

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Теоретическая механика»

Работа допущена к защите

Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., проф

_____ А. М. Кривцов

« ____ » _____ 2016 г.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени

МАГИСТРА

Тема:

**ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
ГИДРОРАЗРЫВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПОСТАНОВКИ НА
ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ХГД**

Направление: 01.04.03 — Механика и математическое моделирование

Выполнил студент гр. 63604/1

_____ А. Д. Степанов

Руководитель, д.ф.-м.наук, профессор

_____ А. М. Линьков

Консультант по вопросам
охраны труда

_____ В. В. Монашков

Санкт-Петербург

2016

РЕФЕРАТ

28 с., 8 рис., 0 табл., 0 приложений, 29 источников

Гидроразрыв пласта, модифицированная постановка, уравнение скорости,
асимптотический зонтик

Настоящая работа посвящена моделированию гидроразрыва пласта в модифицированной постановке. На примере задачи ХГД разработан подход, использование которого позволяет применить модифицированную постановку к трехмерной задаче о гидроразрыве пласта.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ВВЕДЕНИЕ	3
1.1. Обзор литературы	4
1.2. Модифицированная постановка и цель работы	6
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ	8
2.1. Традиционная формулировка	8
2.2. Модифицированная формулировка	10
2.3. Модифицированная постановка задачи ХГД	11
2.4. Нормировка	13
2.5. Сведение задачи к динамической системе	14
2.6. Построение сетки	14
2.7. Численная схема	15
2.8. Используемые методы решения ОДУ	17
2.9. Численные результаты и их обсуждение	19
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	23
ОХРАНА ТРУДА	25
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	30

ВВЕДЕНИЕ

Гидроразрыв пласта (ГРП) — метод, широко применяющийся в газо- и нефтедобывающей промышленности для интенсификации добычи углеводородов из скважин.

Первый гидроразрыв пласта был проведен в 1947 г. в США. К середине 50-х годов проводилось в среднем 3000 гидроразрывов в год. К 1988 году только в США количество проведенных ГРП составило более 1 млн [29]. Со временем метод ГРП стал применяться не только для интенсификации притока к скважине, но и для выработки энергии из геотермальных резервуаров, захоронения промышленных отходов и определения пластовых напряжений.

Методика гидроразрыва заключается в следующем: сначала в скважине путем перфорирования создается «зародыш» трещины — перфорация, после этого в скважину закачивается вязкая жидкость, что вызывает рост давления, который приводит к развитию трещины. Затем, когда трещина достаточно раскрывается, в нее закачивают специальный материал — проппант, предотвращающий закрытие трещины. [1, 4].

Как видно из приведенного выше краткого описания методики, гидроразрыв пласта — комплексный процесс, включающий в себя различные процессы и явления:

- деформирование горной породы под действием давления на стенки трещины;
- течение жидкости внутри трещины;
- разрушение горной породы вблизи кончика трещины.

Следовательно, необходимо решать задачу, лежащую на пересечении разных областей знаний и состоящую из нескольких связанных задач. Каждая из этих задач может быть описана своей математической моделью разной степени сложности. Обычно деформирование горной породы описывается в рамках линейной теории упругости с помощью нелокального соотношения между раскрытием трещины и давлением жидкости на ее поверхность, течение жидкости описывается в рамках теории смазки, связывающей между собой поток, раскрытие и градиент давления в трещине. В качестве критерия распространения трещины используют условие достижения коэффициентом интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины критического значения [1, 7, 13].

Одна из особенностей проведения ГРП состоит в трудности контроля за происходящими на большой глубине процессами. Проведение экспериментов для исследования ГРП так же затруднено в силу сложности интерпретации получаемых данных. Поэтому для лучшего понимания и контроля ГРП необходимы и широко применяются численные модели.

1.1. Обзор литературы

Начало моделирования гидроразрыва было положено в 1950-х годах. В 1955 году Христианович и Желтов предложили модель продольной трещины большой высоты [5]. В этой модели трещина моделируется плоским разрезом бесконечной высоты, находящимся в линейно упругой среде. В дальнейшем Гиртсма и де Клерк [3] разработали модель аналогичной трещины, находящейся в однородной упругой среде, деформации которой могут быть описаны в рамках линейной теории упругости. Жидкость считалась вязкой, а ее течение — ламинарным. Дополнительно делалось предположение о том, что вертикальное сечение трещины представляет собой прямоугольник. Данная одномерная модель получила название ХГД, схематичное изображение геометрии трещины представлено на рис. 1.1.

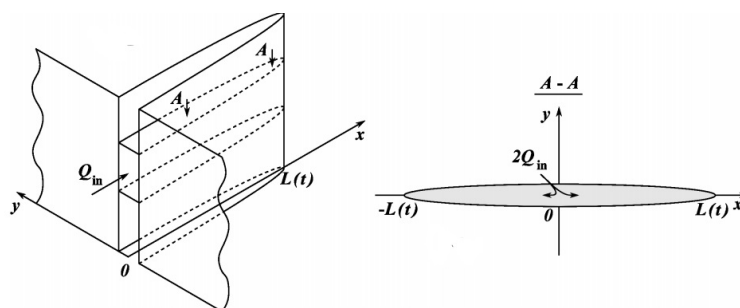


Рис. 1.1. Геометрия модели ХГД [24].

Другая одномерная модель — это модель Перкинса–Керна–Нордгрена (ПКН). В ней предполагается, что условие плоской деформации выполняется в плоскостях, параллельных фронту трещины, а давление в каждом сечении постоянно. В модели ПКН считается, что длина трещины намного больше ее высоты, что вместе с условием плоской деформации позволяет поперечным сечениям раскрываться независимо друг от друга [21]. Раскрытия трещины в разных плоскостях связываются с помощью уравнений неразрывности и течения жидкости. Геометрия модели ПКН приведена на рис. 1.2.

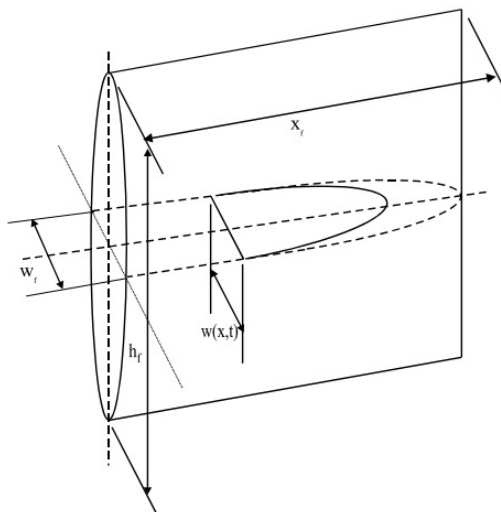


Рис. 1.2. Геометрия модели ПКН [21].

Существенные недостатки моделей ПКН и ХГД — отсутствие роста трещины в высоту и невозможность учесть слоистость горной породы. Однако, на их основе разрабатывались первые численные модели, позволявшие изучить влияние вязкости жидкости, утечек, объема закачиваемой жидкости и скорости закачки на результат проведения ГРП.

Дальнейшим развитием моделей гидроразрыва стали псевдо трехмерные модели (P3D). В рамках этих моделей поперечное сечение трещины может менять высоту. Появление этих моделей связано с работой [20], в которой рассмотрено поведение трещины в трехслойной среде. Рост трещины описывался в рамках линейной теории разрушения, в предположении о том, что каждый слой представляет собой однородный изотропный линейно упругий материал, а развитие трещины обуславливается достижением критического коэффициента интенсивности напряжений. Первым описанием P3D модели можно считать работу [18], однако исследования в этом направлении продолжают по сей день [22]. Примером P3D модели может служить ячеистая модель, геометрия которой представлена на рис. 1.3. Каждая ячейка обладает геометрией модели ПКН, но имеет свою высоту и раскрытие. Течение жидкости в каждой ячейке считается одномерным, а рост ячейки в высоту реализуется, например, квазистатически и обуславливается достижением КИН критического значения.

