

**Задача А**

Тело вращается с постоянной угловой скоростью .

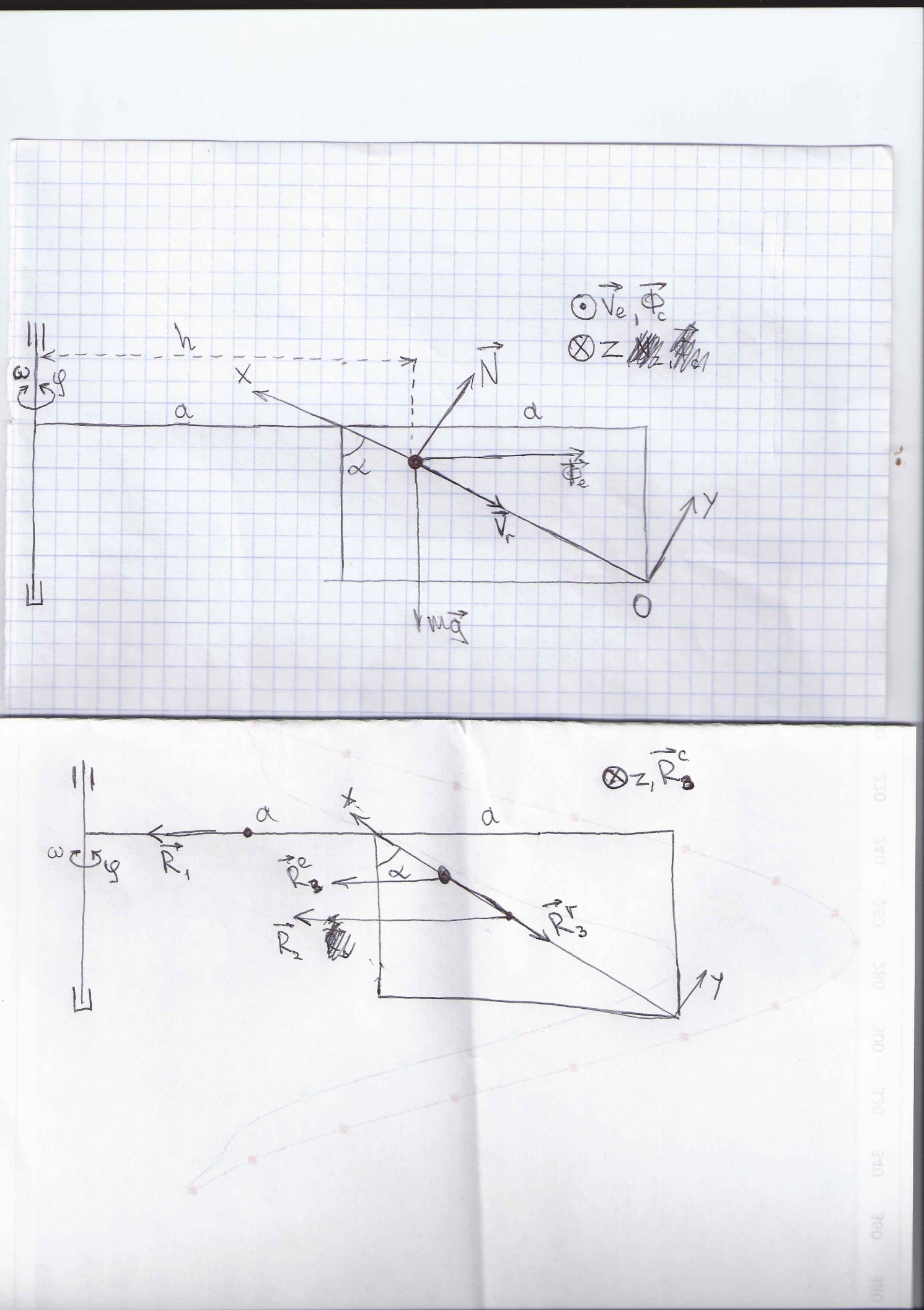
Найти

1. Дифференциальное уравнение относительного движения точки.
2. Положение относительного равновесия, если оно

существует.

1. Закон относительного движения и скорости точки.
2. Скорость точки в момент, когда точка покидает тело
3. Закон изменения реакции тела на точку и ее значение в момент, когда точка покидает тело.
4. Выражения для составляющих главного вектора реакций шарниров тела.

