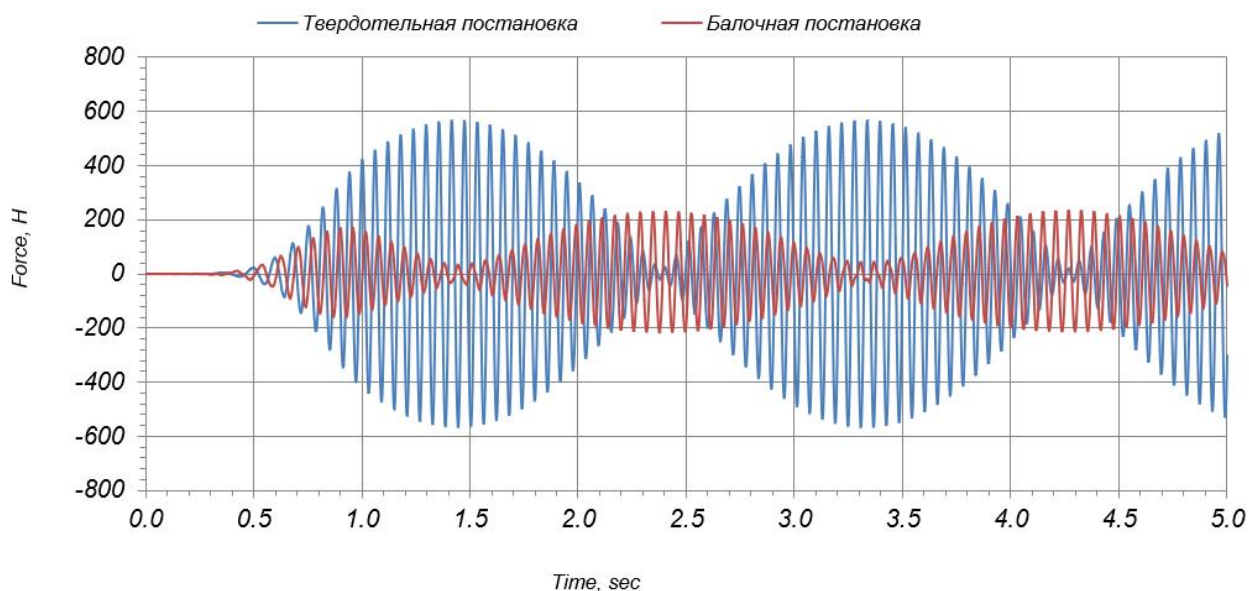


Рис.2.11 — Силы, возникающие на бушингах декантирующей центрифуги при твердотельной постановке и с учетом упругих элементов

Исходя из графика на рисунке 2.11 можно отметить, что для более гибкой модели свойственны меньшие амплитуды сил при использовании гибких элементов, что может быть связано с упругими эффектами шнека и барабана, когда силы и деформации компенсируют друг друга, демонстрируя более низкие значения сил на подшипниках при вращении конструкции.

Рассмотрим изолированный шнек с дисбалансом и сопоставим размах сил в этом случае. График зависимости сил имеет значения, представленные на рисунке 2.12.