Следующим шагом стало появление плоской трехмерной модели (PL3D) [19]. В ней предполагается, что трещина гидроразрыва распространяется в одной плоскости, течение жидкости считается двумерным, а для описания деформирования горной породы используются уравнения трехмерной теории упругости.

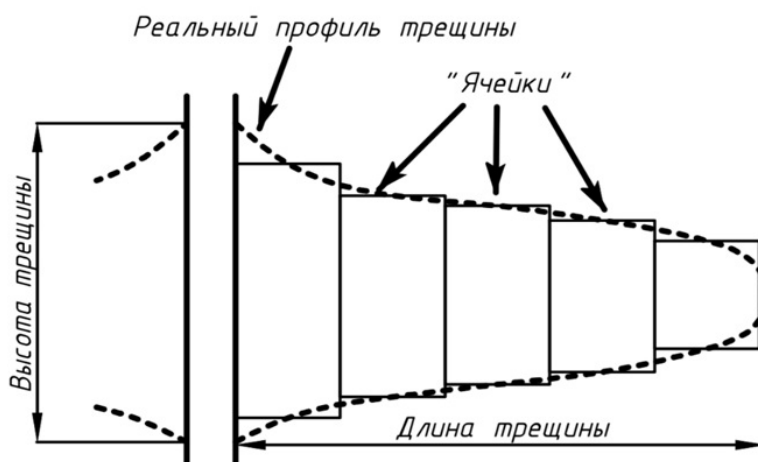


Рис. 1.3. Геометрия ячеистой Р3D модели.

PL3D модели оказываются более точными, чем Р3D и позволяют снять некоторые ограничения, существующие в Р3D моделях [1].

Необходимость интерпретировать в реальном времени данные о проведении операции ГРП требует наличия симулятора, способного работать с достаточной скоростью. Для этого лучше всего подходил бы симулятор на базе PL3D модели, но на данный момент PL3D модели оказываются весьма затратны с точки зрения вычислительных ресурсов и не обеспечивают нужную скорость вычислений.

В ряде работ [1, 12] были показаны трудности, возникающие при решении задачи о гидроразрыве в ее традиционной формулировке (см. раздел 2.1.), связанные с сильной нелинейностью входящих в нее операторов, с необходимостью использовать нелокальный гиперсингулярный оператор для описания упруго отклика породы, сингулярностью давления у вершины трещины, возникающей при пренебрежении отставанием фронта жидкости от кончика трещины, и наличием подвижной границы. Эти трудности оказывают существенное влияние на скорость и качество работы симуляторов.

1.2. Модифицированная постановка и цель работы

Для эффективного решения задачи о гидроразрыве была разработана модифицированная постановка [6–9, 23], заключающаяся в выборе удобных переменных (скорость частиц жидкости и раскрытие трещины), использовании уравнения скорости вместо уравнения глобального баланса массы и применении универсального асимптотического зонтика (см. раздел 2.2.).

Не преодолевая до конца упомянутые трудности, связанные с нелинейно-

стью задачи, сингулярностью давления у вершины трещины и необходимостью использовать гиперсингулярный оператор, модифицированная постановка дает возможность использовать эффективные численные методы отслеживания фронта [11, 17].

Преимущества применения модифицированной постановки были показаны путем получения новых аналитических решений и построения точных и вычислительно эффективных численных схем для одномерных моделей [7, 23, 26]. Однако, решение задачи на примере одномерных моделей допускало использование упрощений, недоступных в трехмерных задачах. В частности, моделирование проводилось в нормированных на длину трещины координатах, в которых частная производная по времени от раскрытия в вершине трещины равна нулю. В трехмерном случае такая нормировка невозможна, потому что фронт трещины состоит из множества точек. Кроме того, в работах [23, 25] использовалось обращение гиперсингулярного оператора упругости, которое может быть найдено аналитически только для прямолинейной или круговой трещины.

Цель данной работы — разработка подхода, основанного на модифицированной постановке задачи, использование которого позволит получить устойчивое и точное решение задачи ХГД с минимальными вычислительными затратами. Подход должен быть применим к решению трехмерных задач, поэтому решение должно быть найдено в глобальных, а не нормированных координатах и с использованием гиперсингулярного оператора, а не его обращения. Последнее открывает возможность представить задачу, как динамическую систему. Для этого необходимо замкнуть систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), получающуюся после пространственной дискретизации задачи, уравнением скорости, правая часть которого вычисляется с использованием универсального асимптотического зонтика.

В разделах 2.1. и 2.2. приведены соответственно традиционная и модифицированная постановки задачи. В 2.3.-2.6. описана модифицированная постановка задачи ХГД, используемая нормировка и метод дискретизации задачи. В разделах 2.7.-2.8. приведены численная схема и методы решения получаемой системы ОДУ, основные численные результаты. В Заключение обобщены полученные результаты численных экспериментов и сделаны выводы.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

2.1. Традиционная формулировка

Традиционная постановка задачи гидроразрыва приводится подробно во многих работах [1, 12–14, 19]. Для описания течения жидкости используется уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{q} = q_e,$$

где w — раскрытие трещины, \underline{q} — поток жидкости, q_e — утечки жидкости. Связь между потоком жидкости и давлением осуществляется с помощью уравнения Пуазейля:

$$\underline{q} = -D(w,p)\nabla p,$$

где p — давление, а D — известный оператор, например, для ньютоновской жидкости $D = \frac{w^3}{\mu'}$, μ' — вязкость жидкости. При подстановке второго уравнения в первое получается уравнение Рейнольдса:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot (D(w,p)\nabla p) + q_e.$$

Для описания деформирования горной породы используется нелокальное соотношение между давлением и раскрытием [1, 13, 19]

$$Aw = p, \tag{2.1}$$

где A , как правило, оператор линейной теории упругости. Решение этого уравнения ищется в классе функций, для которых раскрытие на контуре равно нулю:

$$w(\underline{x}_*, t) = 0, \quad \underline{x}_* \in L_f \tag{2.2}$$

где L_f — контур трещины. Критерием распространения трещины служит критерий достижения КИН K_I критического значения K_{IC} :

$$K_I = K_{IC}. \tag{2.3}$$

Для завершения постановки задачи необходимо задать начальные и граничные условия. В качестве граничных условий используют уравнение (2.2) и заданный в источнике поток:

$$\underline{q}(0,t) = \underline{q}_0(t). \quad (2.4)$$

Начальные условия задают контур и раскрытие трещины в исходный момент времени:

$$\begin{aligned} L_f(t_0) &= L_{f0} \\ w(\underline{x},t_0) &= w_0(\underline{x}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Необходимо отметить следующее:

- Оператор D в общем случае содержит раскрытие в степени $\frac{2n+1}{n}$, это приводит к сильной нелинейности задачи.
- Оператор A — нелокальный и гиперсингулярный. В некоторых работах [1, 13] уравнение (2.1) используют в обращенном виде, что приводит к необходимости численно вычислять оператор обратный к A . Это дополнительно увеличивает необходимые вычислительные затраты.
- В традиционной постановке для отслеживания фронта трещины используется только уравнение глобального баланса массы, которого недостаточно для описания фронта состоящего из множества точек.
- Выбор в качестве основных переменных потока q и раскрытия w приводит к тому, что при попытке вычислить скорость фронта $v = q/w$ у вершины трещины возникает неопределенность вида $0/0$, т.к. одно из граничных условий — равенство раскрытия нулю, а поток равен нулю как следствие определения этой величины: $q = wv$. Из-за возникновения неопределенности скорость фронта должна быть получена посредством асимптотического анализа задачи. Это затрудняет использование алгоритмов отслеживания фронта жидкости [13].

Таким образом, традиционная постановка обладает некоторыми недостатками, которые в конечном итоге приводят к неэффективности ее использования при решении задачи о гидроразрыве пласта.