**Задание И1. Основное уравнения динамики относительного движения точки. Теорема о движении центра масс системы.**

****

1. Составляем уравнение динамики относительного движения точки

(1.1)

Центробежная сила инерции всегда направлена от оси вращения тела. Ее модуль равен

Сила Кориолиса направлена вдоль оси z (Рис.2).

Проекция

поскольку (точка вылетает), а .

Проектируя уравнение (1.1) на ось *х*, получаем дифференциальное уравнение относительного движения точки

1. Положение относительного равновесия находится в точке, где ускорение равно нулю. Это точка Р с координатой

При заданных начальных условиях точка движется против направления оси х.

1. Найдем закон относительного движения и скорости точки. Это обратная задача динамики. Решение неоднородного уравнения (1.1) ищем в виде

Решение однородного уравнения ищем в виде

Подставляя решение в однородное уравнение, приходим к характеристическому уравнению с вещественными корнями

Решение принимает вид

Частное решение ищем в виде правой части, т.е. постоянной

Полное решение уравнения (1.1)

(1.3)

Постоянные в (1.3) находим из начальных условий

(1.4)

Подставив (1.4) в (1.3), получим:

Иначе

Решение с учётом значений приобретает вид

С учетом начальных условий (1.4)

(1.5)

1. Найдем скорость точки в момент, когда она покидает тело. Можно было бы и закона движения определить соответствующий момент времени и подставить его в закон изменения скорости. Но проще найти зависимость скорости точки от ее перемещения известной заменой

Которая фактически приводит к теореме об изменении кинетической энергии точки.

Получаем

Интегрируя, находим зависимость относительной скорости точки от ее перемещения

(1.6)

Из начальных условий (1.4) находим

Находим скорость при

1. Найдем закон изменения реакции тела на точку. Это прямая задача динамики. Проекция уравнения (1.1) на ось y:

дает проекцию реакции стержня на ось y

Проектируя уравнение (1.1) на ось z, находим:

Теперь проекция нормальной реакции стержня на ось z равна

зависит от найденной относительной скорости точки (1.5).

В момент, когда точка покидает тело

(1.9)

1. Составляющие реакции шарнира **R** найдем по известным ускорениям тела и точки из теоремы о движении центра масс

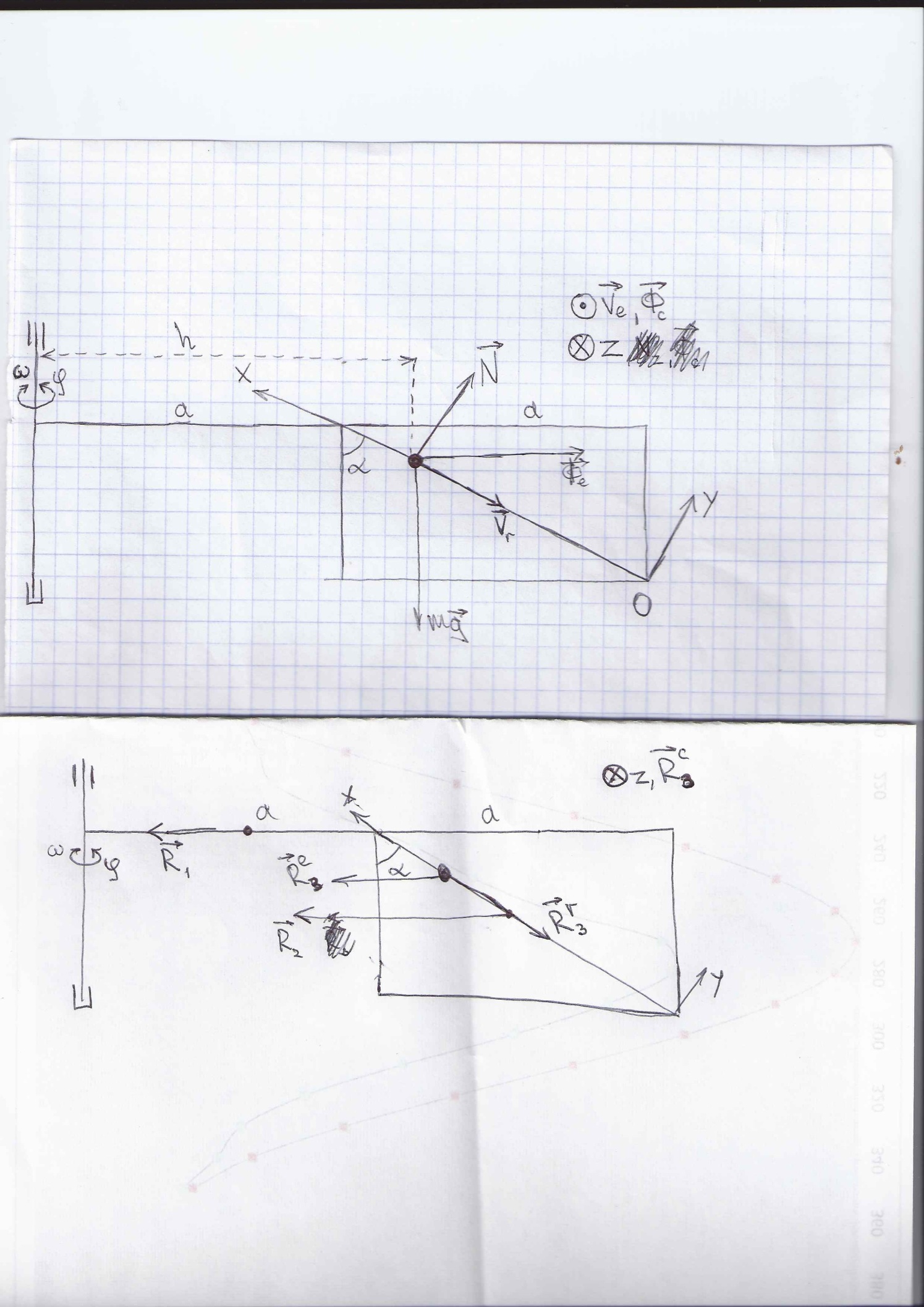
Это прямая задача динамики.