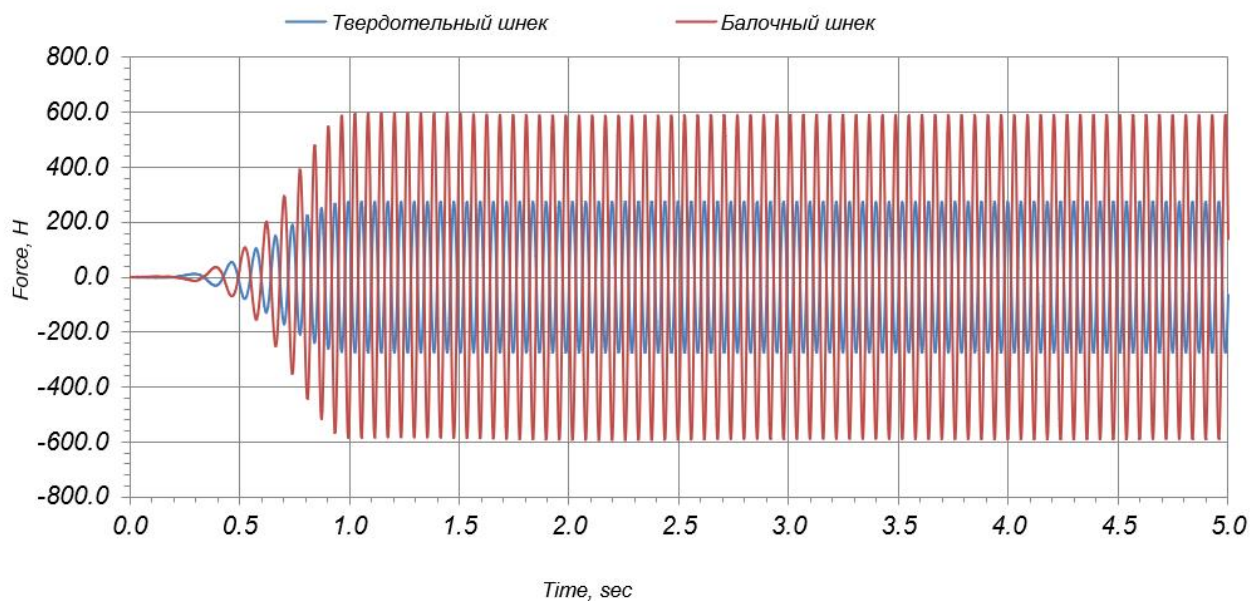


Рис.2.12 — Силы, возникающие на бушингах шнека в твердотельной постановке и с учетом упругих элементов

Исходя из графика на рисунке 2.12 можно отметить, что для более гибкого шнека свойственны большие амплитуды сил при использовании гибких элементов. Это связано с тем, что гибкая модель деформируется под действием центробежной силы, увеличивая отклонение центра масс от оси вращения, что еще больше увеличивает центробежную силу.

Интерес представляет проверка поведения упругого шнека при вращении с частотой близкой к одной из собственных частот. Рассмотрим изолированный шнек с дисбалансом в твердотельной и балочной постановках. Масса дисбаланса в обеих моделях равна 3 кг. Раскрутим шнек до первой собственной изгибной частоты, которая равна 16.2 Гц. Шнек будет постепенно разгоняться резонансной частоты за период времени равный одной секунде. Результаты усилий, приходящихся на опоры представлен на рисунке 2.13.