2.2. Модифицированная формулировка

В ряде работ [6–9] была сформулирована модифицированная постановка задачи о гидроразрыве пласта. Анализ фундаментальных соотношений [9] показал, что вместо традиционно используемого потока, который равен

$$\underline{q} = w\underline{v},$$

удобнее использовать переменные w и \underline{v} отдельно, выделяя скорость частиц жидкости как отдельную независимую переменную. Тогда уравнения переноса, например, ньютоновской жидкости могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (w\underline{v}) &= q_e, \\ \underline{v} &= -\frac{w^2}{\mu'} \nabla p. \end{aligned}$$

Вместо глобального баланса массы для отслеживания фронта жидкости можно использовать уравнение, связывающее между собой скорость движения фронта \underline{v}_* и полную производную по времени от материальных координат точек фронта:

$$\underline{v}_* = \frac{dx_*}{dt} = \lim_{x \rightarrow x_*} \underline{v}_n.$$

Это уравнение, называемое уравнением скорости, может считаться фундаментальным в том смысле, что оно использует только представление механики сплошных сред о скорости частиц, как о полной производной материальной координаты по времени. Для его записи не требуется привлечение законов сохранения, уравнений динамики или определяющих соотношений.

Уравнение упругости имеет вид, например, [9]:

$$-\frac{E'}{8\pi} \int_S \frac{w(y)}{R^3} dS = p(x,t), \quad x \in S, \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2},$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, R — расстояние между точками x и y .

Граничные, начальные условия и критерий распространения трещины совпадают с аналогичными из раздела 2.1.: решение ищется в классе функций, удовлетворяющим условию (2.2), в источнике задается поток (2.4), начальные

условия задаются в виде (2.5), критерием распространения трещины служит (2.3).

В работе [9] показано, что при пренебрежении отставанием фронта жидкости от фронта трещины, раскрытие у вершины может быть представлено в мономиальной форме и зависит только от скорости распространения фронта:

$$w = A(v_*)r^{\alpha(v_*)}.$$

Это соотношение названо универсальным асимптотическим зонтиком. Его использование служит вычислению правой части уравнения скорости.

2.3. Модифицированная постановка задачи ХГД

Решается задача ХГД, геометрия которой приведена на рис. 1.1. Для практически важного случая следует рассматривать жидкость со степенным реологическим законом:

$$\tau = M\dot{\gamma}^n, \quad (2.6)$$

где τ — сдвиговые напряжения, $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, M — индекс консистенции, n — индекс поведения жидкости. Для ньютоновской жидкости $n = 1$; для идеально пластической $n = 0$. На практике обычно используют утончающуюся жидкость $0 < n < 1$.

В согласии с модифицированной постановкой (см. раздел 2.2.) уравнения неразрывности и Пуазейля записываются, соответственно, в виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial (wv)}{\partial x} - q_l, \quad (2.7)$$

$$v = \left[\frac{w^{n+1}}{\mu'} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right]^{1/n}, \quad (2.8)$$

где w — раскрытие трещины, p — давление в трещине, q_l — утечки жидкости в пласт, $\mu' = \theta M$, $\theta = 2 \left[\frac{2(2n+1)}{n} \right]^{1/n}$.

Как обычно (например, [1]), можно пренебречь отставанием фронта жидкости от фронта трещины. Тогда уравнение скорости принимает вид:

$$\frac{dx_*}{dt} = v_* = \lim_{x \rightarrow x_*} \left(-\frac{w^{n+1}}{\mu'} \frac{\partial p}{\partial x} \right)^{1/n}. \quad (2.9)$$

Для нахождения раскрытия трещины необходимо воспользоваться гиперсингулярным интегралом теории упругости, который в рассматриваемом частном случае принимает вид:

$$p(x,t) = -\frac{E'}{4\pi} \int_0^{x_*} \left[\frac{1}{(\xi-x)^2} + \frac{1}{(\xi+x)^2} \right] w(\xi,t) d\xi, \quad 0 \leq x \leq x_*, \quad (2.10)$$

где $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. При записи уравнения (2.10) было учтено, что задача симметрична относительно начала координат ($w(-x) = w(x)$, $p(x) = p(-x)$). Как и выше, предполагается, что раскрытие трещины принадлежит классу функций, для которого верно

$$w(x_*,t) = 0. \quad (2.11)$$

Рост трещины описывается в рамках линейной механики разрушения. Критерием распространения трещины служит достижение КИН критического значения:

$$K_I = K_{IC}.$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде, например, [15]:

$$w(x,t) = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \frac{K_{IC}}{E'} \sqrt{x_* - x} + O((x_* - x)^\alpha),$$

где $1 \geq \alpha > 1/2$. Рассмотрим важный для практики случай [16], когда основное сопротивление продвижению трещины вызвано вязкостью жидкости μ' , а не трещиностойкостью K_{IC} . Тогда можно считать, $K_{IC} = 0$. В таком случае универсальный асимптотический зонтик принимает вид [9]:

$$w = t_n^{1-\alpha} A_\mu(\alpha) v_*^{1-\alpha} (x_* - x)^\alpha, \quad (2.12)$$

где $\alpha = 2/(n+2)$, $A_\mu(\alpha) = [(1-\alpha) B(\alpha)]^{-\frac{\alpha}{2}}$, $B(\alpha) = \frac{\alpha}{4} \cot[\pi(1-\alpha)]$, $t_n = \left(\frac{\mu'}{E'}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Подставляя (2.12) в (2.9), получаем:

$$\frac{dx_*}{dt} = v_* = \frac{1}{t_n} [A_\mu(\alpha)]^{-\frac{1}{1-\alpha}} \lim_{x \rightarrow x_*} \left[\frac{w(x)}{(x_* - x)^\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.13)$$

Задача содержит производные второго порядка по пространственной ко-

ординате и первого порядка по времени. Следовательно, необходимо поставить два граничных и одно начальное условие. Для уравнений (2.7) и (2.8) граничные условия следующие: первое — это условие нулевого раскрытия на фронте трещины (2.11), оно будет удовлетворено автоматически, т.к. решение уравнения (2.10) ищется в соответствующем классе функций. Второе граничное условие — это заданный в источнике ($x = 0$) поток $Q = 2q_0$. Множитель 2 учитывает, что задача симметрична относительно начала координат. В терминах скорости частиц и раскрытия оно может быть записано в виде

$$w(0)v(0+) = q_0. \quad (2.14)$$

Использование предела скорости справа учитывает, что в точке $x = 0$ скорость имеет конечный разрыв ($v(0+) = -v(0-)$). В качестве начальных условий в момент времени t_0 необходимо задать начальное раскрытие $w_0(x)$ и начальную полудлину трещины x_{*0} :

$$\begin{aligned} w(x, t_0) &= w_0(x) & |x| \leq x_*(0), \\ x_*(0) &= x_{*0}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Таким образом, необходимо решать систему уравнений (2.7), (2.8), (2.10) в классе функций $w(x, t)$ с асимптотикой (2.12), с граничными условиями (2.11), (2.14) и начальными условиями (2.15).

2.4. Нормировка

Для исключения из уравнений E' и μ' можно рассмотреть нормирующее раскрытие

$$w_n = \left(t_s \frac{E'}{\mu'} \right)^{\frac{1}{n+2}}.$$

Здесь t_s множитель, который позволяет выбрать удобный масштаб времени. Например, если в уравнении (2.6) размерность скорости деформации равна 1/с, то использование $t_s = 60^n$ поменяет размерность вязкости на Па · мин. В таком случае скорость, начальное время и другие величины, в размерность которых входит время, могут быть выражены в единицах минут. Это удобнее, чем измерять время в секундах, потому что характерное время проведения ГРП составляет

десятки минут. Нормированные переменные имеют вид:

$$\begin{aligned} w' &= \frac{w}{w_n} & p' &= \frac{p}{w_n E'} \\ q'_l &= \frac{q_l}{w_n} & w'_0 &= \frac{w_0}{w_n} \\ q'_0 &= \frac{q_0}{w_n}. \end{aligned}$$

После перехода к таким переменным, можно считать, что $E' = 1$ и $\mu' = 1$.