где составляющие от ускорений центров тяжести стержня и пластины, а от ускорения точки.

Стержень невесом

Последнее состоит из относительного, переносного и Кориолисова ускорений:

Направления составляющих изобразим на рисунке и вычислим их величину



;

**Задание И3. Уравнения Лагранжа. Теорема об изменении кинетической энергии.**

1. Методом Лагранжа получить дифференциальное уравнение относительного движения точки, найденное в И1.
2. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии найти реакцию тела на точку, и сравнить ее с результатом в И1.

**Решение**

1. Найдем дифференциальное уравнение относительного движения точки из уравнения Лагранжа

Абсолютная скорость V точки складывается из переносной и относительной скоростей (см. Рис. на стр. 3)

Таким образом, кинетическая энергия приобретает выражение

Находим производные:

Обобщенная сила

Подставив производные и в уравнение Лагранжа приходим к ***дифференциальному уравнению, которое совпадает с уравнением И1***

(3.4)

1. Реакцию тела на точку найдем из теоремы об изменении кинетической энергии точки.

где N- мощность физических сил, приложенных к точке, в переносном и в относительном движениях точки.

Физических сил, имеющих проекцию на ось нет, поэтому

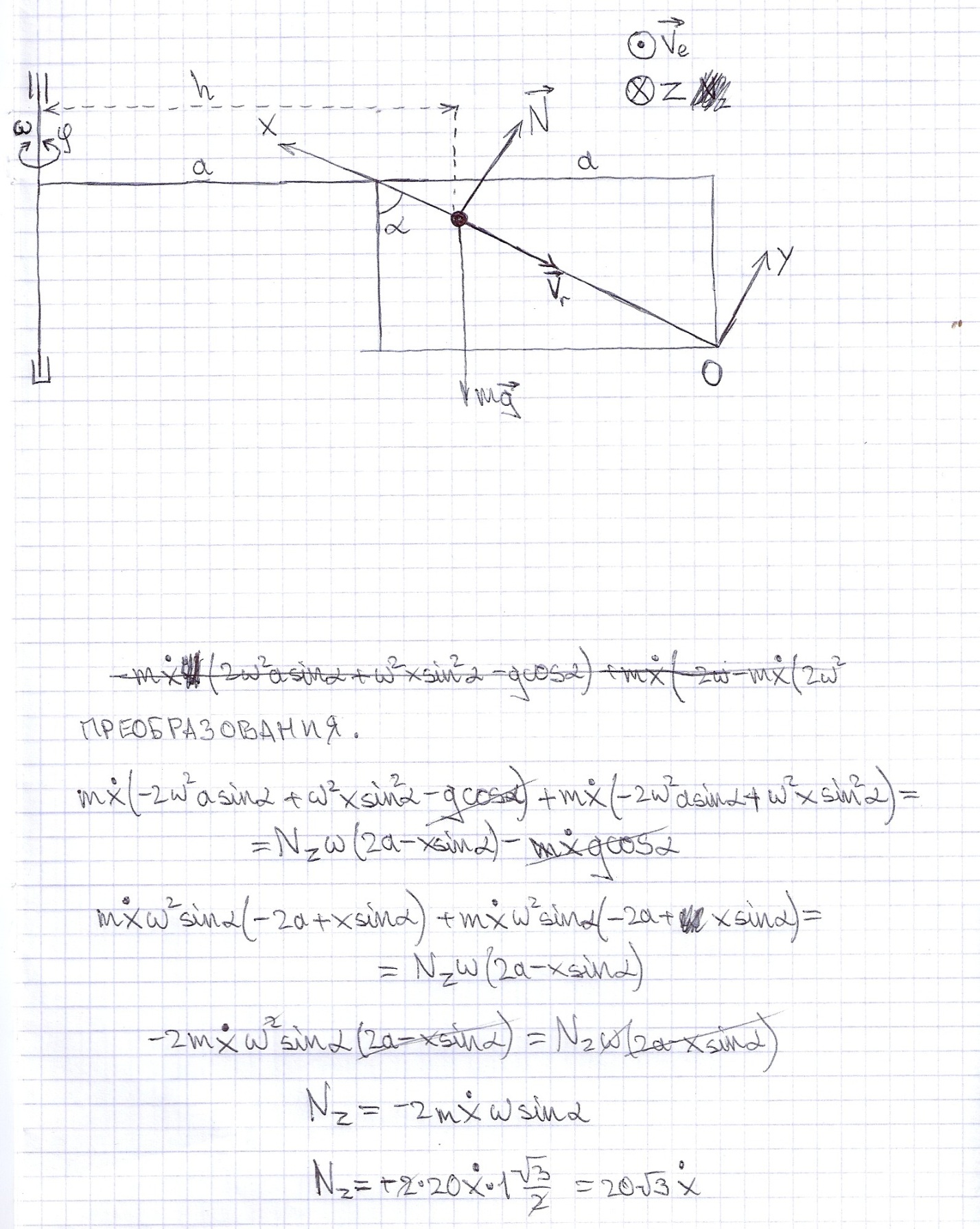
Во вращательном переносном движении точки мощность реакции вычисляем через момент

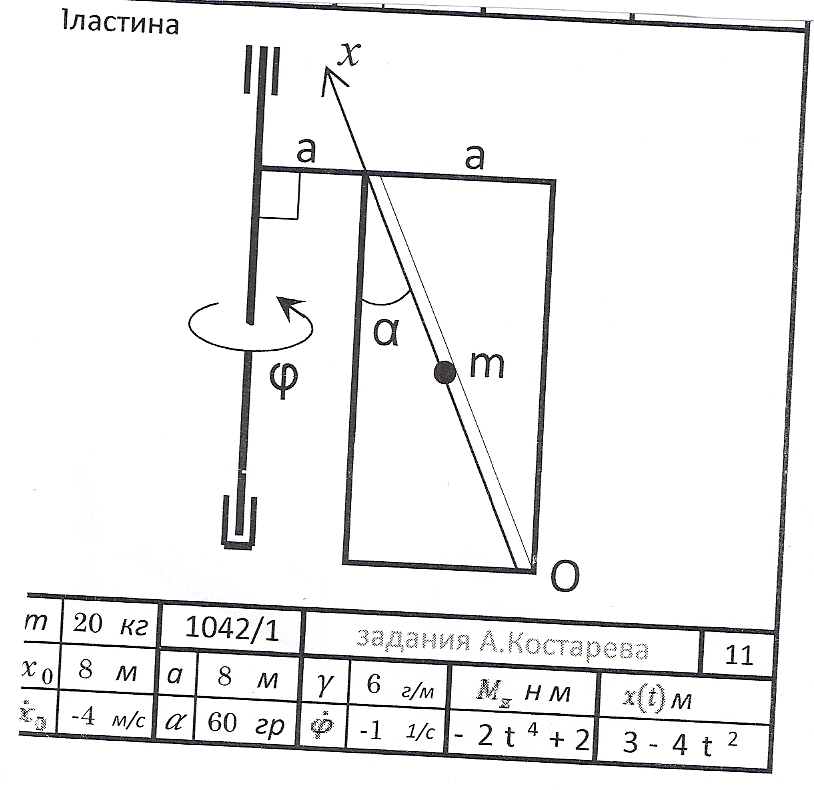
В соответствии с Рис.на стр. 6

Из дифференциального уравнения (3.4)

Таким образом, после преобразований (см. стр. 6 - преобразования) находим  ***результат, совпадающий с результатом И1***

(3.5)

****



**масса пластины принята равной 1 кг**

**Задача Б**

Тело вращается из состояния покоя под действием момента . Самодвижущийся экипаж М, принимаемый за точку массы m, движется без сопротивления по закону за счет силы сцепления с телом.

