Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Институт Прикладной Математики и Механики

**Кафедра «Теоретической механики»**

 **ОТЧЕТ**

о выполнении лабораторной работы по вычислительной механике

 **«Использование разностной схемы для решения уравнения теплопроводности.»**

Выполнил

студент гр.33604/1 Воробьев С.А.

Руководитель

Ассистент Ле-Захаров С.А.

Санкт-Петербург

2015

**СОДЕРЖАНИЕ**

1. Постановка задачи………................................................................................ 3

2. Выполнение расчетов в MATLAB ................................................................. 4

3. Результаты......................................................................................................... 5

4. Выводы.............................................................................................................. 8

**Постановка задачи**

Дан однородный металлический стержень. Необходимо решить уравнение теплопроводности, используя разностную схему (рис.1).

****

Рис.1. Разностная схема.

Исходные данные:

$L$ = 1 м – длина стержня

$α$ = 1 м/c2 – коэффициент температуропроводности м/c2

Уравнение теплопроводности:

$$\frac{∂u}{∂t}-a^{2}∆u=0$$

Начальные условия:

$$T|\_{x\leq \frac{1}{2 }м}=1 K$$

$$T|\_{x\geq \frac{1}{2 }м}=0 K$$

Граничные условия для данной задачи будут иметь вид:

$$T|\_{x=0}=1 K$$

$$T|\_{x=1}=0 K$$

Уравнение теплопроводности принимает вид:

$-\frac{T\_{i-1}^{j}-2T\_{i-1}^{j-1}+T\_{i}^{j-2}}{(∆x)^{2}}$ *+* $\frac{1}{α}\frac{T\_{i}^{j-1}-T\_{i-1}^{j-1}}{∆t}=0$(1)

$∆x$ – шаг интегрирования по расстоянию;

$∆t$ – шаг интегрирования по времени;

$T\_{i}^{j}$ – температура в j-ой точке в момент времени i.

**Выполнение расчетов в MATLAB**

Выразим искомое$T\_{i}^{j-1}$из уравнения теплопроводности (1):

$T\_{i}^{j-1}$= $α\left(Δt\right)\frac{T\_{i-1}^{j}-2T\_{i-1}^{j-1}+T\_{i}^{j-2}}{\left(Δx\right)^{2}}+ T\_{i-1}^{j-1}$

Используя пакет прикладных программ MatLabреализуем разностную схему (Рис. 1):

function UrTep();

format short; format compact

n = input(' Enter the number of points: '); %кол-во точек сетки

dt = input(' Enter the step time integration: '); %шаг интегрирования по времени

t = input(' Enter the number of step time integration: ');%кол-во шагов по времени

kappa=1 %коэфицент температуропроводности

mid = round(n/2);

dx = 1/(n-1); %шаг интегрирования по расстоянию

T=zeros(n,1); %матрица температуры в зависимости от координаты и времени

T0 = 1;

T1 = 0;

for j=1:mid

T(j,1)=T0; %Нач.Условия x<=1/2

end;

for j=(mid+1):n

T(j,1) = T1; %Нач.Условия x>1/2

end;

for i=2:t %Гр.Условия

T(1,i) = T0;

T(n,i) = T1;

for j=3:n

 T(j-1,i)=T(j-1,i-1)+(kappa)\*(dt)\*(T(j,i-1)-2\*T(j-1,i-1)+T(j-2,i))/((dx)\*(dx));

end;

end;

T(:,t)

На выходе из данной программы получаем распределение температуры между ее граничными значениями.

**Результаты**

Произведем расчет разностной схемы, с сеткой, состоящей из 4 точек, шагом интегрирования по времени 0.01($∆x=0.25 м.; ∆t=0.01 c.)$и количеством шагов по времени равным 400(10 секунд) (Рис. 2)

****

Рис. 2 Результат расчёта задачи с использованием разностной схемы.

В итоге мы получили равномерное распределение температуры от 1 до 0.

Исследуем, как быстро при использовании данной схемы, можно прийти к равномерному распределению температуры в описанных выше условиях.

Таблица 1. Зависимость распределения температуры от количества шагов интегрирования.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага интегрирования | 1-ая точка сетки(0 м) | 2-ая точка сетки(0.33 м) | 3-ья точка сетки(0.66 м.) | 4-ая точка сетки(1 м.) |
| 2 | 1 | 0.991 | 0.0089 | 0 |
| 20 | 1 | 0.8647 | 0.1341 | 0 |
| 50 | 1 | 0.7535 | 0.2448 | 0 |
| 100 | 1 | 0.6884 | 0.3101 | 0 |
| 400 | 1 | 0.6666 | 0.3333 | 0 |

Рис. 3. График зависимости распределения температуры на разных шагах интегрирования.

Произведем расчет разностной схемы, с сеткой, состоящей из 10 точек, шагом интегрирования по времени 0.01($∆x=0.25 м.; ∆t=0.01 c.)$и количеством шагов по времени равным 400(10 секунд) (Рис. 4)

Рис.4. Результат расчёта задачи с использованием разностной схемы.

В итоге мы получили равномерное распределение температуры от 1 до 0.

Таблица 2. Зависимость распределения температуры от количества шагов интегрирования.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № шага  | 2 | 4 | 8 | 10 | 30 |
| 1-ая точка сетки | (0 м) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2-ая точка сетки | (0.11 м) | 1 | 1 | 0.8847 | 0.8890 | 0.8889 |
| 3-ья точка сетки | (0.22м.) | 1 | 0.4686 | 0.7808 | 0.7807 | 0.7778 |
| 4-ая точка сетки | (0.33 м.) | 1 | 0.3975 | 0.6690 | 0.6752 | 0.6667 |
| 5-ая точка сетки | (0.44м.) | 0,19 | 0,3368 | 0,5613 | 0,5728 | 0,5556 |
| 6-ая точка сетки | (0.55 м.) | 0,1539 | 0,285 | 0,4579 | 0,4513 | 0,4444 |
| 7-ая точка сетки | (0.66 м.) | 0,1247 | 0,2409 | 0,3588 | 0,3376 | 0,3333 |
| 8-ая точка сетки | (0.77 м.) | 0,101 | 0,1599 | 0,2295 | 0,2242 | 0,2222 |
| 9-ая точка сетки | (0.88 м.) | 0,0818 | 0,0793 | 0,1144 | 0,1116 | 0,1111 |
| 10-ая точка сетки | (1 м.) | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |



Рис. 5. График зависимости распределения температуры на разных шагах интегрирования.

**Выводы**

Заданная разностная схема с учетом начальных и граничных условий была успешно реализована на языке программирования MATLAB. В процессе работы над этой задачей, мы пришли к выводу, что схема сходится в случае $∆x=0.25 м; ∆t=0.1 c$. и построили графики зависимости распределения температуры на разных шагах интегрирования.(Рис.3, Рис.5).