2.5. Сведение задачи к динамической системе

Сведение задачи к динамической системе осуществляется следующим образом. Выбирается интервала длиной L , который для определенности может быть в два раза больше начальной полудлины трещины x_{*0} . На этом интервале проводится дискретизация правых частей уравнений (2.7), (2.8), (2.10). Для дискретизации уравнений в частных производных используются конечные разности, для интегрального уравнения (2.10) — подходящая квадратура. Аппроксимация раскрытия и скорости заключается в выборе $M + 1$ узлов x_i , в которых задаются и вычисляются значения $w_i = w(x_i, t)$, $v_i = v(x_i, t)$. При этом в узлах, лежащих за фронтом трещины ($x_i \geq x_*$), раскрытие и скорость считаются равными нулю. Правая часть уравнения неразрывности равна нулю в таких узлах. Из интегрального соотношения (2.10) могут быть найдены значения давления p_i во внутренних узлах трещины. Узловые значения скорости v_i могут быть получены путем подстановки найденных узловых значений давления в уравнение Пуазейля (2.8). После этого в уравнении (2.7) правая часть становится известной. В результате получается система из M уравнений с M неизвестными w_i (w_{M+1} всегда равняется нулю, потому что когда фронт трещины доходит до него, интервал удваивается). Однако, система из M уравнений оказывается незамкнутой, потому что содержит в себе неизвестную величину — актуальную полудлину трещины x_* , которая входит в уравнение (2.10). Замкнутая система получается добавлением к упомянутой незамкнутой системе уравнения скорости (2.13).

2.6. Построение сетки

Для разбиения интервала длиной L на M отрезков необходимо задать координаты $M + 1$ узла. Первый узел имеет координату $x_1 = 0$ и совпадает с началом координат. Остальные узлы располагаются друг от друга на расстоянии

$\Delta x = L/M$, а их координаты равны $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ ($i = 2, \dots, M+1$). Промежуточные точки имеют координаты $x_{i-1/2} = x_i - \Delta x/2$, ($i = 2, \dots, M+1$). Положение фронта $x = x_*$ известно на каждом шаге по времени. Используя его, может быть вычислен номер узла i_* , ближайшего к фронту, но до которого фронт еще не дошел. В этом и последующих узлах с номерами $i = i_*, \dots, M+1$ считается, что $w_i = 0$, $v_i = 0$.

В процессе моделирования полудлина трещины x_* возрастает. В тот момент, когда она достигает значения L , интервал L удваивается. В результате интервал снова оказывается в два раза больше полудлины трещины. Это позволяет сохранять число узлов $M+1$ неизменным, удваивая Δx . После удвоения, значения раскрытия в узлах с нечетными номерами совпадают с раскрытиями в узлах новой сетки, и задача становится аналогичной той, что была в начале моделирования, но с удвоенным Δx . Удвоение Δx позволяет увеличивать шаг по времени без потери устойчивости явных схем интегрирования.

2.7. Численная схема

Первое уравнение, которое должно быть решено на каждом шаге — уравнение упругости (2.10). Для этого гиперсингулярный интеграл разбивается на сумму интегралов, а раскрытие аппроксимируется кусочно-постоянной функцией на каждом интервале интегрирования:

$$-4\pi p_i = \sum_{j=1}^{M+1} A_{ij} w_j \quad i = 1, \dots, i_* - 1,$$

Здесь $A_{ij} = \frac{1}{\tau_j - x_i} - \frac{1}{\tau_{j+1} - x_i} + \frac{1}{\tau_j + x_i} - \frac{1}{\tau_{j+1} + x_i}$ — элемент матрицы коэффициентов влияния, при этом $\tau_1 = 0, \tau_2 = \Delta x/2, \tau_M = x_{M+1} - \Delta x/2, \tau_{M+1} = x_{M+1}$, и $\tau_j = x_{j-1/2}$ для $j = 2, \dots, M-1$. Для исключения деления на ноль первая точка коллокации выбирается смещенной от начала координат: $x_1 = 0.0000001\Delta x$. Можно заметить, что коэффициенты A_{ij} обратно пропорциональны размеру сетки. Отсюда следует, что можно один раз вычислить матрицу A_0 для произвольного размера сетки, например $\Delta x = 1/M$. Тогда для конкретной сетки на интервале L , коэффициент A_{ij} находится делением заранее вычисленного коэффициента A_{0ij} на L .

После определения давления в узлах сетки, с помощью уравнения (2.8)

находится скорость. В первом узле для вычисления скорости используется аппроксимация давления правой конечной разностью:

$$v_1 = (w_1^{n+1} \frac{p_1 - p_2}{\Delta x})^{1/n}.$$

В узле с номером $i_* - 1$ для нахождения скорости используется асимптотическое соотношение [26]:

$$v_{i_*-1} = v_* [1 + a_v (1 - x_{i_*-1}/x_*)],$$

где $a_v = -n/[(n+1)(n+4)]$, а скорость продвижения фронта может быть найдена с использованием асимптотического зонтика (2.13):

$$\frac{dx_*}{dt} = [A_\mu(\alpha)]^{-\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{w_{i_*-1}}{(x_* - x_{i_*-1})^\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.16)$$

В оставшихся узлах скорость фронта находится по формуле, предложенной в [26] и учитывающей сингулярность давления около фронта:

$$v_i = \left[w_i^{n+1} \frac{p_{i-1} - p_{i+1}}{\Delta f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})} \right]^{\frac{1}{n}},$$

где $\Delta f = \frac{(x_* - x_i)^{\alpha(n+1)}}{\alpha(n+1)-1} \left[\frac{1}{(x_* - x_{i+1})^{\alpha(n+1)-1}} - \frac{1}{(x_* - x_{i-1})^{\alpha(n+1)-1}} \right]$.

В частных случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ выражение для Δf сводится к центральным разностям, но в остальных случаях использование центральных разностей для вычисления градиента давления приводит к неудовлетворительным результатам. На рис. 2.1 изображена погрешность вычисления градиента давления у вершины трещины при $\alpha = 0.7$ с использованием центральных разностей и модифицированной формулы. Видно, что с приближением к вершине погрешность, получаемая с использованием центральных разностей, существенно возрастает, тогда как модифицированная формула остается точной.

Таким образом, раскрытие и скорости известны в каждом узле сетки. Они используются в конечно-разностной схеме для уравнения (2.7). Для первого узла схема учитывает граничное условие (2.14) и имеет вид:

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{3q_0 - (4w_2v_2 - w_3v_3)}{2\Delta x}. \quad (2.17)$$

Для узлов с номерами меньшими, чем i_* , ОДУ принимает вид:

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{-w_{i+1}v_{i+1} + w_{i-1}v_{i-1}}{2\Delta x},$$

для узлов с номерами большими или равными i_* правая часть уравнения неразрывности обращается в ноль:

$$\frac{dw_i}{dt} = 0. \quad (2.18)$$

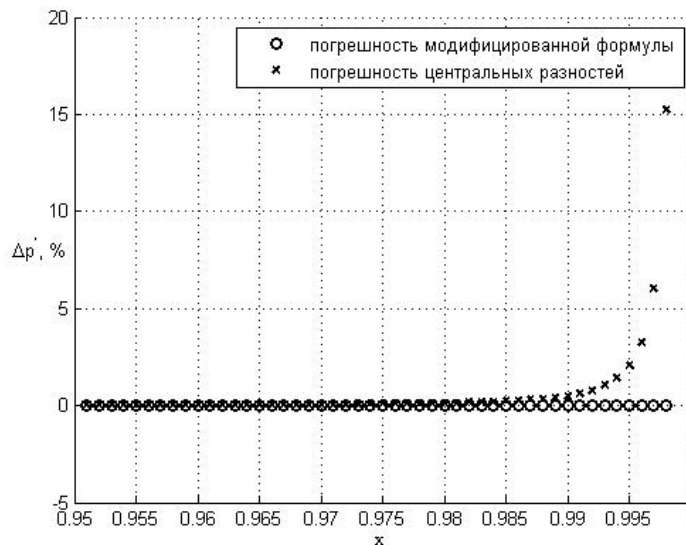


Рис. 2.1. Погрешность вычисления давления у вершины трещины для $\alpha = 0.7$.