Найти

1. Закон угловой скорости тела и ее значение в момент, когда точка

покидает тело.

1. Закон силы сцепления точки с телом, обеспечивающей

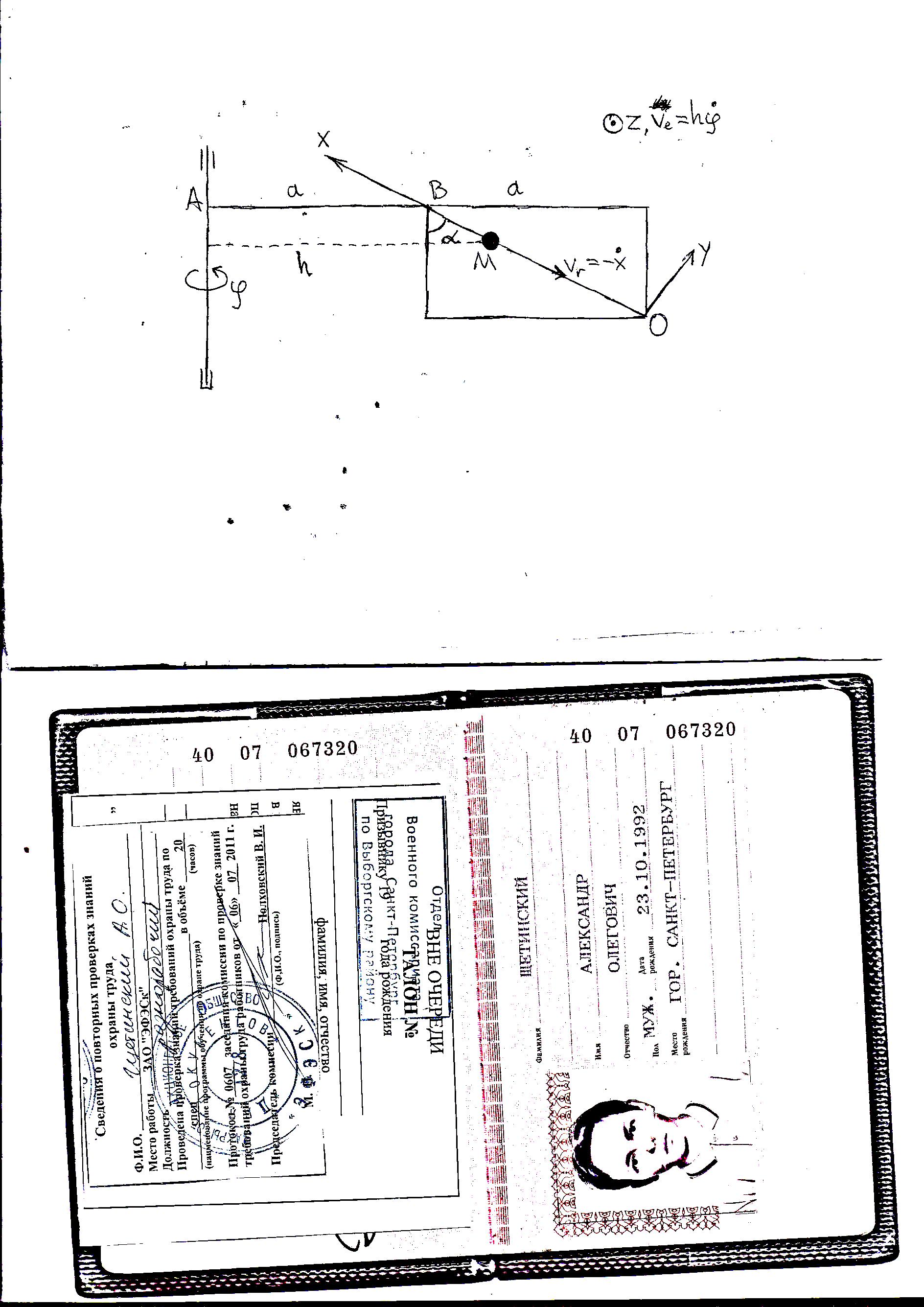
заданное движение точки

1. Закон силы реакции тела на точку и ее значение в

момент вылета точки с тела.