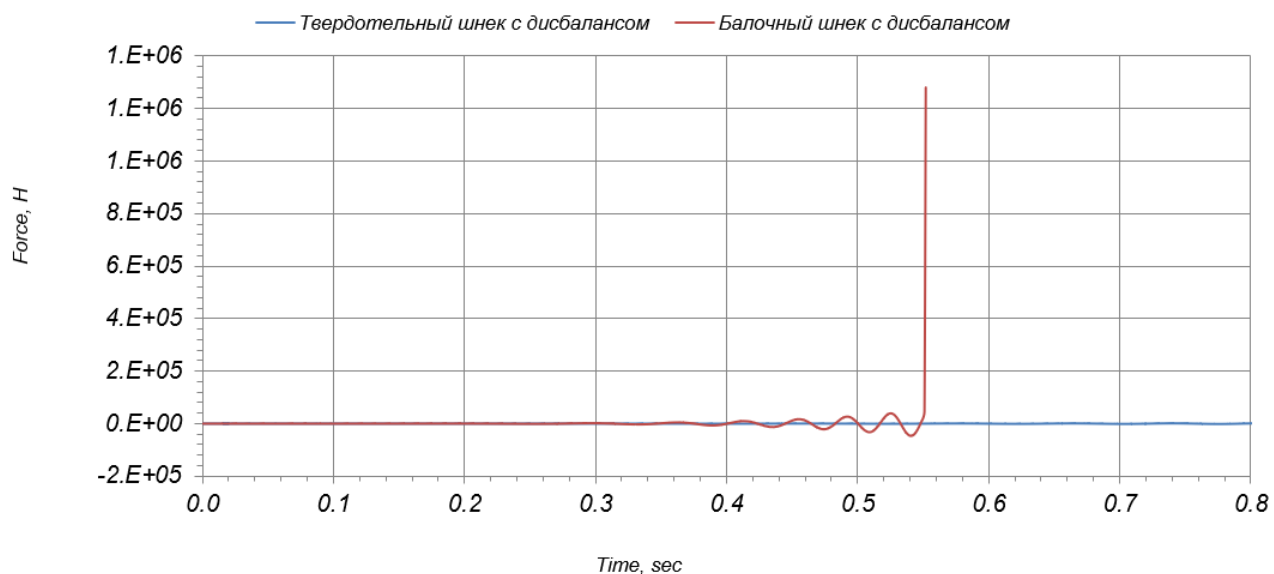


Рис.2.13 — Силы, возникающие на бушингах шнека в твердотельной постановке и с учетом упругих элементов

На полученном графике видно, что в балочной модели возникает нарастание амплитуды колебаний с резким скачком амплитуды силы и прекращение расчета, поскольку упругое тело *mpf* претерпело чересчур большие деформации (рисунок 2.14), что привело к ошибке расчета.

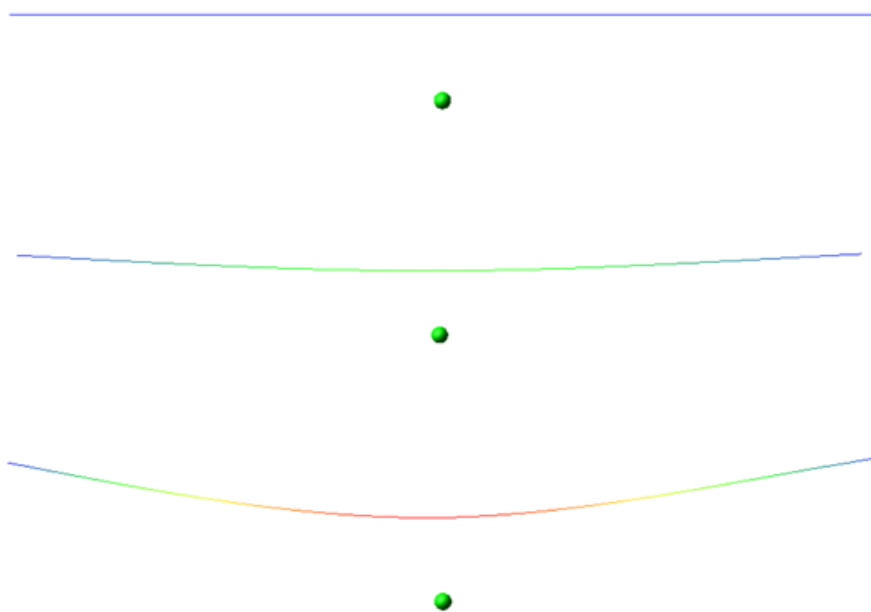


Рис.2.14 — Деформация шнека на резонансной частоте вращения

Это связано с резонансом сил, которые возникли при приближении скорости вращения к значению собственной частоты упругого шнека. Одновременно с этим в твердотельном шнеке идет постепенный разгон до указанной скорости оборота, что говорит о том, что твердотельная конструкция не чувствительна к такой скорости, так как не учитывает возникающие деформации системы. Таким образом, выбор твердотельной конструкции не целесообразен в случаях, где виброрасчеты оказывают большое влияние на точность результатов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе была создана изолированная модель декантирующей центрифуги методом конечных элементов и динамики твёрдых тел с использованием программных пакетов ADAMS и NASTRAN.

Было проведено исследование вибрационных нагрузок, возникновение которых связано с дисбалансами вращающихся элементов системы. Как было показано, даже незначительные дисбалансы во вращающихся компонентах декантирующей центрифуги могут привести к огромным усилиями в подшипниках, поэтому необходимо на стадии проектирования учитывать возможные погрешности при производстве барабана, шнека и прочих роторов, которые могут повлечь смещение центра масс от оси вращения.