Дополняя систему уравнений (2.17)-(2.18) уравнением скорости (2.16), получаем $M + 1$ уравнение, которое необходимо решать с $M + 1$ начальными условиями:

$$\begin{aligned} w_i(t_0) &= w_{i0} & i &= 1, \dots, M \\ x_* &= x_{*0}. \end{aligned}$$

Как отмечено, $w_{i0} = 0$ при $x_i > x_{*0}$.

Полученная система уравнений может быть решена стандартными методами, такими как методы Рунге-Кутты и Адамса.

2.8. Используемые методы решения ОДУ

В рамках работы к решению задачи применялись следующие численные методы:

- метод Рунге-Кутты 4-го порядка;
- метод Адамса по схеме предиктор-корректор.

Выбор устойчивого численного метода, дающего точный результат за минимальное время является важным для применения модифицированной постановки к трехмерной задаче.

Метод Рунге-Кутты 4 порядка

Одним из наиболее распространенных методов Рунге-Кутты является метод 4 порядка точности. Для задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

приближенное решение y_{n+1} может быть найдено по следующей формуле [27]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4),$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

Для использования этого метода необходимо было найти максимальный шаг по времени, при котором сохраняется устойчивость метода. В дальнейшем шаг по времени может быть увеличен вместе с увеличением размера сетки, т.к. в условие устойчивости входит отношение $\Delta t / \Delta x^2$.

Метод Адамса по схеме предиктор-корректор

Методы Адамса относятся к категории многошаговых конечно-разностных методов, т.е. для вычисления нового значения функции используют значения, вычисленные на предыдущих шагах. Существует две группы методов Адамса: явные методы Адамса (методы Адамса-Башфорта) и неявные (методы Адамса-

Мультона). Неявная схема интегрирования предполагает итерационное решение системы. Итерационный процесс требует начального приближения решения. Его можно получить, используя явную схему. Схема предиктор-корректор состоит из явной схемы, которую называют предиктором, и неявной, которую называют корректором. В рамках данной работы в качестве предиктора использовался метод Адамса-Башфорта 4-го порядка

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55f(t_n, y_n) - 59f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 37f(t_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(t_{n-3}, y_{n-3})),$$

а в качестве корректора — метод Адамса-Мультона 5-го порядка

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} (251f(t_{n+1}, y_{n+1}) + 646f(t_n, y_n) - 264f(t_{n-1}, y_{n-1}) + 106f(t_{n-2}, y_{n-2}) - 19f(t_{n-3}, y_{n-3})).$$

Использование такого метода решения системы ОДУ имеет то достоинство, что, будучи неявным, он более устойчивый и позволяет выбрать больший шаг интегрирования по времени.

2.9. Численные результаты и их обсуждение

В ходе моделирования основное внимание уделялось двум величинам: раскрытию трещины в источнике и ее полудлине. Контроль точности осуществлялся с использованием раскрытия и полудлины трещины, полученных из автоматического решения. Это позволяло контролировать точность численного решения в последующие моменты времени путем сравнения результатов с автоматическим решением. Моделирование проводилось с момента времени $t_0 = 1$ до $t_{fin} = 100$.

С целью выбрать наиболее эффективный метод проводилось сравнение использованных численных методов по устойчивости, точности и требуемым вычислительным затратам.

Расчеты проводились с разными сетками $M = 21 \dots 141$. Проведенные численные эксперименты показали, что для устойчивости метода Рунге-Кутты необходимо выбирать меньший шаг интегрирования по времени, чем для метода Адамса по схеме предиктор-корректор. Результаты экспериментов показали, что оба метода дают результат с одинаковой точностью независимо от размера сетки. Для примера на рис. 2.2 представлены результаты моделирования до времени

$t_{fin} = 100$ с использованием сетки с $M + 1 = 21$ и $M + 1 = 81$ узлами. Точки графика с равной нулю ординатой отвечают полудлине трещины, с равной нулю абсциссой — раскрытию в источнике.

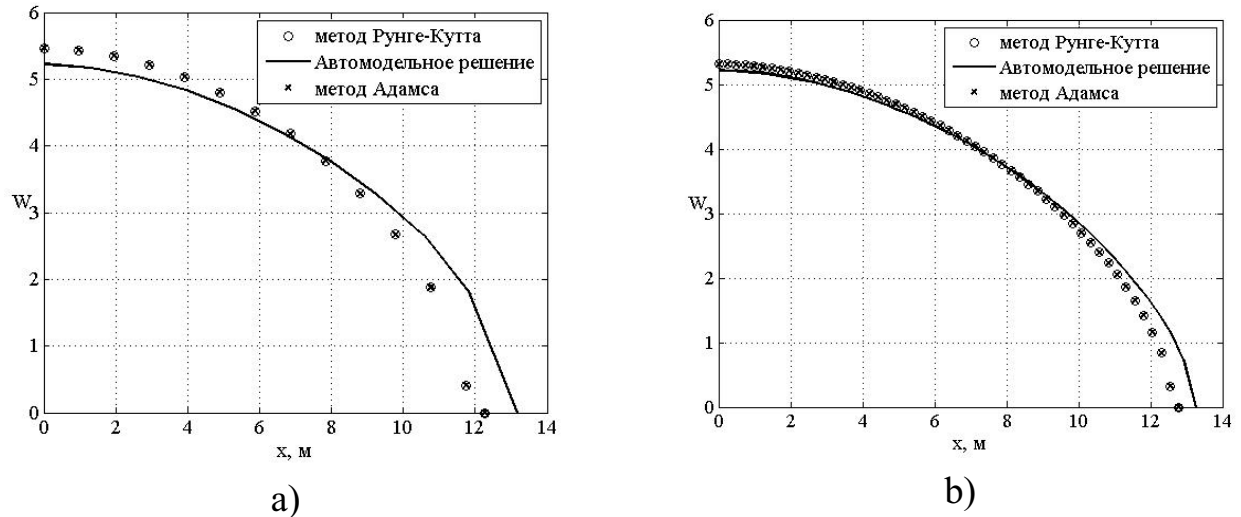


Рис. 2.2. Результаты моделирования в момент времени $t_{fin} = 100$ для а) $M + 1 = 21$ и б) $M + 1 = 81$.

Для сравнения вычислительных затрат и возможности их снижения в качестве исходной величины бралось время, которое необходимо для решения задачи на сетке с $M + 1 = 41$ узлом. Метод Рунге-Кутты без ускорения (т.е. без увеличения шага по времени вместе с увеличением масштаба сетки) требует одного часа для проведения моделирования до времени $t_{fin} = 100$ в среде Matlab [28] на ноутбуке Lenovo ideapad z710 с процессором Intel i5. Использование возможности увеличивать шаг по времени снижает это время до 10 минут. Применение к решению задачи метода Адамса позволяет снизить время вычислений до 5 минут. Существенно большие затраты времени при интегрировании методом Рунге-Кутты объясняются тем, что для его устойчивости требуется маленький шаг интегрирования по времени.

На рис. 2.3 изображена зависимость погрешности решения от количества узлов сетки. Хорошо видно, что погрешность убывает с увеличением числа узлов, используемых для моделирования. Стоит отметить, что в сравнении с результатами работы [26] погрешность заметно выросла (в работе [26] погрешность вычисления полудлины не превышала 1% даже для сетки с $M + 1 = 21$). Возрастание погрешности объясняется тем, что в работе [26] задача решалась в нормированных координатах. При использовании таких координат частная производная от раскрытия по времени равна нулю у вершины трещины ($\partial w / \partial t = 0$),

тогда как в ненормированных координатах производная сингулярна: она имеет порядок сингулярности $O((x_* - x)^{\alpha-1})$, причем $\alpha < 1$.