1. В задаче А найти закон вращательного момента ,

обеспечивающий равномерное вращение тела



**Задание И2. Теорема об изменении кинетического момента. Дифференциальное уравнение вращения тела. Условие равномерного вращения.**

1. Найдем закон изменения угловой скорости тела из теоремы об изменении кинетического момента относительно оси вращения тела.

Кинетический момент системы складывается из кинетического момента пластины с зафиксированной на нём в текущий момент точкой М,

Момент инерции пластины вычисляется по формуле Штейнера

Момент инерции точки в текущем положении

Итак

Кинетический момент системы равен:

Интегрируем теорему об изменении кинетического момента

Получаем

Отсюда находим закон угловой скорости тела

В момент, когда точка покидает тело.

1. Найдем закон изменения движущей силы сцепления , которая создается мотором экипажа и обеспечивает заданное движение точки по телу. С учетом силы дифференциальное уравнение относительного движения точки

приобретает вид

Отсюда находим закон изменения силы

1. Силу реакции точки на тело найдем из дифференциального уравнения вращения тела.

Или

Отсюда

Дифференцируя закон угловой скорости , получаем:

В момент вылета точки и

Для удобства вычислений сначала посчитаем

Тогда

1. **В задаче А** тело вращается равномерно, значит сумма моментов всех сил, действующих на тело, равна нулю. На тело, кроме момента действует сила давления, обратная по направлению силе , найденной в задаче А

Ее момент относительно оси вращения равен

Приравнивая сумму моментов нулю

находим закон изменения вращательного момента, поддерживающий постоянную угловую скорость тела

где законы относительного движения и скорости точки являются известными функциями времени (1.5)

**Задание И4. Уравнения Лагранжа.**

1. Найдем закон изменения угловой скорости из уравнения Лагранжа

Кинетическая энергия системы складывается из энергии пластины и точки

Подставив данные задачи, находим

Обобщенная

Интегрируем теорему об изменении кинетического момента

Получаем

***Приходим к тому же результату, что и в И2***

В момент, когда точка покидает тело.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m | x0 |  | a |  |  | Mz | x(t) |
| 18 кг | 5м | -5м/c | 5м | 60 | -3 1/с | -2t4-3 | 2-2 t4 |

**Задание И5. Уравнений Лагранжа. Теорема об изменении кинетической энергии в переносном движении**

1. Дифференциальные уравнения движения системы найдем из уравнений Лагранжа. За обобщенные координаты выберем x и φ.

Запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

Выражение кинетической энергии системы (4.2) позаимствуем из задания И4

Производные по :

Обобщенная сила

равна нулю, поскольку нет сил, имеющих составляющие вдоль

Подставив (5.3) и (5.4) в (5.1) получаем дифференциальное уравнение по :

Поскольку.

то является циклической координатой, и ей соответствует циклический интеграл дифференциального уравнения по

Покажем, что циклический интеграл выражает факт сохранение кинетического момента системы относительно оси z. Согласно формуле (2.1) задания И2

Подстановка данных задачи дает

что в точности совпадает с выражением (5.7).

Значит (5.7) действительно выражает факт сохранение кинетического момента системы относительно оси z. Ввиду начального покоя системы

Производная от (5.7) приводит к дифференциальному уравнению по

2. Проверим уравнение относительного движения точки (1.2) в условиях задачи А.

При подстановке условий задачи А: в (5.5) *получаем точно такое же уравнение, как в задаче А*

3. Проверим закон угловой скорости тела, найденный в условиях задачи Б

При подстановке условий задачи Б при отсутствии момента : в (5.7) получаем тот же закон угловой скорости

что и в задании И2, но при отсутствии момента.

4. Общее выражение зависимости реакции тела на точку найдем из теоремы об изменении кинетической энергии точки в переносном движении

Здесь использовано разложение выражения кинетической энергии точки Т на слагаемые по степеням относительной скорости. Справа стоит мощность внешних сил (они здесь состоят из одной реакции на переносном движении точки.

Кинетическая энергия Т не содержит времени t, поэтому

Энергия , содержащая в первой степени и ее производная

Энергия содержащая в нулевой степени и ее производная

Мощность реакции в переносном движении точки

После подстановки в теорему (5.13) получаем

Проверим выражение (для реакциив условиях задачи А, где:

Подставив эти условия в (5.19), получаем

получаем то же выражение (1.8), что и в задании И1.