Кроме того, была проверена точность и достоверность использования метода Крейга-Бэмптона на основе сравнения трехмерной и балочной моделей шнека и барабана между собой, а также с аналитическим решением в рамках нескольких анализов: частотного, статического и динамического.

Значения собственных частот изгибных, продольных и крутильных колебаний имеют хорошую сходимость с аналитическим решением. Кроме того, было показано, что редуцированная балочная модель в полной мере соответствует исходной трёхмерной постановке с точки зрения физических параметров и свойств, а значит, она вполне пригодна для динамического анализа, который в силу специфики исследуемого объекта требует достаточно малого шага по времени при симуляциях из-за высокочастотных вращений шнека и барабана. Возможность применения модели с меньшим числом конечных элементов без потери точности вычислений является важным преимуществом балочной модели, поскольку такой подход позволяет сэкономить вычислительные ресурсы и сократить время расчета, которое в случае полной сборки может достигать нескольких часов.

При сопоставлении результатов в твердотельной и упругих постановках было продемонстрировано, что учет деформации и динамических свойств шнека и барабана приводит к разительным изменениям. В случае учета податливости тел может появиться нарастание сил в подшипниках, поскольку деформация становится причиной возникновения дисбаланса, когда центр масс вращающегося тела смещается относительно оси вращения, что вызывает рост центробежных сил и проявление еще большей деформации. Помимо этого, наличие собственных форм и частот у вращающихся деталей декантирующей центрифуги может привести к резонансу в случае совпадения частоты вращения шнека и барабана с одной из собственных частот. Исходя из этого можно заключить, что использование упругих тел при моделировании является чрезвычайно важной необходимостью, которая поможет учесть и спрогнозировать нежелательные эффекты еще на стадии разработки.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с
2. Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. 336 с.
3. Прохоров А. М. Большая советская энциклопедия М: Советская энциклопедия. 1973. —Т.13. — 608 с.
4. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов /Пер. с англ. языка под редакцией Э.И. Григолюка. М.: Мир, 1976. 480 с.
5. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: изд-во «Наука», ГРФМЛ, 1967. – 442 с
6. Фролов К.В. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. М.: Машиностроение. Т. 1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. и доп. /под ред. Болотина В.В. 1999 504 с.
7. Авроров В. А., Авроров Г. В. Центрифуга. – 2011.8 с.
8. Бойков В. Г. и др. Моделирование движения механической системы, состоящей из деформируемых упругих тел, путём интеграции двух пакетов: Euler и fidesys //Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – №. 3 (63). – С. 131-153.
9. ГОСТ ИСО 1940 - 1–2007. Вибрация. Требования к качеству балансировки жестких роторов. Часть 1. Определение допустимого дисбаланса. – Введ. 2008 – 01 – 25. – М.: Стандартинформ, 2008. – 27 с.
- 10.Замятин В. М., Дубовик В. А. Влияние дисбаланса на динамику центрифуги //Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2005. – Т. 308. – №. 6. – С. 144-146.
- 11.Козлов В. А., Новак В. И. Осадительно-фильтрующие центрифуги «Декантер» техническая основа обезвоживания Угольного шлама //Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). – 2011. – №. 7. – С. 229-237.

12. Попов И. П. Резонансы сил и скоростей // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2019. – №. 4 (47). – С. 62-66.
13. Юдаков А. А. Принципы построения общих уравнений динамики упругих тел на основе модели Крейга–Бэмптона и их практически значимых приближений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2012. – №. 3. – С. 126-140.
14. AK A. F., SARI G. The Vibration Analysis of Product Feed Pipe In Industrial Decanter Centrifuge. – 2011
15. Bell G. R. A. Analysis and Development of a Decanter Centrifuge: Power consumption analysis, development of a composite bowl, and feed accelerator analysis. – 2013.
16. Leoro J. et al. Application of the Craig-Bampton method to blade rotation// E3S Web of Conferences. – EDP Sciences, 2021. – Т. 258. – С. 09075.
17. Adams flex theory [Электронный ресурс]. -Режим доступа: <https://simcompanion.mscsoftware.com/infocenter/index?page=content&id=DOC9304&actp=RSS>