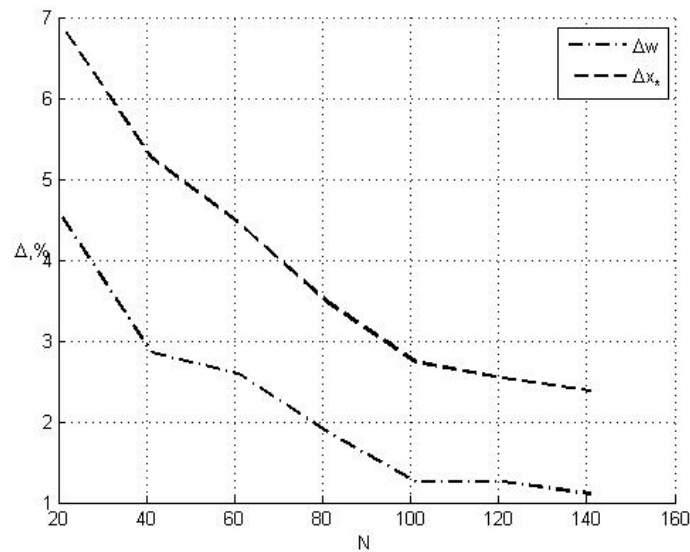


Рис. 2.3. Погрешность решения в момент времени $t_{fin} = 100$ в зависимости от числа узлов.

Было проведено исследование зависимости решения от индекса поведения жидкости n . Величина обратная индексу поведения жидкости входит в уравнения (2.8) и (2.9) как показатель степени, поэтому при стремлении n к нулю, можно ожидать снижения точности решения. Погрешность вычислений для разных n представлена на рис. 2.4. Из графика, представленного на рис. 2.4, видно, что погрешность раскрытия в источнике существенно зависит от индекса поведения жидкости, а при его стремлении к нулю погрешность увеличивается в несколько раз. Эту погрешность можно устранить, перестроив алгоритм. Однако, это лежит в стороне от главной темы этой работы. Кроме того, в практике гидроразрыва обычно применяются жидкости с индексом поведения, превышающим 0.5 [10], т.е. из диапазона, в котором метод обеспечивает достаточную точность.

На рис 2.5 показаны результаты моделирования для некоторых значений n для сетки с $M + 1 = 41$ узлом. Видно, что чем меньше индекс поведения жидкости, тем короче становится трещина и больше ее раскрытие.

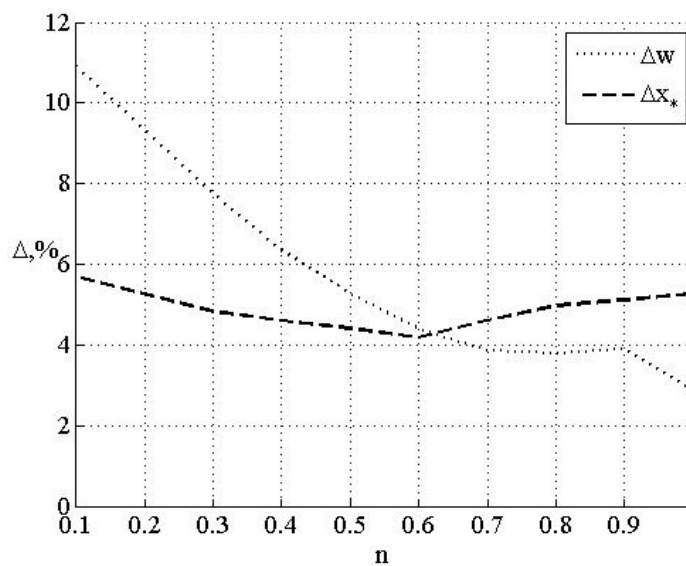


Рис. 2.4. Точность решения в момент времени $t_{fin} = 100$ в зависимости от индекса поведения жидкости n .

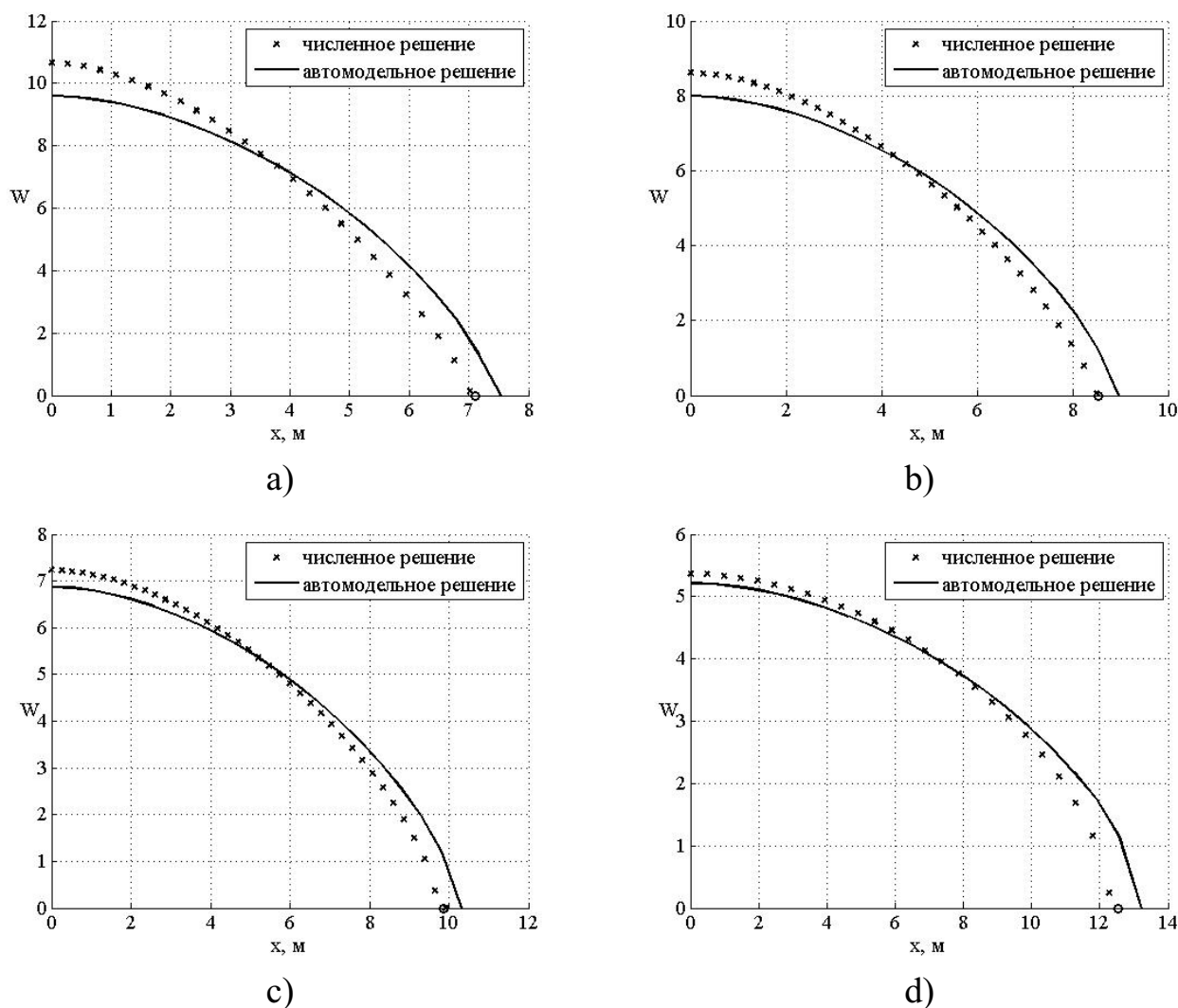


Рис. 2.5. Результаты моделирования в момент времени $t_{fin} = 100$ для а) $n = 0.1$, б) $n = 0.3$, в) $n = 0.5$ и г) $n = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам работы сделаны следующие выводы.

1. Установлено, что при использовании конечных разностей и квадратурных формул, учитывающих специфику задачи, задача ХГД может быть решена в глобальных координатах без обращения гиперсингулярного оператора.
2. Разработанный подход, использующий удвоение размера сетки при достижении фронтом заранее заданной границы, позволяет не пересчитывать матрицу дискретизированного упругого оператора на шагах интегрирования по времени. Новые коэффициенты влияния получаются из элементов матрицы делением на масштабный фактор.
3. В отличие от большинства предшествующих работ, метод не требует обращения матриц. В нем используются только скалярные произведения. Это благоприятствует объединению его с быстрым методом мультиполей.
4. Полученная динамическая система может быть эффективно решена с помощью методов решения задачи Коши для ОДУ, например, методом Рунге-Кутты, Адамса и др.
5. Установлено, что в рассматриваемой задаче метод Адамса по схеме предиктор-корректор имеет преимущество, поскольку, будучи более устойчивым, требует меньших вычислительных затрат при сохранении точности получаемого решения.
6. В случае, когда не привлекаются специальные асимптотические методы, отвечающие близкому к нулю индексу поведения жидкости, точность решения падает. Например, для сетки с $M + 1 = 41$ узлом погрешность вычислений раскрытия в источнике и полудлины трещины составляет соответственно:
 - 7.7% и 4.8% для индекса поведения жидкости $n = 0.3$,
 - 10.9% и 5.7% для индекса поведения жидкости $n = 0.1$.
 Тем не менее в практически важном интервале $0.5 < n < 1$ падение точности не происходит.
7. Разработанный метод, будучи избавленным от упрощений, доступных только в одномерных задачах, допускает распространение на трехмерную задачу. Его использование для решения задачи ХГД на прямоугольной сетке дало результаты с точностью не меньшей, чем в данной работе.

Направление дальнейших исследований — распространение метода на трех-

мерную задачу и применение более эффективных, чем метод Адамса, методов численного интегрирования, например, формулы дифференцирования назад [2].

ОХРАНА ТРУДА

Дипломная работа носит научно-исследовательский характер, поэтому исполнитель большую часть рабочего времени проводит за компьютером. Сложность работы за компьютером подтверждается как субъективными ощущениями пользователей, так и объективными исследованиями различных реакций на воздействие тех или иных производственных факторов.

Работа за компьютером связана с восприятием изображения на экране и с одновременным различением текста рукописных или печатных материалов, с выполнением машинописных графических работ и других операций, что способствует зрительному утомлению, которое усиливается из-за бликов, мерцаний и других отклонений визуальных параметров экрана и световой среды помещения.

Основные вредные и опасные факторы при работе с компьютером:

- нервное напряжение;
- повышенное зрительное напряжение;
- электромагнитные поля и последствия их воздействия;
- костно-мышечные напряжения;

Указанные факторы приводят к тому, что постоянная работа за компьютером по степени развития утомления занимает второе место среди всех видов деятельности. Для оптимального варианта организации работы необходимо свести к минимуму его неблагоприятное воздействие на здоровье пользователя, то есть привести рабочее место в соответствие с требованиями эргономики и охраны труда.

Зрительное напряжение

Повышенная нагрузка на зрение способствует возникновению близорукости, приводит к переутомлению глаз, к мигрени и головной боли, повышает раздражительность, нервное напряжение, может вызвать стресс. Важным фактором, определяющим степень зрительного утомления, является освещение рабочих мест и помещений, где расположены компьютеры.

Согласно документу «Гигиенические требования к видеодисплейным терминалам, персональным электронно-вычислительным машинам и организации работы» (СанПиН 2.2.2.1340-03) существует ряд требований к освещению рабочего места при работе с компьютером.

Помещения для эксплуатации ПК (Персональный Компьютер) должны иметь систему общего освещения (естественное и искусственное освещение). Оконные светопроемы в помещениях, где эксплуатируется вычислительная техника, должны быть преимущественно ориентированы на север и северо-восток и оборудованы регулируемыми устройствами типа: занавесей, жалюзи, внешних козырьков и др.

Рабочие столы следует размещать так, чтобы видеодисплейные терминалы были ориентированы боковой стороной к световым проемам, чтобы естественный свет падал преимущественно слева. Искусственное освещение в помещениях для эксплуатации ПК должно осуществляться системой общего равномерного освещения. Освещенность на поверхности стола в зоне размещения рабочего документа должна быть 400 – 500 лк. Рекомендуется норма освещенности рабочего места оператора в системе общего освещения – 150 – 200 лк. Допускается установка светильников местного освещения для подсветки документов. Местное освещение не должно создавать бликов на поверхности экрана и увеличивать освещенность экрана более 300 лк. Освещение рабочих поверхностей осуществляется с помощью люминесцентных ламп ЛБ белого света, которые предназначены для помещений с нормальными условиями труда.

Освещенность поверхности экрана должна быть не более 300 лк . Яркость светильников общего освещения в зоне углов излучения $50 - 90^\circ$ с вертикалью в продольной и поперечной плоскостях должна составлять не более 200кд/м^2 , защитный угол светильников должен быть не менее 40° . Светильники местного освещения должны иметь не просвечивающий отражатель с защитным углом не менее 40° . В качестве источников света при искусственном освещении следует применять преимущественно люминесцентные лампы ЛБ (белого света) и ЛТБ (тепло-белого) мощностью 40Вт или 80Вт, у которых высокая световая отдача (до 120лм/Вт и более), продолжительный срок службы (до 10000ч), малая яркость светящейся поверхности, близкий к естественному спектральный состав излучаемого света, что обеспечивает хорошую светопередачу. Помещение является помещением с нормальными условиями среды, что позволяет использовать в системе освещения светильники ЛСПО 2 (пыле- и водо-незащищенное исполнение) с люминесцентными лампами ЛХБ 40Вт со световым потоком 2780лм по ГОСТ 6825-91. В светильниках местного освещения допускается применение ламп накаливания, в том числе галогенных. Применение светильников без рассеивателей

и экранирующих решеток не допускается.

Организация рабочего места, в связи с активностью оператора

Работы оператора ЭВМ связана с пониженной мышечной активностью (гипокинезией) и длительным статическим напряжением мышц спины, шеи, рук и ног, что приводит к быстрому утомлению. Утомление существенно увеличивается при нерациональной высоте рабочей поверхности стола и сидения, отсутствии опорной спинки и подлокотников, неудобных углах сгибания в плечевом и локтевом суставах, углах наклона головы, неудобном размещении документов, видеотерминала и клавиатуры, неправильном угле наклона экрана, отсутствии пространства и подставки для ног. В соответствии с требованиями эргономики, рабочее место должно быть приспособлено для конкретного вида труда и для работников определённой квалификации с учётом их физических и психических возможностей и особенностей. Конструкция рабочего места должна соответствовать следующим требованиям:

- обеспечивать быстроту, безопасность, простоту и экономичность технического обслуживания в нормальных и аварийных условиях;
- полностью отвечать предполагаемым условиям эксплуатации.

Расположение монитора в месте рабочей зоны должно обеспечивать удобство зрительного наблюдения в вертикальной плоскости под углом от нормальной линии взгляда оператора. Монитор должен иметь возможность поворачиваться вокруг горизонтальной и вертикальной осей. Согласно санитарных правил с учётом ГОСТ 12.2.032-78 «ССБТ. Рабочее место при выполнении работ сидя. Общие эргономические требования» рабочий стол должен иметь пространство для ног высотой не менее 600мм, шириной – не менее 500мм, глубиной на уровне колен – не менее 450мм и на уровне вытянутых ног – не менее 650мм. Рабочий стул (кресло) должен быть подъёмно-поворотным, регулируемым по высоте и углам наклона и по расстоянию спинки от переднего края сиденья. Конструкция его должна обеспечивать:

- ширину и глубину поверхности сиденья не менее 400мм;
- регулировку высоты поверхности сиденья в пределах 400 – 450мм;
- углы наклона вперёд 15° и назад 5°;
- высоту опорной поверхности спинки 30 ± 20 мм;
- ширину опорной поверхности спинки не менее 380мм;

- радиус кривизны горизонтальной плоскости – 400мм;
- пределы угла наклона спинки в вертикальной плоскости $0 \pm 30^\circ$.

Требования пожаробезопасности

Согласно ГОСТ 12.1.004-91 существуют следующие опасные факторы: пламя и искры, повышенная температура окружающей среды, токсичные продукты горения и термического разложения, пониженная концентрация кислорода. Противопожарная защита обеспечивается следующими мерами:

- Применение средств пожаротушения, установка сигнализации и устройств тушения, ограничивающих распространение пожара, мероприятия по эвакуации людей, наличие средств индивидуальной защиты и средств противодымной защиты.
- Наличие противопожарных перегородок и отсеков, устройств автоматического отключения систем.
- Планировка эвакуационных путей и выходов.
- Оповещение людей.
- Технические средства для эвакуации и спасения людей.
- Наличие огнетушащих веществ.

Пожарную опасность в ВЦ представляют носители информации, поэтому помещение должно быть оборудовано негорючими стеллажами и шкафами. Хранение перфокарт, лент, дисков должно производиться в металлических кассетах. Не допускается размещение складских помещений, а также пожаровзрывоопасных производств над и под залами ПК, а также смежных с ними помещениях. Система вентиляции ВЦ должна быть оборудована устройством, обеспечивающим автоматическое отключение ее при пожаре, а также огнедымозадерживающими устройствами. Подача воздуха к ПК для охлаждения должна осуществляться по самостоятельному воздуховоду. Присоединение этих воздуховодов к общему коллектору допускается только после огне- и дымозадерживающих клапанов. Система электропитания ПК должна иметь блокировку, отключающую ПК в случае остановки системы кондиционирования и охлаждения.

Электромагнитные поля

Особое внимание при анализе безопасности в процессе работы за компьютером следует уделять воздействию электромагнитных полей мониторов во

время их эксплуатации, так как они могут быть причиной возникновения кожных сыпей, помутнения хрусталика глаза, патологии беременности и других серьезных нарушений здоровья. Мониторы являются источниками широкого спектра электромагнитных излучений, таких как рентгеновское, ультрафиолетовое, видимого спектра, инфракрасное. Кроме того, они создают электростатическое поле. Временные допустимые уровни электромагнитных полей (ЭМП), создаваемых ПК, не должны превышать значений:

- напряженность электрического поля (в диапазоне частот 5Гц – 2кГц) – 25Вт/м
- напряженность электрического поля (в диапазоне частот 5кГц – 400кГц) – 2.5Вт/м
- плотность магнитного потока (в диапазоне частот 5Гц – 2кГц) – 250нТл
- плотность магнитного потока (в диапазоне частот 5кГц – 400кГц) – 25нТл
- Поверхностный электростатический потенциал экрана видеомонитора – 500В

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adachi J. et al. Computer simulation of hydraulic fractures //International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 2007. – Т. 44. – №. 5. – С. 739-757.
2. Brayton R. K., Gustavson F. G., Hachtel G. D. A new efficient algorithm for solving differential-algebraic systems using implicit backward differentiation formulas //Proceedings of the IEEE. – 1972. – Т. 60. – №. 1. – С. 98-108.
3. Geertsma, J., F. De Klerk. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures //Journal of Petroleum Technology. – 1969. – Т. 21. – №. 12. – С. 1,571-1,581.
4. Guo B. et al. Petroleum production engineering, a computer-assisted approach //Gulf Professional Publishing. - 2011.
5. Khristianovic S., Zheltov Y. Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids //Proc. 4th world petroleum congress, Rome. – 1955. – Т. 2. – С. 579-586.
6. Linkov A. M. Speed equation and its application for solving ill-posed problems of hydraulic fracturing //Doklady Physics. – MAIK Nauka/Interperiodica, 2011. – Т. 56. – №. 8. – С. 436-438.
7. Linkov A. M. On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity //International Journal of Engineering Science. – 2012. – Т. 52. – С. 77-88.
8. Linkov A. M., Mishuris G. Modified formulation, ε -regularization and the efficient solution of hydraulic fracture problems //ISRM International Conference for Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing. – International Society for Rock Mechanics, 2013.
9. Linkov A. M. The particle velocity, speed equation and universal asymptotics for the efficient modelling of hydraulic fractures //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2015. – Т. 79. – №. 1. – С. 54-63.

10. Montgomery C. Fracturing fluids //ISRM International Conference for Effective and Sustainable Hydraulic Fracturing. – International Society for Rock Mechanics, 2013.
11. Osher S., Sethian J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations //Journal of computational physics. – 1988. – T. 79. – №. 1. – C. 12-49.
12. Pierce A. P., Siebrits E. A dual multigrid preconditioner for efficient solution of hydraulically driven fracture problem //International Journal of Numerical Methods and Engineering. – 2005. – T. 65. – C. 1797-1823.
13. Peirce A., Detournay E. An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2008. – T. 197. – №. 33. – C. 2858-2885.
14. Peirce A. Modeling multi-scale processes in hydraulic fracture propagation using the implicit level set algorithm //Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2015. – T. 283. – C. 881-908.
15. Rice J. R. Mathematical analysis in the mechanics of fracture //Fracture: an advanced treatise. – 1968. – T. 2. – C. 191-311.
16. Savitski A. A., Detournay E. Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions //International Journal of Solids and Structures. – 2002. – T. 39. – №. 26. – C. 6311-6337.
17. Sethian J. A. Level set methods and fast marching methods //Journal of Computing and Information Technology. – 2003. – T. 11. – №. 1. – C. 1-2.
18. Settari A., Cleary M. P. Development and testing of a pseudo-three-dimensional model of hydraulic fracture geometry //SPE Production Engineering. – 1986. – T. 1. – №. 06. – C. 449-466.
19. Siebrits E., Peirce A. P. An efficient multilayer planar 3D fracture growth algorithm using a fixed mesh approach //International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2002. – T. 53. – №. 3. – C. 691-717.

20. Simonson E. R. et al. Containment of massive hydraulic fractures //Society of Petroleum Engineers Journal. – 1978. – Т. 18. – №. 01. – С. 27-32.
21. Rahman M. M., Rahman M. K. A review of hydraulic fracture models and development of an improved pseudo-3D model for stimulating tight oil/gas sand //Energy Sources, Part A: Recovery, Utilization, and Environmental Effects. – 2010. – Т. 32. – №. 15. – С. 1416-1436.
22. Mack M. G., Warpinski N. R. Mechanics of hydraulic fracturing //Reservoir stimulation. – 2000. – С. 6-1.
23. Wrobel M., Mishuris G. Hydraulic fracture revisited: Particle velocity based simulation //International Journal of Engineering Science. – 2015. – Т. 94. – С. 23-58.
24. Алексеенко О. П. и др. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва //Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2011. – Т. 11. – №. 3. – С. 36-59.
25. Линьков А. М. Решение осесимметричной задачи о гидроразрыве для утончающихся жидкостей // ПММ. -2016. - Т. 80. - №. 2. - С. 207-217.
26. Линьков А. М. Численное решение плоской задачи о гидроразрыве в модифицированной постановке при произвольных начальных условиях //Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. -2016. -№. 2.
27. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – Москва: Наука, 1989.
28. <http://www.mathworks.com/>
29. <http://vseonefti.ru/upstream/frac.html>